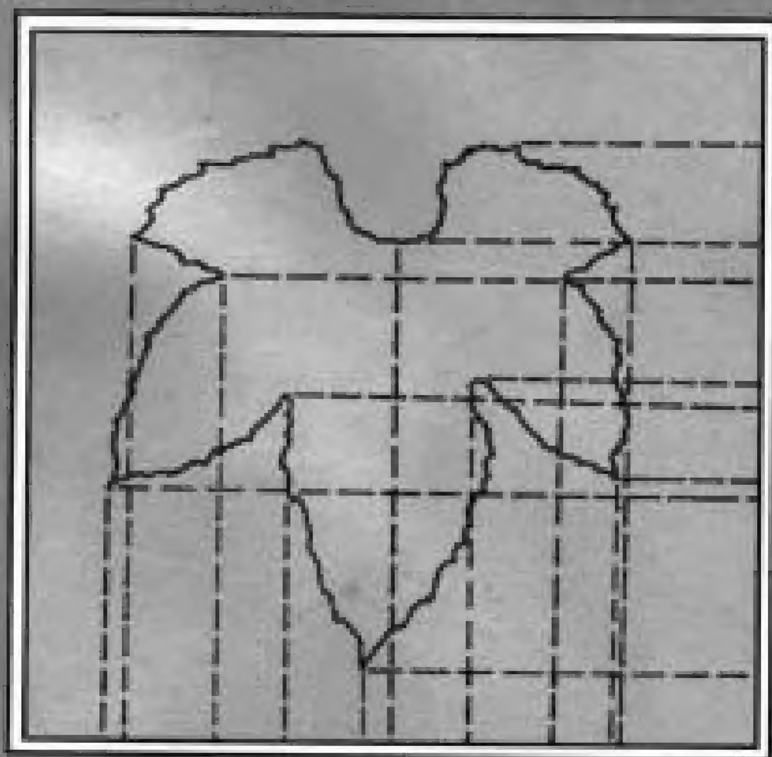
欧拉
著
张延伦
译

无穷分析引论

（上）



山西教育出版社

欧拉 著
张延伦 译

无穷分析引论

（上）

山西教育出版社

中译者的话

本书在数学史上地位显赫，是对数学发展影响最大的七部名著之一．初版（1748 年）至今虽已 200 多年，但大数学家 A. Weil 教授 1979 年称道其现实作用说：学生从它所能得到的益处，是现代的任何一本教科书都比不上的．笔者手边的俄、德、英译本依次出版于 1961、1985、1988，这大概可视为其现实作用的一个证明．

欧拉贡献巨大，著述极为多产．本书是它著作中最杰出的，书中结果几乎或都为他自己所得，或为他用自己的方法推出．他的作法是把最基本的东西解释得尽量清楚，讲明引导他得出结论的思路，而把进一步展开留给读者，使读者有机会驰骋自己的才能．这大概都是 A. Weil 教授前面那段话的根据．

本书是作为微积分预备教程，为弥补初等代数对于微积分的不足，为帮助学生从有穷概念向无穷概念过渡而写．读者对象是准备攻读和正在攻读数学的学生、数学工作者和广大数学爱好者．

本书从英译本转译，参考俄、德译本作了些订正和改动．

限于水平，中译文错误难免，敬希指正．

几 段 话

1. 高斯："学习欧拉的著作，乃是认识数学的最好工具."
2. 拉普拉斯："读读欧拉，他是我们大家的老师."
3. 波里亚很欣赏欧拉的作法：坦率地告诉人们引导他作出发明的思路.
4. Alberto Dou，S. J 教授将欧拉的许多著作译成了西班牙文. 他对本书的英译者说："《无穷分析引论》是欧拉著作中最杰出的."
5. A. Weil 教授 1979 年在 Rochester 大学的一次讲演中说："今天的学生从欧拉的《无穷分析引论》中所能得到的益处，是现代的任何一本数学教科书都比不上的."

英译者序（节译）

1979年10月，Andre Weil教授在Rochester大学，以欧拉的生平和工作为题，作了一次报告．报告中他向数学界着力陈述的一点是：今天的学生从欧拉的《无穷分析引论》中所能得到的益处，是现代的任何一本数学教科书都比不上的．我查到了该书的法、德、俄三个语种的译本，但查不到英文全译本，就是在这样的背景下，我着手对该书进行翻译的．

欧拉在序言中说得明白，这是一本微积分预备教程．书中有几处，那里的东西只提了一下，把处理留给了微积分，用微积分处理要简单容易许多．凡这种地方书中都有交待．

关于书名，欧拉原文中的无穷（Infinitorum）是复数．看来这复数主要指：无穷级数、无穷乘积和连分式三种无穷．因而书名应译为《有关几种无穷的分析引论》，不顺口，我译它为《无穷分析引论》．

任教于巴塞罗那大学的S．J．Alberto Dou教授将欧拉的很多著作译成了西班牙文，最近译者曾与他谈起过本书．我们就用那次谈话中他的一句话作为这段序言的结束："在欧拉的著作中《无穷分析引论》最为杰出．"

作者序

接触到的学生，他们学习无穷分析之所以遇到困难，往往是由于在必须使用无穷这一陌生概念时，初等代数刚学，尚未登堂入室．虽然无穷分析并不要求初等代数的全部知识和技能，问题是有些必备的东西，初等代数或者完全没讲，或者讲得不够详细．本书力求把这类东西讲得既充分又清楚，求得完全弥补初等代数对无穷分析的不足．书中还把相当多的难点化易，使得读者逐步地、不知不觉地掌握到无穷这一思想，有很多通常归无穷分析处理的问题，本书使用了代数方法．这清楚地表明了分析与代数两种方法之间的关系．

本书分上、下两册，上册讲纯分析，下册讲必要的几何知识，这是因为无穷分析的讲解常常伴以对几何的应用．别的书中都讲的一般知识本书上、下册都不讲．本书所讲是别处不讲的，或讲得太粗的，或虽讲但所用方法完全不同的．

整个无穷分析所讨论的都是变量及其函数，因此上册细讲函数，讲了函数的变换、分解和展开为无穷级数．对函数，包括属于高等分析的一些函数进行了分类．首先分函数为代数函数和超越函数．变量经通常的代数运算形成的函数叫代数函数，经别的运算或无穷次代数运算形成的函数叫超越函数．代数函数又分为有理函数和无理函数．对有理函数讲了分解它为因式和部分分式，分解为部分分式之和这种运算在积分学中有着重要应用．对

无理函数给出了用适当的代换变它为有理函数的方法．无理函数和有理函数都可以展开成为无穷级数，但这种展开对超越函数用处最大．无穷级数的理论可用于高等分析，为此增加了几章，用于考察很多无穷级数的性质与和．其中有些级数的和不用无穷分析是很难求出的，其和为对数和弧度的级数就是．对数和弧度是超越量，可通过求双曲线下的和圆的面积确定，主要由无穷分析对它们进行研究．接下去从以底为变量的幂转向了以指数为变量的幂．作为以指数为变量之幂的逆，自然而有成果地得到了对数概念．对数不仅本身有着大量应用，而且由它可得到一般量的无穷级数表示．还讲了造对数表的简单方法．类似地，我们考察了弧度．弧度与对数虽然是两种完全不同的量，但它们却有着如此密切的关系，当一种为虚数形式时，可化为另一种．重复了几何中多倍角和等分角正弦和余弦的求法之后，从任意角的正弦余弦导出了极小角的正弦和余弦，并导出了无穷级数．由此，从趋于消失的角其正弦等于角度，余弦等于半径，我们可以通过无穷级数使任何一个角度等于它的正弦余弦．这里我们得到了如此之多的各种各样的有限的和无穷的这种表达式，以至于无需再对其性质进行研究．对数有着它自己的特殊算法，这种算法应用于整个分析．我们推出了三角函数的算法，使得对三角函数的运算如同对数运算和代数运算一样地容易．从书中有几章的内容可以看出，三角函数算法在解决难题时，其应用范围是何等的广．事实上，这种例子从无穷分析中还可举出很多，日常的数学学习和数学工作中也会遇到很多．

分解分数函数为实部分分式在积分学中有着重要应用，而三角函数算法对分解分式为实部分分式有极大帮助，我们对它进行详细讨论的原因正在于此．接下去的讨论是分数函数展成的无穷级数——递推级数．讨论了它的和、通项和另外一些重要性质．递推级数考虑的是因式乘积的倒数，我们也考虑了展多因式，甚

至无穷个因式的乘积为级数．这不仅可导致对无穷多个级数的研究，而且利用级数可表示成无穷乘积，我们找到了一些方便的数值表达式，用这些表达式可以容易地计算出正弦、余弦和正切的对数，利用展因式乘积为级数，我们推出了许多有关拆数为和这类问题的解．倘不利用这一点看来分析对拆数为和是无能为力的．

本书涉及方面之广，完全可以写成几册书，因而我们力求简单明了，把最基本的东西解释得尽量清楚，而把进一步展开留给读者，使读者有机会驰骋自己的才能，自己来进一步发展分析．我坦率地告诉读者，本书含有许多全新的东西，并且从本书的很多地方可以得到重要的进一步的发现．

下册讨论的问题，一般地说都属于高等几何，处理方法同于上册．一般教科书讲这一部分时都从圆锥曲线开始，本书先讲曲线的一般理论，再讲圆锥曲线，为的是能够应用曲线理论去研究任何一种曲线．本书利用描述曲线的方程，而且只用这种方程来研究曲线．曲线的形状和基本性质都从方程推出．我觉得这种处理方法的优越性，在圆锥曲线上表现得最突出．即或有人对它应用分析方法，那也是显得生硬、不自然的．我们先从二阶曲线的一般方程解释了二阶曲线的一般性质．接下去根据有无伸向无穷的分支，也即是否界于某个有限区域之中，对二阶曲线进行了分类．对于无穷分支，我们进一步考虑分支的条数，并考虑各条分支有无渐近线．这样我们得到了通常的三种圆锥曲线．第一种是椭圆，它界于一个有限区域之中；第二种是双曲线，它有四条伸向无穷的分支，趋向两条渐近线；第三种是抛物线，有两条伸向无穷的分支，没有渐近线．

接下去，对三阶曲线用类似的方法，阐述了其一般性质，并将它分为 12 类，事实上是把牛顿的 72 种划分成了 12 类．对这一方法我们的描述是充分的，不难用它对更高阶曲线进行分类．

书中用它对四阶曲线进行了分类.

在分阶进行考察之后，我们转向了寻求曲线的共同性质. 讲了曲线的切线和法线的定义方法，也讲了用密切圆半径表示的曲率. 虽然这些问题现在一般都用微积分来解决，但本书只在通常代数的基础上对它进行讨论，为的是使读者能够比较容易地从有穷分析过渡到无穷分析. 我们也对曲线的拐点、尖点、二重点和多重点进行了研究. 讲了如何从方程求出这些点，求法都不难. 但我不否认用微分学的方法来求更容易. 我们也讲到了关于二阶尖点这有争论的问题. 二阶尖点，即有同朝向的两段弧收敛于它的尖点. 我们讨论的深度不越出看法一致的范围.

加写了几章，用来讨论具有某些性质的曲线的求法. 最后给出了与圆有关的几个问题的解.

几何中有几部分是学习无穷分析所必备. 有鉴于此，我们添上了一个附录，用计算的方式讲立体几何中有关立体和曲面的一些知识. 讲了如何用三元方程表达曲面的性质，然后照曲线那样，根据方程的阶数将曲面分了类，并证明了只有一阶曲面才是平面. 根据它伸向无穷的部分将二阶曲面分成了六类. 对更高阶的曲面也可以用类似的方式进行分类. 我们对两个曲面的交线进行了讨论. 交线多数都不在一个平面上，我们讲了如何用方程表示交线. 最后对曲面的切线和法面进行了一些讨论.

这里申明一点，书中很多东西是别人已经得到了的，恕我没有一一指出. 本书力求简短，如果对问题的历史进行讨论，那将突破本书的篇幅限制. 作者可聊以自慰的是，对别人已经得到了的东西，其中很多本书是用另一种方法进行讨论的. 很希望多数读者从方法新和全新特别是全新的东西中得到益处.

目　录

第一章

函　数

§ 1

常量是固定的保持不变的量.

常量可以取定一个数值，一旦取定即保持常值不变. 在需要用符号表示常量时，使用拉丁字母表中开始部分的字母 a，b，c 等. 这是分析与代数的不同. 代数的考察对象是固定的量，在代数中 a，b，c 等代表已知数，x，y，z 等代表未知数. 而分析中前者代表常量，后者代表变量.

§ 2

变量是不确定的，是可以取不同数值的量.

确定的量都只可以是一个数，变量可以取每一个数. 也即确定的量，或者常量与变量的关系有如单个事物与一类事物. 一类事物包含这类事物的每一个，变量包含每一个确定的量. 变量通常用拉丁字母表中结尾部分的字母 x，y，z 等表示.

§ 3

指定变量为某个确定的值，它就成了常量.

变量可以取任何数，因而它的确定方式是无穷的. 取不遍所有确定的数，这变量就依然是变量，不是常量. 这样变量就包容着正数和负数、整数和分数、无理数和超越数等这一切数. 零和虚数也一样地在它的取值范围之中.

§ 4

变量的函数是变量、常量和数用某种方式联合在一起的解析表达式.

只含一个变量 z，余者都为常量，这样的解析表达式叫做 z 的函数. 表达式

$a+3z$，$az-4z^2$，$az+b\sqrt{a^2-z^2}$，c^z

等就都是 z 的函数.

§ 5

变量的函数本身也是一个变量.

可以用任何一个确定的值来代替变量，因而函数可以取无穷多个值. 又由于变量可以取虚数值，因而函数可以取任何值. 例如，函数$\sqrt{9-z^2}$，如果限制 z 只取实数值，那么$\sqrt{9-z^2}$就取不到大于 3 的值. 如果允许 z 取虚数值，那就没有$\sqrt{9-z^2}$取不到的值. 例如，可以让 z 取 $5\sqrt{-1}$. 但有时会遇到只是象函数的函数，不管变量取什么值，它总保持为常数. 例如

$$z^0,\ 1^z,\ \frac{a^2-az}{a-z},$$

它们样子象函数，但实际上都是常量.

§ 6

函数由变量与常量联合而成. 函数之间的基本区别就在于这联合方式.

联合方式决定于运算，运算规定量之间的关系. 这运算首先是代数运算，即加、减、乘、除、乘方和开方，以及解方程. 其次是超越运算，即指数运算，对数运算，以及积分学提供的大量其他运算等.

这里指出两种简单的函数，一种是倍数，例如

$$2z,\ 3z,\ \frac{3}{5}z,\ az\ 等.$$

再一种是幂，例如

$$z^2,\ z^3,\ z^{\frac{1}{2}},\ z^{-1}等.$$

它们都只含有单一的一种运算. 下面我们对包含多于一种运算的表达式加以分类，并赋于每类一个名称.

§ 7

函数分为代数函数和超越函数，前者只含代数运算，后者含有超越运算.

z 的倍数，z 的幂以及由前面所说的代数运算形成的任何一个表达式，例如

$$\frac{a+bz^n-c\sqrt{2z-z^2}}{a^2z-3bz^3}$$

都是代数函数，代数函数常常不能显式表出．例如由方程

$$Z^5 = az^2Z^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$$

确定的 z 的函数 Z 就不能显式表出．虽然这个方程解不出，但可以肯定这个 Z 等于 z 和常数构成的某个表达式，因而这个 Z 是 z 的函数．关于超越函数要指出的一点是，超越运算必须作用于变量．如果超越运算只作用于常量，这样的函数依旧是代数函数．例如，记半径为 1 的圆的周长为 c，这 c 是个超越量．对这个超越量 c，表达式

$$c + z, \ cz^2, \ 4z^c$$

等仍然是代数函数．有人对 z^c 是否为代数函数提出疑问，也有人认为指数为无理数的幂，如 $z^{\sqrt{2}}$，不该归入代数函数，并给它们起了个名字叫半超越函数．这都无关紧要．

§ 8

代数函数又分为有理函数和无理函数．有理函数其变量不受根号作用，无理函数其变量受到根号的作用．

有理函数只含有加、减、乘、除和整数次的乘方运算．如

$$a + z, \ a - z, \ az, \ \frac{a^2 + z^2}{a + z}, \ az^3 - bz^5$$

等就都是 z 的有理函数．而表达式

$$a + \sqrt{a^2 - z^2}, \ (a - 2z + z^2)^{\frac{1}{3}}, \ \frac{a^2 - z\sqrt{a^2 + z^2}}{a + z}$$

就都是无理函数．

无理函数又分为显式的和隐式的．显式无理函数，如我们刚举出的例子，是可以用根号表示出来的．隐式无理函数是从方程产生的．例如，方程

$$Z^7 = azZ^2 - bz^5$$

确定的 Z 就是 z 的隐式函数. 代数理论还没有达到能够从该方程求出 Z 的显式表达式这样的完善程度，允许使用根号也不行.

§ 9

有理函数又分为整函数和分数函数.

分母中不含变量 z，且变量 z 的指数中没有负数，这样的有理函数叫整函数. 分母中含有 z，或者 z 的指数中有负数，这样的有理函数叫分数函数. 整函数的一般形状为

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \cdots$$

凡整函数都在该表达式之中. 由于几个分数可以合成为一个分数，所以分数函数的形状都为

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \cdots}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \zeta z^5 + \cdots}$$

这里须指出一点，常量 a，b，c，d，…和 α，β，γ，δ，…可为正数，可为负数；可为整数，可为分数；可为无理数，甚至可为超越数. 这都不影响该表达式为分数函数.

§ 10

接下来我们考虑单值函数和多值函数.

单值函数指，从变量 z 的每一个值都只得到一个确定的函数值；多值函数指，从变量 z 的每一个值都可以得到多于一个确定的函数值. 有理函数中的整函数和分数函数都是单值函数，因为这类表达式，每一个 z 值都只产生一个函数值. 无理函数都是多值的，根号给出两个值. 超越函数就不同了，有单值的，也有多值的，甚至有无穷多值的. 反正弦函数就是无穷多值的，其变量 z 的每一个值都对应无穷多个角度.

我们用字母 P，Q，R，S，T 等表示 z 的单值函数.

§ 11

二值函数，指从每一个 z 值都得到函数 Z 的两个值.

平方根，例如$\sqrt{2z+z^2}$，就是二值函数．对每一个 z 值，表达式$\sqrt{2z+z^2}$都有一正一负两个值．一般地，如果 Z 由二次方程

$$Z^2 - PZ + Q = 0$$

确定，它就是一个二值函数．当然，这里假定 P，Q 都是 z 的单值函数..从这个二次方程我们得到

$$Z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{(1/4)\ P^2 - Q}$$

也即每一个确定的 z 值都对应两个确定的 Z 值．须指出，Z 的两个值必定同为实数或同为虚数，而且由方程的知识我们知道：这两个值，和等于 P，积等于 Q.

§ 12

三值函数，指每一个 z 值都给出函数的三个确定的值.

三次方程的解就是一个三值函数．如果 P，Q，R 是 z 的单值函数，且

$$Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0,$$

那么 Z 就是 z 的三值函数，因为从 z 的任何一个值都能得到 Z 的三个值．Z 的这三个值，必定或者全为实数，或者一实两虚，且这三个值，和等于 P，积等于 R，两个两个之积的和等于 Q.

§ 13

四值函数，指每一个 z 值都给出函数的四个确定的值.

四次方程的解就是一个四值函数. 如果 P, Q, R, S 都是 z 的单值函数，且

$$Z^4 - PZ^3 + QZ^2 - RZ + S = 0,$$

那么 Z 就是 z 的四值函数，因为 z 的每一个值都对应 Z 的四个值. 这四个值，或者都是实的，或者两实两虚，或者都是虚的. 而且这四个值，和等于 P，积等于 S，两个两个之积的和等于 Q，三个三个之积的和等于 R. 类似地可以定义五值函数、六值函数，等等.

§ 14

这样一来，如果 Z 由方程

$$Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - \cdots = 0$$

确定，那么 Z 就是 z 的 n 值函数，从 z 的每一个值都可以得到 Z 的 n 个值.

这里应该指出，n 必须为整数. 也即要知道 Z 是 z 的几值函数，应先化 Z 的方程为有理形式，这时 Z 的最高次幂的次数为几，Z 就是 z 的几值函数，从 z 的每一个值就可以得到 Z 的几个值. 还应记住，P, Q, R, S, …都应该是单值函数. 如果其中某一个是多值的，那么从 z 的每一个值，得到的 Z 值的个数，将比 P, Q, R, S…都是单值函数时多很多. Z 值中虚数的个数必定为偶数. 由此我们得到，如果 n 为奇数，则 Z 的值中至少有一个是实的，如果 n 是偶数，Z 可以没有实值.

§ 15

如果 z 的多值函数 Z 恒有并且只有一个实值，那么这个 Z 就可以被看成单值函数，并且在多数情况下就可以当作单值函数来使用.

$$\sqrt[3]{P},\ \sqrt[5]{P},\ \sqrt[7]{P},\ \cdots$$

就是这样的函数，P 为 z 的单值函数时，它们都给出并且只给出一个实值，其余的值都是虚的. 因此状如 $P^{\frac{m}{n}}$ 的函数，不管 m 为奇数还是偶数，只要 n 是奇数，就可以当做单值函数. 如果 n 为偶数，那么 $P^{\frac{m}{n}}$ 或者没有实根，或者有两个实数. 因此 n 为偶数时，表达式 $P^{\frac{m}{n}}$ 可以被当做二值函数. 这里要求 $\frac{m}{n}$ 为最简分数.

§ 16

如果 y 是 z 的函数，那么 z 就也是 y 的函数.

y 是 z 的函数，不管单值的还是多值的，那就有一个方程. 通过这个方程，y 由 z 和常量决定. 通过这同一个方程，z 也可以由 y 和常量决定. 这样 z 就可以等于由 y 和常量构成的表达式. 这就是说 z 是 y 的函数. 并且我们也可以得出从一个 y 值能确定几个 z 值. 可以有这样的情形，y 是 z 的单值函数，但 z 是 y 的多值函数. 例如 y，z 通过方程 $y^3 = ayz - bz^2$ 相联系时，y 是 z 的三值函数，而 z 是 y 的二值函数.

§ 17

如果 y 和 x 都是 z 的函数，那么 y 和 x 就也互为对方的函数.

y 是 z 的函数，从而 z 也是 y 的函数；类似地 z 也是 x 的函数. 这两个函数 z 相等，由此得到一个关于 x，y 的方程. 通过这个方程，y 和 x 可互由对方表出，也即互为对方的函数. 由于代数技巧的不足，两个函数 z 往往都不是显式的，但这并不影响它们相等这一性质. 再者，给定两个方程，一个含 y 和 z，一个含 x 和 z，那么用传统的方法消去 z，我们就也得到一个表示 x 和 y 之间关系的方程.

§ 18

下面我们考虑特殊的几类函数. 先考虑偶函数. z 取 $+k$ 和 $-k$ 时，函数值相等的函数叫偶函数.

z^2 就是 z 的一个偶函数. $z=k$ 和 $z=-k$ 时，表达式 z^2 的值相同，都是 $z^2=k^2$. 类似地，z^4，z^6，z^8，一般地，只要 m 为偶数，不管为正为负，幂 z^m 都为偶函数. 再者，由于当 n 为奇数时，可以把 $z^{\frac{m}{n}}$ 当做单值函数，所以 m 为偶数 n 为奇数时，$z^{\frac{m}{n}}$ 是偶函数. 进一步，由偶次幂以任何方式组成的函数仍然是偶函数，例如

$$Z=a+bz^2+cz^4+dz^6+\cdots,$$

$$Z=\frac{a+bz^2+cz^4+dz^6+\cdots}{\alpha+\beta z^2+\gamma z^4+\delta z^6+\cdots}$$

都是 z 的偶函数. 对分数指数也类似，

$$Z=a+bz^{\frac{2}{3}}+cz^{\frac{2}{5}}+dz^{\frac{4}{7}}+\cdots,$$

$$Z = a + bz^{-\frac{2}{3}} + cz^{-\frac{4}{3}} + dz^{-\frac{2}{5}} + \cdots,$$

$$Z = \frac{a + bz^{\frac{2}{7}} + cz^{-\frac{4}{5}} + dz^{\frac{8}{3}}}{\alpha + \beta z^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{-\frac{2}{5}} + \delta z^{\frac{4}{7}}}$$

都是 z 的偶函数. 而且这类表达式全是单值函数, 因而也称它们为单值偶函数.

§ 19

$z = +k$ 和 $z = -k$ 时取值完全相同的多值函数称为多值偶函数.

含 Z 和 z 的方程, Z 的最高次数为几, Z 就是 z 的几值函数. 如果 z 的次数都是偶数, 那么这种方程确定的就是 Z 的多值偶函数. 如果

$$Z^2 = az^4 Z + bz^2,$$

那么 Z 就是 z 的二值偶函数; 如果

$$Z^3 - az^2 Z^2 + bz^4 Z - cz^8 = 0,$$

那么 Z 就是 z 的三值偶函数. 如果 P, Q, R, S, T 等表示 z 的单值偶函数, 那么

$$Z^2 - PZ + Q = 0$$

确定的 Z 就是 z 的二值偶函数;

$$Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$$

确定的 Z 就是 z 的三值偶函数, 类推.

§ 20

可见由常量和变量 z 构成的偶函数, 不管单值的还是多值的, z 的次数都必须是偶数.

我们已经举过一些这样的单值函数的例子，再如，表达式

$$a+\sqrt{b^2-z^2},\quad az^2+\sqrt[3]{a^6z^4-bz^2},\quad az^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{z^2+\sqrt{a^4-z^4}}$$

等也是这样的函数.

因而可定义偶函数为 z^2 的函数.

如果 $y=z^2$，而 Z 是 y 的函数，那么换 y 为 z^2，Z 就成了指数全为偶数的 z 的函数. 须指出，作为 y 的函数，Z 中不能含有 $\sqrt{y}$ 或类似于 $\sqrt{y}$ 的，使得换 y 为 z^2 时产生 z 的奇次幂. 例如 $y+\sqrt{ay}$ 是 y 的函数，但换 y 为 z^2，它成为 $z^2+z\sqrt{a}$，不是 z 的偶函数. 排除掉这种情况，我们做成的偶函数就都是 z^2 的函数. 这定义既适用又便于构成偶函数.

§ 21

换 z 为 $-z$ 时，其值变号的函数叫 z 的奇函数.

z 的奇次幂 z^1，z^3，z^5，z^7，…及 z^{-1}，z^{-3}，z^{-5}，…都是 z 的奇函数. 当 m，n 都是奇数时，$z^{\frac{m}{n}}$ 也是奇函数. 更一般地，由这类幂组成的表达式，如

$$az+bz^3,\quad az+az^{-1}$$

及

$$z^{\frac{1}{3}}+az^{\frac{3}{5}}+bz^{-\frac{5}{3}}$$

等都是 z 的奇函数. 奇函数的形成及性质的获得都可以比照着偶函数进行.

§ 22

z 的偶函数乘上 z 或 z 的任何一个奇函数，得到的积为 z 的

奇函数.

设 P 是 z 的偶函数，则换 z 为 $-z$ 时，P 的值不变，这时换 Pz 的 z 为 $-z$ 得 $-Pz$，即 Pz 是奇函数．现在设 P，Q 分别为 z 的偶函数和奇函数，由定义知，换 z 为 $-z$ 时，P 的值不变，Q 的值变为 $-Q$．因而，换 PQ 的 z 为 $-z$ 时，其值变为 $-PQ$，即 PQ 是奇函数．例如 $a+\sqrt{a^2+z^2}$ 是偶函数，z^3 是奇函数，所以乘积

$$az^3+z^3\sqrt{a^2+z^2}$$

是 z 的奇函数．类似的，

$$z\left(\frac{a+bz^2}{\alpha+\beta z^2}\right)=\frac{az+bz^3}{\alpha+\beta z^2}$$

是 z 的奇函数．从这里的讨论中可以看到，如果函数 P，Q 一奇一偶，则它们的商 $\frac{P}{Q}$ 和 $\frac{Q}{P}$ 都是奇函数.

§ 23

两个奇函数，相乘相除，结果都为偶函数.

设 Q，S 都是 z 的奇函数，那么换 z 为 $-z$ 时，Q 变为 $-Q$，S 变为 $-S$．从而换 z 为 $-z$ 时，积 PQ 和商 $\frac{Q}{S}$ 的值都不变，也即它们都是 z 的偶函数．显然，任何一个奇函数，其平方是偶函数，立方是奇函数，四次方是偶函数，类推.

§ 24

如果 y 是 z 的奇函数，则 z 也是 y 的奇函数.

由 y 是 z 的奇函数我们知道，换 z 为 $-z$ 时，y 变为 $-y$.

现在将这个 z 确定为 y 的函数，那么换 y 为 $-y$ 时，z 必定变为 $-z$，也即 z 是 y 的奇函数. 例如 $y=z^3$，这 y 是 z 的奇函数，解出 z 得 $z^3=y$ 或 $z=y^{\frac{1}{3}}$. 这个 z 是 y 的奇函数. 再如 $y=az+bz^3$，这个 y 是 z 的奇函数. 反之，由方程 $bz^3+az=y$ 得到的由 y 表示的 z，也是 y 的奇函数.

§ 25

如果在确定 y 为 z 的函数的方程里，各项中 y，z 指数之和，同为偶数或同为奇数，则 y 为 z 的奇函数.

在这样的方程中，同时换 z 为 $-z$，换 y 为 $-y$，则各项或者都不变，或者都变为负的. 这两种情况下方程都是不变的. 也即在两种情况下，y 由 z 确定的方式跟 $-y$ 由 $-z$ 确定的方式都是一样的. 因此，z 换为 $-z$ 时，y 就换为 $-y$. 也即 y 是 z 的奇函数. 例如，方程

$$y^2=ayz+bz^2+c,$$

$$y^3+ay^3z=byz^2+cy+dz$$

中的 y 都是 z 的奇函数.

§ 26

如果 Y 是 y 的函数，Z 是 z 的函数，且 Y 同 y 及常数之间的关系跟 Z 同 z 及常数之间，这两种关系完全相同，那么我们就称 Y、Z 是相似函数.

例如，当

$$Z=a+bz+cz^2,\quad Y=a+by+cy^2$$

时，这 Z，Y 就是相似函数. 类似的，在多值函数情况下，当

$$Z^3 = az^2z + b, \quad Y = ay^2Y + b$$

时，这 Z，Y 也是相似函数．由此我们得到，当 y 的函数 Y 与 z 的函数 Z 相似时，换 y 为 z，函数 Y 就变成了函数 Z．这种相似，我们把它说成是 Y 与 y 之间的函数关系同于 Z 与 z 之间的函数关系．变量 y，z 之间有无依赖关系我们都可以使用这种说法．例如，y 的函数

$$ay + by^3$$

相似于 $y+n$ 的函数

$$a(y+n) + b(y+n)^3.$$

这里我们视 $y+n$ 为 z，又 z 的函数

$$\frac{a + bz + cz^2}{\alpha + \beta z + \gamma z^2}$$

相似于 $\frac{1}{z}$ 的函数

$$\frac{az^2 + bz + c}{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}.$$

这里我们视 $\frac{1}{z}$ 为 y．相似函数这一概念在整个高等分析中有着广泛的应用．一元函数的一般知识先讲这些，进一步的解释将在后面的应用中给出．

第二章

函数变换

§ 27

改变函数形式的方法有两种，一种是替换变量，一种是保持原有变量，直接改写表达式.

从代数中我们知道，同一个量可以有不同的表达式. 例如

$$2-3z+z^2;\ a^3+3a^2z+3az^2+z^3;\ \frac{2a^2}{a^2-z^2};\ \frac{1}{\sqrt{1+z^2}-z}$$

可分别改写为

$$(1-z)(2-z);\ (a+z)^3;\ \frac{a}{a-z}+\frac{a}{a+z};\ \sqrt{1+z^2}+z.$$

这改写成的表达式都与原表达式完全等价，不同的只是形式.

变换函数的再一种方法是替换变量，也称为换元，即用另一个变量 y 代替变量 z. 当然，y 与 z 有着一定的关系. 例如，用 y 替换 $a-z$，则 z 的函数 $a^4-4a^3z+6a^2z^2-4az^3+z^4$ 变为 y 的函数 y^4；令 $z=\frac{a^2-y^2}{2y^2}$，则 z 的无理函数 $\sqrt{a^2+z^2}$ 变为 y 的有理函数 $\frac{a^2+y^2}{2y}$. 下一章讨论这种换元变换，本章讨论不换元的改写

去这式变换.

§ 28

将整函数分解成因式，从而将它表示为乘积，这常常带来方便.

分解成因式的整函数，其性质变得明显，一眼就看得出 z 的哪些值使它变为零. 例如将函数

$$6-7z+z^3$$

表示为乘积

$$(1-z)(2-z)(3+z),$$

那么使该函数变为零的三个值显然是 $z=1$, $z=2$ 和 $z=-3$. 但是要从原式 $6-7z+z^3$ 看出这几点性质，可就远非这么容易. 我们用 z 的最高次数来区别因式. 称 z 的最高次数为 1 的因式为线性因式. 线性因式的形状为

$$f+gz.$$

称 z 的最高次数为 2 的因式为二次因式，其形状为

$$f+gz+hz^2.$$

称 z 的最高次数为 3 的因式为三次因式，其形状为

$$f+gz+hz^2+jz^3.$$

类推. 显然，二次因式是两个线性因式的积. 三次因式是三个线性因式的积. 类推，由此可见 z 的最高次数为 n 的整函数含有 n 个线性因式. 这样，即使一个整函数的因式中有二次、三次或更高次的，我们也说得出它的线性因式的总个数.

§ 29

对于 z 的整函数 Z，求出了方程 $Z=0$ 的所有的根，就等于

求出了整函数 Z 的所有线性因式.

如果 $z=f$ 是方程 $Z=0$ 的根，则 $z-f$ 除得尽 Z，也即 $z-f$ 是 Z 的因式. 这样，求出了方程 $Z=0$ 的所有的根

$$z=f,\ z=g,\ z=h$$

等，也就把函数 Z 分解成了线性因式，也就有了 Z 的乘积形式

$$Z=(z-f)(z-g)(z-h)\cdots.$$

这里有一点要注意. 如果 Z 中 z 的最高次幂的系数不是 $+1$，那么乘积 $(z-f)(z-g)\cdots$ 应乘上这个系数才等于 Z. 也即，如果

$$Z=Az^n+Bz^{n-1}+Cz^{n-2}+\cdots,$$

则

$$Z=A(z-f)(z-g)(z-h)\cdots;$$

如果

$$Z=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots,$$

$Z=0$ 的根为 f, g, h, i, $\cdots$, 则

$$Z=A\left(1-\frac{z}{f}\right)\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right)\cdots.$$

反之，如果 z 的函数 Z 有因式 $z-f$ 或 $1-\frac{z}{f}$，那么把 Z 中的 z 换成 f，则因式 $z-f$ 或 $1-\frac{z}{f}$ 变为零，从而函数 Z 变为零.

§ 30

线性因式可实可虚. 如果函数 Z 有虚因式，则虚因式的个数必为偶数.

整函数 Z 的线性因式由方程 $Z=0$ 的根给出，实根给出实因式，虚根给出虚因式. 而方程的虚根个数恒为偶数，因而函数 Z，或者没有虚因式，或者有 2 个，或者有 4 个，或者有 6 个，

等等．如果函数 Z 只有两个虚因式，那么这两个虚因式的积必定是实二次因式．这是因为记全体实因式的积为 P，则这两个虚因式的积 $\frac{Z}{P}$ 必定是实的．同样的，如果函数 Z 有 4 个，6 个或者 8 个虚因式，那么它们的积也恒为实的．因为这每一个积都等于 Z 除上相应的全体实因式的积．

§ 31

如果 Q 是 4 个虚线性因式的实乘积，那么这个 Q 可以表示或两个实二次因式的乘积．

这个 Q 的形状为

$$z^4+Az^3+Bz^2+Cz+D.$$

假定 Q 不能表示或两个实因式的乘积，那么它必定可以表示或形状为

$$z^2-2\left(p+q\sqrt{-1}\right)z+r+s\sqrt{-1}$$

和

$$z^2-2\left(p-q\sqrt{-1}\right)z+r-s\sqrt{-1}$$

这样两个虚二次因式的积．这是因为这两个因式的积必须等于实的 $z^4+Az^3+Bz^2+Cz+D$．从这两个虚二次因式我们得到下面 4 个虚线性因式

Ⅰ．$z-\left(p+q\sqrt{-1}\right)+\sqrt{p^2+2pq\sqrt{-1}-q^2-r-s\sqrt{-1}}$

Ⅱ．$z-\left(p+q\sqrt{-1}\right)-\sqrt{p^2+2pq\sqrt{-1}-q^2-r-s\sqrt{-1}}$

Ⅲ．$z-\left(p-q\sqrt{-1}\right)+\sqrt{p^2-2pq\sqrt{-1}-q^2-r+s\sqrt{-1}}$

Ⅳ. $z-(p-q\sqrt{-1})-\sqrt{p^2-2pq\sqrt{-1}-q^2-r+s\sqrt{-1}}$

为简单起见，我们令

$$t=p^2-q^2-r,\quad u=2pq-s.$$

Ⅰ，Ⅲ相乘，积为

$$z^2-(2p-\sqrt{2t+2\sqrt{t^2+u^2}})\,z+p^2+q^2$$
$$-p\sqrt{2t+2\sqrt{t^2+u^2}}+q\sqrt{-2t+2\sqrt{t^2+u^2}}+\sqrt{t^2+u^2}.$$

是实的. 类似的，Ⅱ，Ⅳ的积

$$z^2-(2p+\sqrt{2t+2\sqrt{t^2+u^2}})\,z+p^2$$
$$+q^2+p\sqrt{2t+2\sqrt{t^2+u^2}}-q\sqrt{-2t+2\sqrt{t^2+u^2}}+\sqrt{t^2+u^2}.$$

也是实的. 这样从我们的假定，Q 不能表示为两个实二次因式出发，推出 Q 也依然能表示成两个实二次因式的乘积.

§ 32

不管 z 的整函数 Z 有多少个虚线性因式，我们都可以把它们配成对，使得每一对的乘积都是实的.

虚根的个数恒为偶数，记为 $2n$. 又虚根对应的全体因式的乘积是实的. 如果只有两个虚根，那么由前一节知它们的积为实；如果有4个虚线性因式，也由前一节知，它们的积可以表示成两个状如 fz^2+gz+h 的实二次因式的积. 虽然这证明方法不能推向更高次，但是不管虚线性因式的个数是多少，它们都具有这种性质是无疑的. 因而可以用 n 个实二次因式代替 $2n$ 个虚线性因式. 这样我们得出了结论：z 的整函数可以表示成实线性因式和实二次因式的乘积. 这里没作严格证明，后面给出的一种严格些的证法，是把状如

$$a + bz^n,\quad a + bz^n + cz^{2n},\quad a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n}$$

等的函数实际地分解成实二次因式.

§ 33

如果 z 的整函数 Z 在 $z = a$ 时取值 A，在 $z = b$ 时取值 B，那么对 A，B 之间的任何一个值 C，a，b 之间都存在一个 c，使得 $z = c$ 时，Z 取值为 C.

Z 是 z 的单值函数，对 z 的每一个实值，Z 都有一个实值与之对应．我们这里，$z = a$ 时，Z 取值 A；$z = b$ 时，Z 取值 B，函数 Z 从 A 变到 B 的过程不能跳过 A，B 之间的任何一个值．如果方程 $Z - A = 0$，$Z - B = 0$ 各有一个实根，那么对 A，B 之间的任何一个值 C，方程 $Z - C = 0$ 就也有一个实根.

因此，如果表达式 $Z - A$，$Z - B$ 各有一个实线性因式，那么对 A，B 之间的任何一个 C，表达式 $Z - C$ 就也有一个实线性因式.

§ 34

如果整函数 Z 中 z 的最大指数是奇数，记作 $2n + 1$，那么，函数 Z 至少有一个实线性因式.

这个 Z 的形状显然为

$$z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \gamma z^{2n-2} + \cdots.$$

$z = \infty$ 时，与第一项相比，其他项都可忽略，我们有 $Z = (\infty)^{2n+1} = \infty$，从而 $Z - \infty$ 有实线性因式 $z - \infty$．类似地，$z = -\infty$ 时，$z = (-\infty)^{2n+1} = -\infty$，从而 $z + \infty$ 有实线性因式 $z + \infty$．由 $Z - \infty$ 和 $Z + \infty$ 都有实线性因式，知 $Z + C$ 也必有线性因式，只要 C 在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 之间，也即 C 可以是任何一个实数，

或正，或负，或者为零．因此 $C=0$ 时，函数 Z 有实线性因式 $z-c$，数 c 在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 之间，它或正，或负，或者为零．

§ 35

如果整函数 Z 中 z 的最大指数是奇数，那么，Z 的实线性因式的个数，必定或为1，或为3，或为5，或为7，等等．

前节证明了，这个 $2n+1$ 次整函数 Z 至少有一个实线性因式 $z-c$．如果 Z 有另一个因式 $z-d$，那么，用 $(z-c)(z-d)$ 除 Z 得到的商，是 $2n-1$ 次整函数．由前节知，这商至少有一个实线性因式．即 Z 的实线性因式个数，如果多于1，那它至少是3个．类似地，如果多于3个，那它至少是5个，类推，我们得到奇次整函数的实线性因式个数为奇数．而这个 Z 的线性因式总个数为 $2n+1$，也为奇数，可见它的虚线性因式的个数为偶数．

§ 36

z 的最大指数为偶数 $2n$ 的整函数 Z，其实线性因式的个数，必定或为2，或为4，或为6，等等．

假定这个 Z 有 $2m+1$ 个实线性因式，$2m+1$ 是奇数，那么，用这 $2m+1$ 个因式的积除 Z，得到的商中 z 的最大指数是 $2n-2m-1$，这是个奇数．因而这个商，从而 Z 有另外一个实线性因式．即 Z 的实线性因式个数为 $2m+2$，为偶数．加上前节的结论，我们又一次证明了整函数的虚根个数为偶数．

§ 37

如果函数 Z 中 z 的最大指数为偶数，且常数 A 的符号为负，那么，这个 Z 至少有两个实线性因式.

这里的这个 Z 形状为

$$z^{2n} \pm \alpha z^{2n-1} \pm \beta z^{2n-2} \pm \cdots \pm \gamma z - A.$$

前面讲过，令 $z=\infty$，则 $Z=\infty$，这里令 $z=0$，则 $Z=-A$. 因而 $Z-\infty$ 有实因式 $z-\infty$；$Z+A$ 有因式 $z-0$. 从而由 0 位于 $-\infty$ 与 A 之间，知 $Z+0$ 必有实线性因式 $z-c$，c 在 0 与 ∞ 之间. 又由 $z=-\infty$ 时，$Z=\infty$，得 $Z-\infty$ 有因式 $z+\infty$，$Z+A$ 有因式 $z+0$. 这样，我们得到 $Z+0$ 有实线性因式 $z+d$，d 在 0 与无穷之间. 命题得证. 我们得到了：对于这里的 Z，方程 $Z=0$ 至少有两个实根，一正一负. 例如，方程

$$z^4+\alpha z^3+\beta z^2+\gamma z-\alpha^2=0$$

就有一正一负两个实根.

§ 38

分数函数，如果分子中 z 的最高次数比分母中的不小，那么，这个分数函数可以表示成一个整函数与一个新的分数函数这样两部分的和. 这个新的分数函数，分子中 z 的最高次数比分母中的小.

如果分母中 z 的最高次数比分子中的小，那么用分母按通常的方法除分子，除到商中的幂要为负数时停止. 这个商就由一个整函数和一个分数函数组成，且分数函数分子中 z 的最高次数比分母的低. 例如对分数函数 $\frac{1+z^4}{1+z^2}$，作除法，得

$$\frac{1+z^4}{1+z^2}=z^2-1+\frac{2}{1+z^2}.$$

仿照算术，我们称分子次数比分母次数不小的分数函数为假分数函数，以区别于分子次数小于分母次数的真分数函数．从而本节所讲可陈述为假分数函数可表示成一个整函数与一个真分数函数的和．新的表示用通常的除法得到．

§ 39

分母是两个互质因式乘积的分数函数，可分解成分别以这两个因式为分母的两个分数函数之和．

虽然这里的分解方法对真假分数函数都适用，但我们主要是把它用于真分数函数，即可以把分母是两个互质因式的真分数函数，分解成分别以这两个因式为分母的两个新的真分数函数之和，且分法唯一．我们只举例，不证明，从例子完全可以看清．考虑分数函数

$$\frac{1-2z+3z^2-4z^3}{1+4z^4}$$

它的分母 $1+4z^4$ 等于乘积

$$(1+2z+2z^2)\ (1-2z+2z^2)$$

我们要做的是，把该函数分解成分别以 $1+2z+2z^2$ 和 $1-2z+2z^2$ 为分母的两个分数函数的和．为了求出这两个真分数函数，我们假定它们的分子分别为 $\alpha+\beta z$ 和 $\gamma+\delta z$．根据假定我们有

$$\frac{1-2z+3z^2-4z^3}{1+4z^4}=\frac{\alpha+\beta z}{1+2z+2z^2}+\frac{\gamma+\delta z}{1-2z+2z^2}.$$

把右端的两个分数函数加起来，结果得

分子为	分母为
$\alpha-2\alpha z+2\alpha z^2+\beta z-2\beta z^2+2\beta z^3$ $+\gamma+2\gamma z+2\gamma z^2+\delta z+2\delta z^2+$ $2\delta z^3$	$1+4z^4$

求得的和，其分母与原分数函数的相等，因而分子也应相等．由于未知数（即 α，β，γ，δ）的个数与分子的项数相等，我们唯一地得到如下的四个方程

1）$\alpha+\gamma=1$

2）$-2\alpha+\beta+2\gamma+\delta=-2$

3）$2\alpha-2\beta+2\gamma+2\delta=3$

4）$2\beta+2\delta=-4$．

1）、4）分别给出 $\alpha+\gamma=1$ 和 $\beta+\delta=-2$．由 2）和 4）得 $\alpha-\gamma=0$，由 1）和 3）得 $\delta-\beta=1$．最后我们得到

$$\alpha=\frac{1}{2}，\gamma=\frac{1}{2}，\beta=-\frac{5}{4}，\delta=-\frac{3}{4}.$$

从而函数

$$\frac{1-2z+3z^2-4z^3}{1+4z^4}$$

分解成了

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z}{1+2z+2z^2}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z}{1-2z+2z^2}.$$

由于引进的未知数的个数恒等于分子的项数，所以一定求得出我们所要的解．但要记住一点，一个前提是分母的因式必须是互质的．

§ 40

分数函数$\frac{M}{N}$可以分解成N的不相同线性因式个数那么多个，状如$\frac{A}{p-qz}$的简分式.

设分数函数$\frac{M}{N}$为真分数函数，即M、N都是整函数，且M的次数比N的小，那么当N分解成了不相同线性因式时，表达式$\frac{M}{N}$就可以分解成N的不相同线性因式个数那么多个分式，因为每一个因式都是一个部分分式的分母. 因此，如果$p-qz$是N的一个因式，它必定是一个部分分式的分母，而这个分式分子的次数应该小于分母$p-qz$的次数，所以分子应该是常数. 从而我们得到分母$p+qz$对应的简分式为$\frac{A}{p-qz}$. 这种分式全体的和等于分数函数$\frac{M}{N}$.

例：我们考虑分数函数

$$\frac{1+z^2}{z-z^3},$$

分母的线性因式为z，$1-z$和$1+z$. 该函数可分解为三个简分式

$$\frac{A}{z}+\frac{B}{1-z}+\frac{C}{1+z}=\frac{1+z^2}{z-z^3},$$

作为分子的常数A、B、C待定. 求这三个简分式的和，得公分母为$z-z^3$. 由分子的和应该等于$1+z^2$，我们得到方程

$$\left.\begin{array}{r} A+Bz-Az^2 \\ +Cz+Bz^2 \\ -Cz^2 \end{array}\right\}=1+z^2=1+0\cdot z+z^2.$$

比较两端，得到关于未知数 A、B、C 的方程

1) $A=1$

2) $B+C=0$

3) $-A+B-C=1$,

方程的个数与未知数的个数相等．代 1) 入 3) 得 $B-C=2$，从而

$$A=1,\ B=1,\ C=-1.$$

这样我们得到

$$\frac{1+z^2}{z-z^3}$$

的分解式为

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1+z}.$$

不管分数函数 $\frac{M}{N}$ 的分母 N 有多少个线性因式，只要它们都不相同，就都可以用这样的方式把它分解为分母因式个数那么多个简分式．如果分母的因式中有相同的，那时的分解方法与这里的不同，这后面讲．

§ 41

分母 N 的每一个线性因式都给出分数函数 $\frac{M}{N}$ 分解式的一个简分式．这一节我们讲这单个简分式的求法．

设 $p-qz$ 是 N 的一个线性因式，即

$$N=(p-qz)\,S,$$

这里 S 是 z 的整函数．记 $p-qz$ 和 S 所对应的分式分别为 $\frac{A}{p-qz}$ 和 $\frac{P}{S}$，那么由 § 39 我们有

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{p-qz}+\frac{P}{S}=\frac{M}{(p-qz)\ S}.$$

从而

$$\frac{P}{S}=\frac{M-AS}{(p-qz)\ S}.$$

由该等式知$\frac{M-AS}{p-qz}$等于P，即$p-qz$是$M-AS$的因式．由此知$z=\frac{p}{q}$时$M-AS$为零，也即将M和S中的z换为$\frac{p}{q}$时$M-AS=0$，从而$A=\frac{M}{S}$．这样我们得到了分式$\frac{A}{p-qz}$的分子A，等于$z=\frac{p}{q}$时$\frac{M}{S}$的值．当$\frac{M}{N}$的分母N分解成了不同的线性因式时，求出对应于这每一个因式的简分式，分式$\frac{M}{N}$就等于这些简分式的和．

例：考虑上节举过的例子

$$\frac{1+z^2}{z-z^3},$$

这里$M=1+z^2$，$N=z-z^3$．取线性因式z，则$S=1-z^2$．$z=0$时，$A=\frac{1+z^2}{1-z^2}=1$，简分式为$\frac{1}{z}$；取因式$1-z$，则$S=z+z^2$．$1-z=0$时，$A=\frac{1+z^2}{z+z^2}=1$，简分式为$\frac{1}{1-z}$；取因式$1+z$，则$S=z-z^2$．$1+z=0$时，$A=\frac{1+z^2}{z-z^2}=-1$，简分式为$\frac{-1}{1+z}$．最后得

$$\frac{1+z^2}{z-z^3}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1+z},$$

与上节求得的结果一致．

§ 42

P的次数小于$(p-qz)^n$的次数时，分数函数$\frac{P}{(p-qz)^n}$可分

解为部分分式的和

$$\frac{A}{(p-qz)^n}+\frac{B}{(p-qz)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qz)^{n-2}}+\cdots+\frac{K}{p-qz},$$

这里的分子全都是常数.

由 P 的次数小于 n, 知 P 的形状为

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\cdots+\chi z^{n-1},$$

共 n 项. P 应该等于部分分式和的分子. 部分分式和的分母为 $(p-qz)^n$, 分子为

$$A+B(p-qz)+C(p-qz)^2+D(p-qz)^3+\cdots+K(p-qz)^{n-1}.$$

这分子的次数为 $n-1$, 未知数 (即 A, B, C, …, K) 的个数为 n, 与 P 的项数相同. 这样由

$$\frac{P}{(p-qz)^n}=\frac{A}{(p-qz)^n}+\frac{B}{(p-qz)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qz)^{n-2}}+\frac{D}{(p-qz)^{n-3}}+\cdots+\frac{K}{(p-qz)}$$

我们可以求出 A, B, C, …. 下面我们讲它们的求法.

§ 43

对应于因式 $(p-qz)^2$ 的部分分式的求法.

§ 41 讲了对应于不相重线性因式的部分分式的求法. 现在我们假定分母 N 有相同的两个线性因式, 即有因式 $(p-qz)^2$. 上一节告诉我们, 对应于该因式的部分分式形状为

$$\frac{A}{(p-qz)^2}+\frac{B}{p-qz}.$$

记

$$N=(p-qz)^2S,$$

则

$$\frac{M}{N}=\frac{M}{(p-qz)^2S}=\frac{A}{(p-qz)^2}+\frac{B}{p-qz}+\frac{P}{S},$$

$\frac{P}{S}$是对应于分母其余因式的部分分式的总和．由上面等式得

$$\frac{P}{S}=\frac{M-AS-B\ (p-qz)\ S}{(p-qz)^2S}$$

从而

$$P=\frac{M-AS-B\ (p-qz)\ S}{(p-qz)^2}=\text{整函数}.$$

由此得知 $(p-qz)^2$ 为 $M-AS-B\ (p-qz)\ S$ 的因式．当然 $p-qz$ 也为它的因式．因此 $p-qz=0$，也即 $z=\frac{p}{q}$ 时 $M-AS-B\ (p-qz)\ S=0$，从而 $M-AS=0$，

$$A=\frac{M}{S}.$$

也即 A 等于 $z=\frac{p}{q}$ 时 $\frac{M}{S}$ 的值．A 有了，我们再来求 B．由 $M-AS-B\ (p-qz)\ S$ 被 $(p-qz)^2$ 除得尽，知 $p-qz$ 为 $\frac{M-AS}{p-qz}-BS$ 的因式．从而 $z=\frac{p}{q}$ 时

$$\frac{M-AS}{p-qz}=BS.$$

由此得

$$B=\frac{M-AS}{(p-qz)\ S}=\frac{1}{p-qz}\ (\frac{M}{S}-A).$$

要指出的是，因为 $M-AS$ 被 $p-qz$ 除得尽，所以应先做除法，然后再将 z 换为 $\frac{p}{q}$．或者，令

$$\frac{M-AS}{p-qz}=T,$$

则 B 等于 $z=\frac{p}{q}$ 时 $\frac{T}{S}$ 的值．

求出 A，B，我们就可以写出对应于因式 $(p-qz)^2$ 的部分分式

$$\frac{A}{(p-qz)^2}+\frac{B}{p-qz}.$$

例 1　考虑分数函数

$$\frac{1-z^2}{z^2(1+z^2)}.$$

这里二重因式为 z^2，$S=1+z^2$，$M=1-z^2$. 记 z^2 产生的部分分式为

$$\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z},$$

则

$$A=\frac{M}{S}=\frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

置 $z=0$，得

$$A=1.$$

又 $M-AS=-2z^2$. 除它以线性因式 z，得 $T=-2z$. 从而

$$B=\frac{T}{S}=\frac{-2z}{1+z^2}.$$

置 $z=0$，得

$$B=0.$$

这样由 z^2 产生的是一个单个的部分分式 $\frac{1}{z^2}$.

例 2　考虑分数函数

$$\frac{z^3}{(1-z)^2(1+z^4)}.$$

二重因式为 $(1-z)^2$，它产生的部分分式形状为

$$\frac{A}{(1-z)^2}+\frac{B}{1-z}.$$

这里 $M=z^3$，$S=1+z^4$.

$$A=\frac{M}{S}=\frac{z^3}{1+z^4}.$$

置 $1-z=0$，即 $z=1$，得

$$A=\frac{1}{2}.$$

又

$$M-AS=Z^3-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z^4=-\frac{1}{2}+z^3-\frac{1}{2}z^4.$$

除它以 $1-z$，得

$$T=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z^3.$$

从而

$$B=\frac{T}{S}=\frac{-1-z-z^2+z^3}{2+2z^4},$$

置 $z=1$，得

$$B=\frac{-1}{2}.$$

所求部分分式为

$$\frac{1}{2\ (1-z)^2}-\frac{1}{2\ (1-z)}.$$

§ 44

再讲对应于因式 $(p-qz)^3$ 的部分分式的求法．即分数函数 $\frac{M}{N}$的对应于 N 的因式 $(p-qz)^3$ 的部分分式

$$\frac{A}{(p-qz)^3}+\frac{B}{(p-qz)^2}+\frac{C}{p-qz}$$

的求法．

记

$$N=\ (p-qz)^3S,$$

记 S 产生的分式为$\frac{P}{S}$，则

$$P=\frac{M-AS-B\ (p-qz)\ S-C\ (p-qz)^2S}{(p-qz)^3}=\text{整函数}.$$

因而 $M-AS-B\ (p-qz)\ S-C\ (p-qz)^2S$ 被 $p-qz$ 除得尽. 从而 $p-qz=0$，也即 $z=\frac{p}{q}$时它为零. 由此得 $z=\frac{p}{q}$时 $M-AS=0$，即 A 等于 $z=\frac{p}{q}$时$\frac{M}{S}$的值.

对求得的 A，$M-AS$ 被 $p-qz$ 除得尽，令

$$\frac{M-AS}{p-qz}=T,$$

则 $T-BS-C\ (p-qz)\ S$ 被 $(p-qz)^2$ 除得尽. 从而 $p-qz=0$ 时 $T-BS=0$. 由此得 $z=\frac{p}{q}$时 $B=\frac{T}{S}$，也即 B 等于 $z=\frac{p}{q}$时$\frac{T}{S}$的值.

对求出的 B，$T-BS$ 被 $p-qz$ 除得尽. 令

$$\frac{T-BS}{p-qz}=V,$$

则 $V-CS$ 被 $p-qz$ 除得尽，即 $p-qz=0$ 时 $V-CS=0$. 从而 $z=\frac{p}{q}$时 $C=\frac{V}{S}$，即 C 等于 $z=\frac{p}{q}$时$\frac{V}{S}$的值.

至此 A、B、C 全求了出来，也即求出了由分母的因式 $(p-qz)^3$ 产生的部分分式

$$\frac{A}{(p-qz)^3}+\frac{B}{(p-qz)^2}+\frac{C}{p-qz}.$$

例：考虑函数

$$\frac{z^2}{(1-z)^3\ (1+z^2)}.$$

分母的三重因式 $(1-z)^3$ 产生的部分分式形状为

$$\frac{A}{(1-z)^3}+\frac{B}{(1-z)^2}+\frac{C}{1-z}$$

对于该分数函数我们有 $M=z^2$，$S=1+z^2$. 首先 $1-z=0$ 或 $z=1$ 时

$$A=\frac{Z^2}{1+z^2}=\frac{1}{2}.$$

其次，令

$$T=\frac{M-AS}{1-z}=\frac{\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}}{1-z}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z,$$

得 $z=1$ 时

$$B=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z}{1+z^2}=-\frac{1}{2}.$$

再次，令

$$V=\frac{T-BS}{1-z}=\frac{T+\frac{1}{2}S}{1-z},$$

得

$$V=\frac{-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^2}{1-z}=-\frac{1}{2}z.$$

从而 $z=1$ 时

$$C=\frac{V}{S}=\frac{-\frac{1}{2}z}{1+z^2}=-\frac{1}{4}.$$

我们求得了对应于分母因式 $(1-z)^3$ 的部分分式为

$$\frac{1}{2(1-z)^3}-\frac{1}{2(1-z)^2}-\frac{1}{4(1-z)}.$$

§ 45

现在讲对应于因式 $(p-qz)^n$ 的部分分式的求法，即分数 $\frac{M}{N}$

的对应于 N 的因式 $(p-qz)^n$ 的部分分式

$$\frac{A}{(p-qz)^n}+\frac{B}{(p-qz)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qz)^{n-2}}+\cdots+\frac{K}{p-qz}$$

的求法.

记分母

$$N=(p-qz)^n Z,$$

仿照前两节的推导，我们依次得到

1) $A=\frac{M}{Z}$，其中 $z=\frac{p}{q}$. 记 $P=\frac{M-AZ}{p-qz}$，则

2) $B=\frac{P}{Z}$，其中 $z=\frac{p}{q}$. 记 $Q=\frac{P-BZ}{p-qz}$，则

3) $C=\frac{Q}{Z}$，其中 $z=\frac{p}{q}$. 记 $R=\frac{Q-CZ}{p-qz}$，则

4) $D=\frac{R}{Z}$，其中 $z=\frac{p}{q}$. 记 $S=\frac{R-DZ}{p-qz}$，则

5) $E=\frac{S}{Z}$，其中 $z=\frac{p}{q}$.

类推. 照此法依次算出 A、B、C、D 等，我们就求得了 $\frac{M}{N}$ 的对应于分母 N 的因式 $(p-qz)^n$ 的部分分式.

例 考虑分数函数

$$\frac{1+z^2}{z^5(1+z^3)}.$$

因式 z^5 产生的部分分式形状为

$$\frac{A}{z^5}+\frac{B}{z^4}+\frac{C}{z^3}+\frac{D}{z^2}+\frac{E}{z}.$$

这里

$$M=1+z^2,\ Z=1+z^3,\ \frac{p}{q}=0.$$

依次进行计算得

$$A=\frac{M}{Z}=\frac{1+z^2}{1+z^3},$$

将 $z=0$ 代入，得

$$A=1.$$

记

$$P=\frac{M-AZ}{z}=\frac{z^2-z^3}{z}=z-z^2,$$

则

$$B=\frac{P}{Z}=\frac{z-z^2}{1+z^3},$$

将 $z=0$ 代入，得

$$B=0$$

记

$$Q=\frac{P-BZ}{z}=\frac{z-z^2}{z}=1-z,$$

则

$$C=\frac{Q}{Z}=\frac{1-z}{1+z^3},$$

将 $z=0$ 代入，得

$$C=1.$$

记

$$R=\frac{Q-CZ}{z}=\frac{-z-z^3}{z}=1-z^2,$$

则

$$D=\frac{R}{Z}=\frac{-1-z^2}{1+z^3},$$

将 $z=0$ 代入，得

$$D=-1.$$

记

$$S=\frac{R-DZ}{z}=\frac{-z^2+z^3}{z}=-z+z^2,$$

则

$$E=\frac{S}{Z}=\frac{-z+z^2}{1+z^3},$$

将 $z=0$ 代入，得

$$E=0.$$

所求部分分式为

$$\frac{1}{z^5}+\frac{0}{z^4}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}+\frac{0}{z}.$$

§ 45 *a* *

一般分数函数 $\frac{M}{N}$ 的部分分式的求法.

先将分母分解成线性因式，这线性因式也可以是虚的，对单重因式，用 § 41 的方法逐个求出它们所对应的部分分式. 如果线性因式中有二重的或更多重的，则把相同的集中在一起，写成 $(p-qz)^n$ 的形式. 然后用 § 45 的方法求出它对应的部分分式. 这样我们就把对应于每一个线性因式的部分分式都求出来了. 把求得的部分分式加起来，就得到函数 $\frac{M}{N}$ 的部分分式. 这里假定 $\frac{M}{N}$ 为真分式. 如果 $\frac{M}{N}$ 为假分式，则应先把整函数部分分离出来，然后求出真分式部分的部分分式. 最后把两部分加起来就得到 $\frac{M}{N}$ 的最简表达式. 说明一点，对假分式也可以先不分离出整函数部分，而直接求部分分式. 事实上，从前面给出的部分分式求法中我们看到，分子 M 乘上或除上分母的整倍数，对结果都不产生影响.

例 求函数

* 欧拉原书误编了两个 § 46，参照俄译本改这第一个 § 46 为 § 45a，保留下一个——中译者.

$$\frac{1}{z^3(1-z)^2(1+z)}$$

的最简表达式.

先取单因式 $1+z$. 此时$\frac{p}{q}=-1$, $M=1$, $Z=z^3-2z^4+z^5$. 对应于 $1+z$ 的部分分式形状为$\frac{A}{1+z}$.

$A=\frac{1}{z^3-2z^4+z^5}$, 将 $z=-1$ 代入, 得 $A=-\frac{1}{4}$.

即 $1+z$ 产生的部分分式为

$$\frac{-1}{4(1+z)}.$$

再取重因式 $(1-z)^2$, 此时$\frac{p}{q}=1$, $M=1$, $Z=z^3+z^4$. 对应于该重因式的部分分式形状为

$$\frac{A}{(1-z)^2}+\frac{B}{1-z}.$$

$A=\frac{1}{z^3+z^4}$, 将 $z=1$ 代入, 得 $A=\frac{1}{2}$.

记

$$P=\frac{M-\frac{1}{2}Z}{1-z}=\frac{1-\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{2}z^4}{1-z}=1+z+z^2+\frac{1}{2}z^3,$$

则

$$B=\frac{P}{Z}=\frac{1+z+z^2+\frac{1}{2}z^3}{z^3+z^4}$$

将 $z=1$ 代入, 得

$$B=\frac{7}{4}.$$

即 $(1-z)^2$ 产生的部分分式为

$$\frac{1}{2(1-z)^2}+\frac{7}{4(1-z)}.$$

最后取三重因式 z^3，此时

$$\frac{p}{q}=0,\ M=1,\ Z=1-z-z^2+z^3.$$

所求部分分式的形状为

$$\frac{A}{z^3}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z}.$$

$$A=\frac{M}{Z}=\frac{1}{1-z-z^2+z^3},$$

将 $z=0$ 代入，得

$$A=1.$$

记 $P=\frac{M-Z}{z}=1+z-z^2,$

则 $B=\frac{P}{Z}=\frac{1+z-z^2}{1-z-z^2+z^3}.$

将 $z=0$ 代入，得

$$B=1.$$

记 $Q=\frac{P-Z}{z}=2-z^2,$

则 $C=\frac{Q}{Z}.$

将 $z=0$ 代入，得

$$C=2.$$

结果得函数

$$\frac{1}{z^3\ (1-z)^2\ (1+z)}$$

的分解式为

$$\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z}+\frac{1}{2\ (1-z)^2}+\frac{7}{4\ (1-z)}-\frac{1}{4\ (1+z)}.$$

没有整函数部分，因为函数不是假分式.

第三章

函数的换元变换

§ 46

如果 y 是 z 的函数，而 z 由一个新的变量 x 决定，那么 y 就也可以由 x 决定.

y 本来是 z 的函数，现在引进一个新的变量 x，使得 y 和 z 都由这个 x 决定. 例如

$$y=\frac{1-z^2}{1+z^2},$$

令

$$z=\frac{1-x}{1+x},$$

将 z 的这个表达式代入 y 本来的表达式，得

$$y=\frac{2x}{1+x^2}.$$

每给定一个 x 值，都可以求出由它确定的 z 值和 y 值. 这样一来，就可以独立地求出这个 z 值和对应于这个 z 值的 y 值. 例如令 $x=\frac{1}{2}$，则 $z=\frac{1}{3}$，$y=\frac{4}{5}$；令原来的表达式 $\frac{1-z^2}{1+z^2}$ 中的 $z=\frac{1}{3}$，

我们也得到 $y=\frac{4}{5}$.

我们在两种情况下引进新变量. 一是原表达式中根号下有 z，我们要使新变量摆脱根号，即有理化. 一是 y 和 z 的关系由高次方程给出，y 不能由 z 显示表出，我们要使 y，z 都能由新变量方便地表出. 换元的作用我们已经说得够清楚了，通过下面讲的，大家会更清楚.

§ 47

如果 $y=\sqrt{a+bz}$，为了使 z 和 y 的表达式都有理化，我们用下面的方法求新变量 x.

令 $\sqrt{a+bz}=bx$，y 和 z 的表达式就都是有理的了. 首先由 $y=bx$ 得 $a+bz=b^2x^2$，从面 $z=bx^2-\frac{a}{b}$. 这样我们就把 y 和 z 都表示成了 x 的有理函数. 置 $y=\sqrt{a+bz}$ 中的 $z=bz^2-\frac{a}{b}$，我们就得到 $y=bx$.

§ 48

如果 $y=(a+bz)^{m:n}$，为了有理地表示出这个 y，我们用下面的方法求新变量 x.

令 $y=x^m$，则 $(a+bz)^{m:n}=x^m$，从而 $(a+bz)^{1:n}=x$. 由此得 $a+bz=x^n$，从而 $z=\frac{x^n-a}{b}$. 这样换元公式为 $z=\frac{x^n-a}{b}$，从而 $y=x^m$ 就使得 y 和 z 都由 x 有理表出. 虽然 y、z 本来都不能由对方有理地表出，但它们都是新变量 x 的有理函数，x 就是针对这一目的面引入的.

§ 49

设

$$y = \left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^{m:n},$$

做变量替换，使 y 和 z 的表达式都是有理的.

看得出，令 $y=x^m$ 就可以导出所要的代换. 事实上，由

$$\left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^{m:n} = x^m$$

得

$$\frac{a+bz}{f+gz} = x^n.$$

解出 z，得

$$z = \frac{a-fx^n}{gx^n-b}.$$

将这个 z 代入原表达式，得 $y=x^m$. 由此我们也看到，如果

$$\left(\frac{\alpha+\beta y}{\gamma+\delta y}\right)^n = \left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^m,$$

那么令左右端都等于 x^{mn}，我们就分别得到 y 和 z 的有理表达式，结果为

$$y = \frac{\alpha-\gamma x^m}{\delta x^m-\beta}, \quad z = \frac{a-fx^n}{gx^n-b}.$$

这已经是容易处理的了.

§ 50

$y=\sqrt{(a+bz)(c+dz)}$时，y 和 z 的有理表达式的求法.

令

$$\sqrt{(a+bz)(c+dz)} = (a+bz)x.$$

两边平方得到 z 的一个线性方程，解出 z 就得到 z 的有理表达式. 具体地，两边平方得

$$c + dz = (a + bz)\, x^2.$$

解出 z，得

$$z = \frac{c - ax^2}{bx^2 - d}.$$

将

$$a + bz = \frac{bc - ad}{bx^2 - d}$$

代入

$$y = \sqrt{(a + bz)\,(c + dz)} = (a + bz)\, x,$$

得到 y 的有理表达式

$$y = \frac{(bc - ad)\, x}{bz^2 - d}.$$

这样我们用代换

$$z = \frac{c - ax^2}{bx^2 - d}$$

就做到将无理函数

$$y = \sqrt{(a + bz)\,(c + dz)}$$

变换成了有理函数

$$y = \frac{(bc - ad)\, x}{bx^2 - d}.$$

例如

$$y = \sqrt{a^2 - z^2} = \sqrt{(a + z)\,(a - z)},$$

这里 $b = +1$，$c = a$，$d = -1$.

采用代换

$$z = \frac{a - ax^2}{1 + x^2}.$$

得

$$y=\frac{2ax}{1+x^2}.$$

也即根号下为两个实线性因式时，用这里的代换就可以把根号去掉．如果根号下的两个因式是虚的，我们可以用下一节的方法．

§ 51

$y=\sqrt{p+qz+rz^2}$，求 z 的代换，使 y 的表达式有理．

这里 z 的代换随 p，r 的为正或为负而不同．我们先假定 p 为正，并令 $p=a^2$．p 可以不是完全平方数，其方根的无理性不影响我们的代换．

Ⅰ．$y=\sqrt{a^2+bz+cz^2}$．

令 $\sqrt{a^2+bz+cz^2}=a+xz$，

两边平方得

$$b+cz=2ax+x^2z,$$

解出 z 得

$$z=\frac{b-2ax}{x^2-c},$$

代这个 z 入 $y=a+xz$ 得

$$y=a+xz=\frac{bx-ax^2-ac}{x^2-c}.$$

求得的 y 和 z 都是 x 的有理函数．

Ⅱ．$y=\sqrt{a^2z^2+bz+c}$，

令

$$\sqrt{a^2z^2+bz+c}=az+x.$$

两边平方得

$$bz+c=2axz+x^2,$$

解出 z 得

$$z=\frac{x^2-c}{b-2ax},$$

从而

$$y=az+x=\frac{-ac+bx-ax^2}{b-2ax}.$$

Ⅲ. p 和 r 同为负数时，若非 $q^2>4pr$，则 y 恒为虚数；若 $q^2>4pr$，则 $p+qz+rz^2$ 可分解为两个实线性因式的积，就成了上一节的情况. 但把这里的 y 改写成

$$y=\sqrt{a^2+(b+cz)(d+ez)}$$

往往更方便，此时我们令

$$y=a+(b+cz)x,$$

两边平方得

$$d+ez=2ax+bx^2+cx^2z,$$

解出 z 得

$$z=\frac{d-2ax-bx^2}{cx^2-e}.$$

从而

$$y=\frac{-ae+(cd-be)x-acx^2}{cx^2-e}.$$

有时将 y 改写成

$$y=\sqrt{a^2z^2+(b+cz)(d+ez)}$$

也带来方便. 此时我们令

$$y=az+(b+cz)x,$$

两边平方得

$$d+ez=2axz+bx^2+cx^2z,$$

解出 z 得

$$z=\frac{bx^2-d}{e-2ax-cx^2},$$

从而

$$y=\frac{-ad+(be-cd)x-abx^2}{e-2ax-cx^2}.$$

例 考虑无理函数

$$y=\sqrt{-1+3z-z^2}.$$

将它改写成

$$y=\sqrt{1-2+3z-z^2}=\sqrt{1-(1-z)(2-z)}.$$

令

$$y=1-(1-z)x,$$

两边平方得

$$-2+z=-2x+x^2-x^2z,$$

解出 z 得

$$z=\frac{2-2x+x^2}{1+x^2}$$

从而

$$1-z=\frac{-1+2x}{1+x^2},$$

$$y=1-(1-z)x=\frac{1+x-x^2}{1+x^2}$$

上面我们用不定代数法（或称丢番图法）找到了我们所要的几种代换. 在另一些情况下，用有理代换变换不出有理表达式. 下面我们讲用于这另一些情况的别的种类的代换.

§ 52

y 为 z 的函数，它们的关系由方程

$$ay^\alpha+bz^\beta+cy^\gamma z^\delta=0$$

规定. 求一个新变量 x，使得 y 和 z 都能由新变量显式地表出.

由于没有求解方程

$$ay^\alpha+bz^\beta+cy^\gamma z^\delta=0$$

的通用方法，所以既不能把 y 表示成 z 的函数，也不能把 z 表示成 y 的函数．这是一种不便．下面我们提供一种克服这种不便的方法．令

$$y = x^m z^n,$$

则

$$ax^{\alpha m} z^{\alpha n} + bz^{\beta} + cx^{\gamma m} z^{\gamma n + \delta} = 0.$$

现在我们来决定 n，使得可以解出 z．决定的方法有三种：

Ⅰ．令 $\alpha n = \beta$，即 $n = \dfrac{\beta}{\alpha}$．除方程以 $z^{\alpha n} = z^{\beta}$ 得

$$ax^{\alpha m} + b + cx^{\gamma m} z^{\gamma n - \beta + \delta} = 0,$$

解出 z 得

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{1}{\gamma n - \beta + \delta}}$$

或

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}$$

从面

$$y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\beta}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}.$$

Ⅱ．令 $\beta = \gamma n + \delta$，即 $n = \dfrac{\beta - \delta}{\gamma}$．然后除方程以 z^{β}，得

$$ax^{\alpha m} z^{\alpha n - \beta} + b + cx^{\gamma m} = 0.$$

解出 z 得

$$z = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{1}{\alpha n - \beta}} = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}$$

从面

$$y = x^m \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\beta - \delta}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}$$

Ⅲ．令 $\alpha n = \gamma n + \delta$，即 $n = \dfrac{\delta}{\alpha - \gamma}$．然后除方程以 $z^{\alpha n}$，得

$$ax^{\alpha m} + bz^{\beta - \alpha n} + cx^{\gamma m} = 0.$$

解出 z 得

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{1}{\beta - \alpha n}} = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\alpha - \gamma}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}}.$$

从而

$$y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\delta}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}}.$$

用这三种方法我们都求得了 x 的函数 y 和 z. 下一步是决定 m，可指定它为任何非零整数，以使得表达式最为方便.

例 设函数 y 由方程

$$y^3 + z^3 - cyz = 0$$

规定. 试将 y 和 z 都表示成 x 的函数.

这里

$a = -1$，$b = -1$，$\alpha = 3$，$\beta = 3$，$\gamma = 1$，$\delta = 1$.

用第一种方法，取 $m = 1$，则

$$z = \left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1}, \quad y = x\left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1},$$

或

$$z = \frac{cx}{1 + x^3}, \quad y = \frac{cx^2}{1 + x^3},$$

y 和 z 都是有理函数.

用第二种方法得

$$z = \left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad y = x\left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}},$$

或

$$z = \frac{1}{x}\sqrt[3]{cx - 1}, \quad y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{(cx - 1)^2}.$$

用第三种方法得

$$z = (cx - x^3)^{\frac{2}{3}}, \quad y = x(cx - x^3)^{\frac{1}{3}}.$$

§ 53

前面我们使用的是反向推导法，我们看到了，反向推导法可以用 x 有理表示出由一些方程联系起来的 y 和 z.

事实上，假定结果为

$$z = \left(\frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \cdots}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\gamma} + \cdots}\right)^{p:r},$$

$$y = x\left(\frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \cdots}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\gamma} + \cdots}\right)^{q:r}.$$

则

$$y^{p} = x^{p}z^{q} \text{ 或 } x = yz^{-q:p}.$$

将这个 x 代入

$$z^{r:p} = \frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \cdots}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\gamma} + \cdots}$$

得

$$z^{r:p} = \frac{ay^{\alpha}z^{-\alpha q:p} + by^{\beta}z^{-\beta q:p} + cy^{\gamma}z^{-\gamma q:p} + \cdots}{A + By^{\mu}z^{-\mu q:p} + Cy^{\gamma}z^{-\gamma q:p} + \cdots}$$

或

$$Az^{r:p} + By^{\mu}z^{(r-\mu q):p} + Cy^{\gamma}z^{(r-\gamma q):p} + \cdots = ay^{\alpha}z^{-\alpha q:p} + by^{\beta}z^{-\beta q:p} + cy^{\gamma}z^{-\gamma q:p} + \cdots.$$

两边乘 $z^{\alpha q:p}$，得

$$Az^{(\alpha q+r):p} + By^{\mu}z^{(\alpha q-\mu q+r):p} + Cy^{\nu}z^{(\alpha q-\gamma q+r):p} + \cdots = ay^{\alpha} + by^{\beta}z^{(\alpha q-\beta q):p} + cy^{\gamma}z^{(\alpha q-\gamma q):p} + \cdots.$$

令

$$\frac{\alpha q + r}{p} = m;\ \frac{\alpha q - \beta q}{p} = n,\ p = \alpha - \beta,$$

则

$$q = n,\ r = \alpha m - \beta m - \alpha n.$$

从而得到方程

$$Az^m + By^\mu z^{m-\mu n:(\alpha-\beta)} + Cy^\gamma z^{m-\gamma n:(\alpha-\beta)} + \cdots = ay^\alpha + by^\beta z^n + cy^\gamma z^{(\alpha-\gamma)n:(\alpha-\beta)} + \cdots.$$

解方程得

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \cdots}{A + Bx^\mu + Cx^\gamma + \cdots}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha m-\beta m-\alpha n}},$$

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \cdots}{A + Bx^\mu + Cx^\gamma + \cdots}\right)^{\frac{n}{\alpha m-\beta m-\alpha n}}$$

或者令

$$\frac{\alpha q + r}{p} = m,\quad \frac{\alpha q - \mu q + r}{p} = n,\quad p = \mu,$$

则

$$m - n = \mu\frac{q}{p} = q,\quad \frac{q}{p} = \frac{m-n}{\mu},\quad \frac{r}{p} = m - \frac{\alpha m - \alpha n}{\mu},\quad r = \mu m - \alpha m + \alpha n.$$

从而得到方程

$$Az^m + By^\mu z^n + Cy^\gamma z^{m-\gamma(m-n):\mu} + \cdots = ay^\alpha + by^\beta z^{(\alpha-\beta)(m-n):\mu} + cy^\gamma z^{(\alpha-\gamma)(m-n):\mu} + \cdots.$$

解方程得

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \cdots}{A + Bx^\mu + Cx^\gamma + \cdots}\right)^{\frac{\mu}{\mu m-\alpha m+\alpha n}},$$

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \cdots}{A + Bx^\mu + Cx^\gamma + \cdots}\right)^{\frac{m-n}{\mu m-\alpha m+\alpha n}}.$$

§ 54

用新变量 x 有理地表示依赖关系为

$$ay^2 + byz + cz^2 + dy + ez = 0$$

的 y 和 z 的一种方法.

令方程中的 $y = xz$，然后除以 z，得

$$ax^2z + bxz + cz + dx + e = 0,$$
解出 z，得

$$z = \frac{-dx-e}{ax^2+bx+c}，从而\quad y = \frac{-dx^2-ex}{ax^2+bx+c}.$$

提一句，y 与 z 的依赖关系为

$$ay^2 + byz + cz^2 + dy + ez + f = 0$$

时，可用对一个变量加上或减去某个常数的方法，使得 f 消失，成为刚讲过的形式，也就可以使用刚讲过的方法．

§ 55

用新变量 x 有理地表示依赖关系为

$$ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 + ey^2 + fyz + gz^2 = 0$$

的 y 和 z 的一种方法．

令方程中的 $y = xz$，然后除方程以 z^2，得

$$ax^3z + bx^2z + cxz + dz + ex^2 + fx + g = 0.$$

解出 z，得

$$z = \frac{-ex^2-fx-g}{ax^3+bx^2+cx+d},$$

从而

$$y = \frac{-ex^3-fx^2-gx}{ax^3+bx^2+cx+d}.$$

不难看出，本节所讲的用新变量有理地表示 y 和 z 的方法，可以用到决定 y、z 关系的更多的高次方程上去．虽然这些情况都包含在§ 53之中，但由于通用公式使用上的不便，下面我们再考虑几类常见的重要情况．

§ 56

用新变量表示依赖关系为

$$ay^2 + byz + cz^2 = d$$

的 y 和 z 的一种方式.

令方程中的 $y = xz$，得

$$(ax^2 + bx + c)\ z^2 = d,$$

从而

$$z = \sqrt{\frac{d}{ax^2 + bx + c}},$$

$$y = x\sqrt{\frac{d}{ax^2 + bx + c}}.$$

类似的，如果

$$ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 = ey + fz,$$

那么令方程中的 $y = xz$，得

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)\ z^2 = ex + f.$$

从而

$$z = \sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bx^2 + cx + d}},$$

$$y = x\sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bx^2 + cx + d}}.$$

本节是下节的特例.

§ 57

用新变量 x 表示依赖关系为

$$ay^m + by^{m-1}z + cy^{m-2}z^2 + dy^{m-3}z^3 + \cdots = \alpha y^n + \beta y^{n-1}z + \gamma y^{n-2}z^2 + \delta y^{n-3}z^3 + \cdots$$

的 y 和 z 的一种方法.

令方程中的 $y=xz$，假定 m 大于 n，用 z^n 除方程，得

$$(ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+dx^{m-3}+\cdots)\ z^{m-n}=\alpha x^n+\beta x^{n-1}+\gamma x^{n-2}+\delta x^{n-3}+\cdots,$$

从而

$$z=\left(\frac{\alpha x^n+\beta x^{n-1}+\gamma x^{n-2}+\delta x^{n-3}+\cdots}{ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+dx^{m-3}+\cdots}\right)^{1:(m-n)},$$

$$y=x\left(\frac{\alpha x^n+\beta x^{n-1}+\gamma x^{n-2}+\delta x^{n-3}+\cdots}{ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+dx^{m-3}+\cdots}\right)^{1:(m-n)}$$

表示 y、z 关系的方程，只要各项中 y、z 指数的和只有两种，就可以应用这里的方法．我们这里 y、z 指数的和是 m 和 n 两种.

§ 58

表示 y、z 关系的方程，如果各项中 y、z 指数的和只有成算术级数的高、中、低三种，则可以用解二次方程的方法将这 y、z 用新变量 x 表示出来.

令方程中的 $y=xz$，再用 z 的最低次幂除方程，对结果应用二次方程的求根公式，就可以把 z 用 x 表示出来．下面用例子作具体说明.

例1 设

$$ay^3+by^2z+cyz^2+dz^3=2ey^2+2fyz+2gz^2+hy+iz,$$

令方程中的 $y=xz$，再除以 z，得

$$(ax^3+bx^2+cx+d)\ z^2=2\ (ex^2+fx+g)\ z+hx+i.$$

这是 z 的二次方程，用求根公式得

$$z=\frac{ex^2+fx+g\pm\sqrt{(ex^2+fx+g)^2+\ (ax^3+bx^2+cx+d)\ (hx+i)}}{ax^3+bx^2+cx+d}$$

将这个 z 代入 $y=xz$，就得到 y 的表达式.

例2 设

$$y^5=2az^3+by+cz,$$

令方程中的 $y=xz$，再用 z 除，得

$$x^5z^4=2az^2+bx+c.$$

从而

$$z^2=\frac{a\pm\sqrt{a^2+bx^6+cx^5}}{x^5}$$

最后得

$$z=\frac{\sqrt{a\pm\sqrt{a^2+bx^6+cx^5}}}{x^2\sqrt{x}},$$

$$y=\frac{\sqrt{a\pm\sqrt{a^2+bx^6+cx^5}}}{x\sqrt{x}}.$$

例3 设

$$y^{10}=2ayz^6+byz^3+cz^4.$$

各项中 y、z 指数的和为 10，7，4 三种．令方程中的 $y=xz$，再用 z^4 除，得

$$x^{10}z^6=2axz^3+bx+c$$

或

$$z^6=\frac{2axz^3+bx+c}{x^{10}}.$$

从而

$$z^3=\frac{ax\pm x\sqrt{a^2+bx^9+cx^8}}{x^{10}},$$

最后得

$$z=\frac{\sqrt[3]{a\pm\sqrt{a^2+bx^9+cx^8}}}{x^3},$$

$$y=\frac{\sqrt[3]{a\pm\sqrt{a^2+bx^9+cx^8}}}{x^2}.$$

这几个例子已经把这种方法讲得很清楚了

第四章

函数的无穷级数展开

§ 59

对于 z 的分数函数和无理函数，人们常常寻求它们的整函数那样的，但项数无穷的表达式 $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots$. 即使是超越函数，用这种无穷表达式表示出来，其性质也更清楚.

整函数的性质是最为清楚的. 如果一个函数展成了 z 的幂，并整理成形状 $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots$，那么即使项数无穷，这也是函数的性质最易掌握的形式. 显然，变量 z 的任何一个非整函数都不能用状如

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots$$

的有限项表示出来，否则它就是整函数了. 但是可以用这种形状的无穷多项把一个非整函数表示出来. 如果对这一点有怀疑，那么通过下面对具体函数的展开，这怀疑会消除的. 为更具一般性，我们不限制 z 的指数必须为正整数，允许它为任何实数. 这样 z 的任何一个函数，就都可以用状如

$$Az^{\alpha}+Bz^{\beta}+Cz^{\gamma}+Dz^{\delta}+\cdots$$

的表达式表示出来，其中指数 α，β，γ，δ…为任何实数.

§ 60

连续进行除法可以化分数函数

$$\frac{a}{\alpha+\beta z}$$

为无穷级数

$$\frac{a}{\alpha}-\frac{a\beta z}{\alpha^2}+\frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3}-\frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4}+\frac{a\beta^4 z^4}{\alpha^5}-\cdots.$$

这是一个几何级数，邻项的比都为 $-1:\frac{\beta z}{\alpha}$.

这一级数也可以用比较系数的方法求得.

令

$$\frac{a}{\alpha+\beta z}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots,$$

去分母，得

$$a=(\alpha+\beta z)(A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots),$$

展开，得

$$\begin{aligned}a=\alpha A&+\alpha Bz+\alpha Cz^2+\alpha Dz^3+\alpha Ez^4+\cdots\\&+\beta Az+\beta Bz^2+\beta Cz^3+\beta Dz^4+\cdots.\end{aligned}$$

比较零次幂的系数得 $a=\alpha A$ 或 $A=\frac{a}{\alpha}$. 由 z 的其余各次幂的系数都应该为零，得

$$\alpha B+\beta A=0,$$
$$\alpha C+\beta B=0,$$
$$\alpha D+\beta C=0,$$
$$\alpha E+\beta D=0,$$

类推.

知道了任何一个系数都可以求出它后面的一个. 例如系数 P

已知，它后面的一个为 Q，则 $\alpha Q+\beta P=0$，从而 $Q=-\frac{\beta P}{\alpha}$. 由于已知第一个系数为 $A=\frac{a}{\alpha}$，从它我们可以依次求出 B，C，D，…. 结果与连续进行除法所得一致. 我们看到在 $\frac{a}{\alpha+\beta z}$ 展成的无穷级数中 z^n 的系数为 $\pm\frac{a\beta^n}{\alpha^{n+1}}$，$n$ 为偶数时取正号，n 为奇数时取负号. 也即 z^n 的系数为 $\frac{a}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$.

§ 61

类似上一节，连续进行除法也可以化分数函数

$$\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$$

为无穷级数.

这里除法太繁，且从得到的级数中找不到简单的规律，所以我们采用比较系数法. 令

$$\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots,$$

两边乘 $\alpha+\beta z+\gamma z^2$，得

$$\begin{aligned}a+bz=\alpha A&+\alpha Bz+\alpha Cz^2+\alpha Dz^3+\alpha Ez^4+\cdots\\&+\beta Az+\beta Bz^2+\beta Cz^3+\beta Dz^4+\cdots\\&+\gamma Az^2+\gamma Bz^3+\gamma Cz^4+\cdots.\end{aligned}$$

比较系数得 $\alpha A=a$，$\alpha B+\beta A=b$. 从而 $A=\frac{a}{\alpha}$，$B=\frac{b}{\alpha}-\frac{a\beta}{\alpha^2}$.

接下去的系数可以从下面的方程求得

$$\alpha C+\beta B+\gamma A=0,$$
$$\alpha D+\beta C+\gamma B=0,$$
$$\alpha E+\beta D+\gamma C=0,$$

$$\alpha F+\beta E+\gamma D=0,$$

类推.

我们看到，知道了相邻的两个系数，就可以求出它们下面的一个. 例如相邻的两个系数 P，Q 已知，它们下面的一个为 R，则

$$\alpha R+\beta Q+\gamma P=0 \quad 或 \quad R=\frac{-\beta Q-\gamma P}{\alpha}.$$

由于开始的两个系数 A，B 已经求出，所以接下来的 C，D，E，F…都可求得. 这样我们就求出了等于分数函数$\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$的无穷级数 $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots$.

例 分数函数为

$$\frac{1+2z}{1-z-z^2},$$

记它展成的级数为

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots,$$

这里

$$a=1,\ b=2,\ \alpha=1,\ \beta=-1,\ \gamma=-1,$$

从而

$$A=1,\ B=3$$

接下去我们有

$$C=B+A,$$
$$D=C+B,$$
$$E=D+C,$$
$$F=E+D,$$

类推.

我们看到，每一个系数都是它前两个系数的和. 即如果 P，Q 是相邻的两个系数，则它们后面的那个系数 $R=P+Q$. 由于 A，B 已经求得，所以分数函数

$$\frac{1+2z}{1-z-z^2}$$

展成的无穷级数为

$$1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+\cdots,$$

可以无休止地写下去.

§ 62

关于分数函数展开为无穷级数的讨论，已经够清楚了. 我们已经找到了由一个或相邻几个系数决定下一个系数的规律. 展成级数为

$$A+Bz+Cz^2+\cdots+Pz^n+Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+Sz^{n+3}+\cdots,$$

分母为 $\alpha+\beta z$ 时，任何一个系数 Q 都由它的前一个系数 P 决定，P，Q 间关系为 $\alpha Q+\beta P=0$；分母为 $\alpha+\beta z+\gamma z^2$ 时，任何一个系数 R 都由它的前两个系数 Q 和 P 决定，P，Q，R 间关系为 $\alpha R+\beta Q+\gamma P=0$；分母是四项式 $\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3$ 时，任何一个系数 S 由它的前三个系数 P，Q，R 决定，P，Q，R，S 间关系为 $\alpha S+\beta R+\gamma Q+\delta P=0$；对次数更高的分母，这关系类似. 也即对任何一个分数函数，根据它的分母，我们都可以立即写出一个公式，根据这个公式，展成级数的项可由它的前几项决定. 著名数学家 A. 棣莫弗详细考察了这类级数，并给它起了一个名字叫递推级数，意思是从前面的项可传递式地推出后面的项.

§ 63

在这些级数的形成过程中都要求分母中的常数项 α 不为零. 如果 $\alpha=0$，则第一项 $A=\frac{a}{\alpha}$，因而所有的项都为无穷. $\alpha=0$ 的情形留待以后讨论.

任何一个分母第一项不为零的分数函数，我们都可以把它展成无穷级数．而任何一个这样的函数我们都可以把它化成分母第一项为 1 的分数函数

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+\cdots}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\cdots}.$$

分母中第一项之外各项都带负号，这是为了使得在无穷级数的系数公式中不含负号．设该函数的递推级数为

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots,$$

则系数

$$A=a,$$
$$B=\alpha A+b,$$
$$C=\alpha B+\beta A+c,$$
$$D=\alpha C+\beta B+\gamma A+d,$$
$$E=\alpha D+\beta C+\gamma B+\delta A+e,$$

类推．可见每一个系数都是它前几个系数的加权组合加上分子中的一个数．如果分子的项数有限，那么可以加上去的数很快被用尽．这以后，一个系数由前几个系数决定的规律就固定了．为了这规律不被破坏，还要求这分数函数为真分数函数．否则，整函数部分的各项应加到相应的项上去，或者从相应的项中减去．这都使固定规律被破坏．例如，假分式$\frac{1+2z-z^3}{1-z-z^2}$的展开级数为

$$1+3z+4z^2+6z^3+10z^4+16z^5+26z^6+42z^7+\cdots.$$

按固定规律，每一个系数都应该是其前两个系数的和，但这里第四项 $6z^3$ 的系数就不是．

§ 64

对分母是二项式的幂的分式，我们单独地讨论它的递推级

数．先看分数函数

$$\frac{a+bz}{(1-\alpha z)^2},$$

它的展开级数为

$$\begin{aligned} a &+2\alpha az+3\alpha^2az^2+4\alpha^3az^3+5\alpha^4az^4+\cdots \\ &+bz+2\alpha bz^2+3\alpha^2bz^3+4\alpha^3bz^4+\cdots, \end{aligned}$$

z^n 的系数为 $(n+1)\alpha^n a+n\alpha^{n-1}b$．这是一个递推级数，每一项都由其前两项推出．把分母展成 $1-2\alpha z+\alpha^2z^2$，就可以清楚地看出这递推规则．令 $\alpha=1$，$z=1$，则这里的级数成为一般的算术级数

$$a+(2a+b)+(3a+2b)+(4a+3b)+\cdots,$$

邻项差都相等．算术级数都是递推级数．如果 $A+B+C+D+E+F+\cdots$是算术级数，则

$$C=2B-A,\ D=2C-B,\ E=2D-C,\ \cdots.$$

§ 65

再看函数

$$\frac{a+bz+cz^2}{(1-\alpha z)^3},$$

由

$$\frac{1}{(1-\alpha z)^3}=(1-\alpha z)^{-3}=1+3\alpha z+6\alpha^2z^2+10\alpha^3z^3+15\alpha^4z^4+\cdots$$

得该函数展成的无穷级数为

$$\begin{aligned} a &+3\alpha az+6\alpha^2az^2+10\alpha^3az^3+15\alpha^4az^4+\cdots \\ &+bz+3\alpha bz^2+6\alpha^2bz^3+10\alpha^3bz^4+\cdots \\ &\qquad+cz^2+3\alpha cz^3+6\alpha^2cz^4+\cdots, \end{aligned}$$

其中 z^n 的系数为

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\alpha^n a+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\alpha^{n-1}b+\frac{(n-1)n}{1\cdot 2}\alpha^{n-2}c.$$

令 $\alpha=1$，$z=1$，则该无穷级数成为一般二阶级数，其二阶差分为常数. 记这一般二阶级数为

$$A+B+C+D+E+\cdots,$$

它是一个递推级数，每一项都由其前三项决定，关系式是

$$D=3C-3B+A,\ E=3D-3C+B,\ F=3E-3D+C,\ \cdots.$$

由于算术级数的二阶差分也为常数，都等于零. 所以算术级数的项也满足这个关系式.

§ 66

类似地，考虑函数

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{(1-\alpha z)^4},$$

它展成的无穷级数中 z^n 的系数为

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^n a+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-1}b$$
$$+\frac{(n-1)n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-2}c+\frac{(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-3}d.$$

令 $\alpha=1$，$z=1$，这个级数就代表三阶差分都为常数的所有这种三阶代数级数. 事实上，由分母为 $1-4z+6z^2-4z^3+z^4$ 的分数函数所产生的三阶级数

$$A+B+C+D+E+F+\cdots$$

都是递推的，其项间关系都是

$$E=4D-6C+4B-A,\ F=4E-6D+4C-B,\ \cdots.$$

更低阶级数的项也都满足这一关系.

§ 67

用这一方法可以证明，其差分最终为常数的这种代数级数，不管是几阶的，都是递推级数．项的形成规则由分母 $(1-z)^n$ 决定．n 比级数的阶数大 1．由于

$$a^m+(a+b)^m+(a+2b)^m+(a+3b)^m+\cdots$$

是 m 阶级数，依照递推级数的性质我们有

$$0=a^m-\frac{n}{1}(a+b)^m+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}(a+2b)^m-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}(a+3b)^m+\cdots\pm\frac{n}{1}[a+(n-1)b]^m\mp(a+nb)^m,$$

双重符号处，n 为偶数时取上面的，n 为奇数时取下面的．n 为大于 m 的整数时这个方程恒成立．由此可以看出递推级数的范围之广．

§ 68

分母不是二项式的幂，而是多项式的幂时，级数的性质要用另一种方法来阐明．设函数为

$$\frac{1}{(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\cdots)^{m+1}},$$

展成的无穷级数为

$$1+\frac{m+1}{1}\alpha z+\frac{(m+1)(m+2)}{1\cdot2}\alpha^2z^2+\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1\cdot2\cdot3}\alpha^3z^3+\cdots$$

$$+\frac{m+1}{1}\beta z^2+\frac{(m+1)(m+2)}{1\cdot2}2\alpha\beta z^3+\cdots$$

$$+\frac{m+1}{1}\gamma z^3+\cdots$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

为便于考察，记这个级数为

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+\cdots+Kz^{n-3}+Lz^{n-2}+Mz^{n-1}+Nz^n+\cdots.$$

在这样的记法之下，任何一个系数 N 都由它的前若干个系数决定．这“若干”等于字母 α，β，γ，$\delta\cdots$的个数，关系式为

$$N=\frac{m+n}{n}\alpha M+\frac{2m+n}{n}\beta L+\frac{3m+n}{n}\gamma K+\frac{4m+n}{n}\delta J+\cdots.$$

这规律依赖于 z 的指数，不固定，但接近于递推级数的项由分母决定的规律．这一不固定的规律只适用于分子为 1 或某个常数的情形，如果分子包含 z 的另外一个或几个幂，那时这规律要复杂得多．学了微积分再去考察它就变得容易了．

§ 69

到现在为止，我们一直假定分母的常数项不为零，并令它为 1．现在我们允许分母的常数项为零，看看级数是怎样的．此时分数函数的形状为

$$\frac{a+bz+cz^2+\cdots}{z\ (1-\alpha z-\beta z^2-\cdots)}.$$

去掉分母的因式 z，函数的剩下部分为

$$\frac{a+bz+cz^2+\cdots}{1-\alpha z-\beta z^2-\cdots}.$$

记它展成的递推级数为

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots,$$

用 z 除，得

$$\frac{a+bz+cz^2+\cdots}{z\ (1-\alpha z-\beta z^2-\cdots)}=\frac{A}{z}+B+Cz+Dz^2+Ez^3+\cdots.$$

类似地，我们有

$$\frac{a+bz+cz^2+\cdots}{z^2(1-\alpha z-\beta z^2-\cdots)}=\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}+C+Dz+Ez^2+\cdots,$$

一般地，我们有

$$\frac{a+bz+cz^2+\cdots}{z^m(1-\alpha z-\beta z^2-\cdots)}=\frac{A}{z^m}+\frac{B}{z^{m-1}}+\frac{C}{z^{m-2}}+\frac{D}{z^{m-3}}+\cdots,$$

m 为任何正整数.

§ 70

我们可以用另一个变量 x 来代换分数函数中的 z. 这代换的方式有无穷多种，因而一个分数函数可展成的递推级数也有无穷多个. 例如函数

$$y=\frac{1+z}{1-z-z^2},$$

其递推级数为

$$y=1+2z+3z^2+5z^3+8z^4+\cdots,$$

如果令 $z=\frac{1}{x}$，则

$$y=\frac{x^2+x}{x^2-x-1}=\frac{-x(1+x)}{1+x-x^2}.$$

由

$$\frac{1+x}{1+x-x^2}=1+0\cdot x+x^2-x^3+2x^4-3x^5+5x^6-\cdots,$$

得

$$y=-x+0\cdot x^2-x^3+x^4-2x^5+3x^6-5x^7+\cdots;$$

如果令 $z=\frac{1-x}{1+x}$，则

$$y=\frac{-2-2x}{1-4x-x^2},$$

从而

$$y=-2-10x-42x^2-178x^3-754x^4-\cdots.$$

我们可以得到表示这个 y 的无数个这样的递推级数.

§ 71

利用定理

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m-n}{n}}Q + \frac{m(m-n)}{n\cdot 2n}P^{\frac{m-2n}{n}}Q^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n\cdot 2n\cdot 3n}P^{\frac{m-3n}{n}}Q^3 + \cdots$$

可以把无理函数展成无穷级数，只要 $\frac{m}{n}$ 不是整数，定理中的项数就是无穷的. 取确定的 m 和 n，我们得到

$$(P+Q)^{\frac{1}{2}} = P^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}P^{-\frac{1}{2}}Q - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}P^{-\frac{3}{2}}Q^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}P^{-\frac{5}{2}}Q^3 - \cdots,$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{2}} = P^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}P^{-\frac{3}{2}}Q + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}P^{-\frac{5}{2}}Q^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}P^{-\frac{7}{2}}Q^3 + \cdots,$$

$$(P+Q)^{\frac{1}{3}} = P^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}P^{-\frac{2}{3}}Q - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}P^{-\frac{5}{3}}Q^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}P^{-\frac{8}{3}}Q^3 - \cdots,$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{3}} = P^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}P^{-\frac{4}{3}}Q + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}P^{-\frac{7}{3}}Q^2 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}P^{-\frac{10}{3}}Q^3 + \cdots,$$

$$(P+Q)^{\frac{2}{3}} = P^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}P^{-\frac{1}{3}}Q - \frac{2\cdot 1}{3\cdot 6}P^{-\frac{4}{3}}Q^2 + \frac{2\cdot 1\cdot 4}{3\cdot 6\cdot 9}P^{-\frac{7}{3}}Q^3 - \cdots,$$

等等.

§ 72

前节级数的每一项都可由它的前一项求出. 如果 $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ 产生的级数的某一项为

$$MP^{\frac{m-Kn}{n}}Q^K,$$

则下一项为

$$\frac{m-Kn}{(K+1)\ n}MP^{\frac{m-(K+1)n}{n}}Q^{K+1}.$$

我们看到，后项比前项，P 的指数减 1，Q 的指数加 1. 在一些情况下把 $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ 表示成 $P^{\frac{m}{n}}\ (1+\frac{Q}{P})^{\frac{m}{n}}$ 更为方便. 乘 $(1+\frac{Q}{P})^{\frac{m}{n}}$ 的级数以 $P^{\frac{m}{n}}$，就得到 $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ 的级数；再一点，如果 m 不仅可为整数，而且可为分数，则可取 n 恒为 1. 这样，如果记 z 的函数 $\frac{Q}{P}$ 为 Z，则

$$(1+Z)^m=1+\frac{m}{1}Z+\frac{m\ (m-1)}{1\cdot 2}Z^2+\frac{m\ (m-1)\ (m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}Z^3+\cdots.$$

将该式中的 m 换为 $m-1$，得

$$(1+z)^{m-1}=1+\frac{m-1}{1}Z+\frac{(m-1)\ (m-2)}{1\cdot 2}Z^2+\frac{(m-1)\ (m-2)\ (m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}Z^3+\cdots,$$

规律性更明显.

§ 73

先令 $Z=\alpha z$，则

$$(1+\alpha z)^{m-1}=1+\frac{m-1}{1}\alpha z+\frac{(m-1)\ (m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2z^2+\frac{(m-1)\ (m-2)\ (m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3z^3+\cdots.$$

记它为

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \cdots + Mz^{n-1} + Nz^n + \cdots,$$

那么任何一个系数 N 由它的前一项决定的公式为

$$N = \frac{m-n}{n}\alpha M.$$

$n = 1$ 时 $M = 1$，得

$$N = A = \frac{m-1}{1}\alpha.$$

$n = 2$ 时 $M = A = \frac{m-1}{1}\alpha$，得

$$N = B = \frac{m-2}{2}\alpha M = \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2.$$

类似地

$$C = \frac{m-3}{3}\alpha B = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3.$$

与原级数一致.

§ 74

令 $Z = \alpha z + \beta z^2$，则

$$(1 + \alpha z + \beta z^2)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}(\alpha z + \beta z^2) + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}(\alpha z + \beta z^2)^2 + \cdots,$$

展开按 z 的升幂排列，得

$$(1 + \alpha z + \beta z^2)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3 + \cdots + \frac{m-1}{1}\beta z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}2\alpha\beta z^3 + \cdots,$$

记它为

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \cdots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n + \cdots,$$

那么任何一个系数 N 由它的前两个系数决定的公式是

$$N=\frac{m-n}{n}\alpha M+\frac{2m-n}{n}\beta L.$$

从第一项为 1 出发，利用该公式我们可求出所有的项. 我们有

$$A=\frac{m-1}{1}\alpha,$$

$$B=\frac{m-2}{2}\alpha A+\frac{2m-2}{2}\beta,$$

$$C=\frac{m-3}{3}\alpha B+\frac{2m-3}{3}\beta A,$$

$$D=\frac{m-4}{4}\alpha C+\frac{2m-4}{4}\beta B,$$

等等.

§ 75

若 $Z=\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3$，则

$$(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3)^{m-1}=1+\frac{m-1}{1}(\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3)+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}(\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3)^2+\cdots.$$

展开按 z 的升幂排列，得

$$(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3)^{m-1}=1+\frac{m-1}{1}\alpha z+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2z^2+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3z^3+\cdots+\frac{m-1}{1}\beta z^2+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}2\alpha\beta z^3+\cdots+\frac{m-1}{1}\gamma z^3+\cdots.$$

为使系数由前几项决定的公式易于表示，记它为

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+\cdots+Kz^{n-3}+Lz^{n-2}+Mz^{n-1}+Nz^n+\cdots,$$

这样每一项的系数由它的前三项系数决定的公式为

$$N = \frac{m-n}{n}\alpha M + \frac{2m-n}{n}\beta L + \frac{3m-n}{n}\gamma K.$$

第一项为 1，它前面的项为零，利用公式我们得到

$$A = \frac{m-1}{1}\alpha,$$

$$B = \frac{m-2}{2}\alpha A + \frac{2m-2}{2}\beta,$$

$$C = \frac{m-3}{3}\alpha B + \frac{2m-3}{3}\beta A + \frac{3m-3}{3}\gamma,$$

$$D = \frac{m-4}{4}\alpha C + \frac{2m-4}{4}\beta B + \frac{3m-4}{4}\gamma A,$$

$$E = \frac{m-5}{5}\alpha D + \frac{2m-5}{5}\beta C + \frac{3m-5}{5}\gamma B,$$

等.

§ 76

一般的，记

$$(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \cdots)^{m-1} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \cdots,$$

则

$$A = \frac{m-1}{1}\alpha$$

$$B = \frac{m-2}{2}\alpha A + \frac{2m-2}{2}\beta$$

$$C = \frac{m-3}{3}\alpha B + \frac{2m-3}{3}\beta A + \frac{3m-3}{3}\gamma$$

$$D = \frac{m-4}{4}\alpha C + \frac{2m-4}{4}\beta B + \frac{3m-4}{4}\gamma A + \frac{4m-4}{4}\delta$$

$$E = \frac{m-5}{5}\alpha D + \frac{2m-5}{5}\beta C + \frac{3m-5}{5}\gamma B + \frac{4m-5}{5}\delta A + \frac{5m-5}{5}\varepsilon$$

类推.

每一项都由它的前若干项确定，这“若干”等于分母中系数 α，β，γ，$\delta\cdots$的个数. 这里所得与§68是一致的，那里我们把类似的表达式 $(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\cdots)^{-m-1}$展成了无穷级数. 将 m 换为 $-m$，将系数 α，β，γ，δ，…前面的符号都换成负的，这里的结果跟那里就完全一样了. 对这里的规律我们不做证明，利用微分学的某些原理进行证明要容易得多. 通过前面那么多例子，大家对它的成立不会怀疑的.

第五章

多元函数

§ 77

到现在为止，我们考察过的都是一个变量的函数. 只要这一个变量确定了，函数就完全确定. 现在我们要考察两个或更多个变量的函数. 变量是彼此独立的，一个变量确定了，其他变量仍保持为变量. 比如记这种变量为 x，y，z，则 x，y，z 的每一个都可以取任何确定的值，彼此之间完全独立. 我们把 z 换成任何一个确定的值，x，y 依旧如 z 代换之前，是不确定的. 我们也称函数为因变量，称函数的变量为自变量. 自变量彼此独立，自变量都取了确定的值，因变量，也即函数的值才确定.

§ 78

变量 x，y，z 以任何方式所构成的表达式都是 x，y，z 的一个二元或更多元函数.

表达式 $x^3+xyz+az^2$ 是三个变元 x，y，z 的函数，一个变

元，比如 z 确定了，也即把 z 换成了常数，这个表达式仍然是变量 x 和 y 的函数. 进一步，y，z 都确定了，那么它仍然还是 x 的函数. 多元函数，只要有一个变量没确定，它就仍然是个函数. 任何一个变量的确定方式都有无穷多种，所以一个二元函数，当一个变量用无穷多种方式中的一种确定下来之后，另一个变量依然还有无穷多种确定方式. 也即它有无穷多个无穷种确定方式. 对三元函数就再多一层无穷. 类推下去，每多一个变元就多一层无穷.

§ 79

跟一元函数一样，多元函数也首先分为代数函数和超越函数.

只包含代数运算的表达式叫代数函数，含有超越运算的表达式叫超越函数. 这超越运算涉及的变量，可以是全体，可以是几个，也可以只是一个，至少一个. 表达式 $z^2+y\log z$ 就是 y 和 z 的超越函数，因为它包含 $\log z$. 如果指定 z 为常数，它就成了 y 的代数函数，不再是超越函数了. 对超越函数暂不做进一步的划分.

§ 80

代数函数分为有理函数和无理函数. 有理函数又分为整函数和分数函数.

跟第一章的分区方法一样，变量完全不受无理性影响的代数函数叫有理函数. 分母中不含变量的有理函数叫整函数；分母中含有变量的有理函数叫分数函数. 两个变量 x，y 的整函数，其一般形状为

$$\alpha+\beta y+\gamma z+\delta y^2+\varepsilon yz+\zeta z^2+\eta y^3+\vartheta y^2 z+\iota yz^2+\chi z^3+\cdots,$$

二元分数函数的一般形状为$\frac{P}{Q}$，P，Q 都是二元整函数．最后无理函数可以是显式的，也可以是隐式的．显式的，是借助根号完全解了出来的，隐式的由解不出的方程给出．方程

$$V^5=(ayz+z^3)V^2+(y^4+z^4)V+y^5+2ayz^3+z^5$$

给出的 V 就是 y 和 z 的隐式无理函数．

§ 81

多元函数也可以是多值的．

有理函数是单值的，因为变量都确定了的时候，它只取一个值．设 P，Q，R，$S\cdots$都是变量 x，y，z 的单值函数，则满足方程

$$V^2-PV+Q=0$$

的 V 就是 x，y，z 的二值函数，因为不管 x，y，z 取什么值，函数 V 都有两个确定的值．如果

$$V^3-PV^2+QV-R=0,$$

则 V 是三值函数，如果

$$V^4-PV^3+QV^2-RV+S=0,$$

则 V 是四值函数．类似地我们可以确定更多值的函数．

§ 82

一个变元 z 的函数，我们令它为零，得到一个或几个 z 值．类似地，两个变元 y，z 的函数，我们令它为零，每个变元就都由另一个决定．这样就使得本来是独立的两个变元，每一个都成了另一个的函数．同样地，令三个变元 x，y，z 的函数为零，

可以使每一个变元都由另外两个决定，也即使得每一个变元都是另外两个变元的函数．我们不令函数等于零，而令它等于某个常数，甚至等于另外某个函数，那么由得到的这个方程，不管它含有几个变量，每一个变量就都可以由其余的变量确定，因而都是其余变量的函数．变量相同，方程不同，确定的函数不同．

§ 83

与一元函数不同的一点是，多元函数可分为齐次函数和非齐次函数．

各项次数都相同的函数叫齐次函数，相应地，各项次数不都相同的函数叫非齐次函数．单个变元的次数为 1；一个变元的乘方或两个不同变元的乘积，它们的次数都是 2；三个变元，不管相同与否，其乘积的次数都是 3；类推．常数没有次数．我们看几个具体的例子．αy，βz 的次数都是 1；αy^2，βyz，γz^2 的次数都是 2；αy^3，$\beta y^2 z$，γyz^2，δz^3 的次数都是 3；αy^4，$\beta y^3 z$，$\gamma y^2 z^2$，δyz^3，εz^4 的次数都是 4．

§ 84

我们先看齐次整函数，只看二元的，多元类似．

各项次数都相同的整函数叫齐次整函数．一到四次的齐次整函数的一般形状依次为

$$\alpha y + \beta z,$$
$$\alpha y^2 + \beta yz + \gamma z^2,$$
$$\alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma yz^2 + \delta z^3,$$
$$\alpha y^4 + \beta y^3 z + \gamma y^2 z^2 + \delta yz^3 + \varepsilon z^4.$$

更高次的类推．我们把常数的次数看做是零．

§ 85

分数函数是齐次的，指分子分母都是齐次的.

分式$\frac{\alpha y^2+bz^2}{\alpha y+\beta z}$是 y，z 的齐次分数函数．分数函数的次数等于分子的次数减去分母的次数．我们的这个例子的次数是 1．分式$\frac{y^5+z^5}{y^2+z^2}$的次数是 3．如果分子分母的次数相同，则分数函数的次数为零．例如$\frac{y^3+z^3}{y^2z}$，$\frac{y}{z}$，$\frac{\alpha z^2}{y^2}$，$\frac{\beta y^3}{z^3}$都是零次的．如果分母的次数大于分子的，那么分数函数的次数是负的．例如：$\frac{y}{z^2}$是 -1 次的；$\frac{y+z}{y^4+z^4}$是 -3 次的；$\frac{1}{y^5+\alpha yz^4}$是 -5 次的，这里分子的次数是零．次数相同的齐次函数相加相减，结果仍为齐次函数，次数不变．例如，表达式

$$\alpha y+\frac{\beta z^2}{y}+\frac{\gamma y^4-\delta z^4}{y^2z+yz^2}$$

是一次的，而

$$\alpha+\frac{\beta y}{z}+\frac{\gamma z^2}{y^2}+\frac{y^2+z^2}{y^2-z^2}$$

是零次的.

§ 86

齐次函数的概念也可以用到无理函数上去．如果 P 是 n 次齐次函数，则$\sqrt{P}$的次数为$\frac{1}{2}n$，$\sqrt[3]{P}$的次数为$\frac{1}{3}n$．一般的，$P^{\frac{\mu}{\nu}}$的次数为$\frac{\mu}{\nu}n$．函数

$$\sqrt{y^2+z^2},\ \sqrt[3]{y^9+z^9},\ (yz+z^2)^{\frac{3}{4}},\ \frac{y^2+z^2}{\sqrt{y^4+z^4}}$$

的次数依次为 1，3，$\frac{3}{2}$和 0，而表达式

$$\frac{1}{y}+\frac{y\sqrt{y^2+z^2}}{z^3}-\frac{y}{\sqrt[3]{y^6-z^6}}+\frac{y\sqrt{z}}{z^2\sqrt{y}+\sqrt{y^5+z^5}}$$

的次数为 -1.

§ 87

上节 所讲也可用于判断隐式无理函数是否为齐次的．设 V 由方程

$$V^3+PV^2+QV+R=0$$

给出，其中 P，Q，R 都是 x，y 的函数．首先必须 P，Q，R 全是齐次函数，V 才可能是齐次函数．其次，如果 V 是 n 次函数，则 V^3 的次数是 $2n$，V^3 的次数是 $3n$．再次，由方程中每项的次数应该相同，知 V 的次数为 n 时必须 P 的次数为 n，Q 的为 $2n$，R 的为 $3n$．反之，如果 P，Q，R 分别是 n，$2n$ 和 $3n$ 次齐次函数，我们可以断定 V 的次数为 n．例如

$$V^5+(y^4+z^4)V^3+\alpha y^8V-z^{10}=0$$

所决定的 V 是 y，z 的二次齐次函数.

§ 88

代换 $y=uz$ 变 y，z 的 n 次齐次函数为 z^n 与 u 的一个函数的乘积.

代换 $y=uz$ 给每一项增加了 y 的次数那么多个 z．由于每项中 y，z 次数的和为 n，所以变换后每项中 z 的总次数为 n，即每

项都含 z^n. 因而函数 V 被 z^n 除得尽，商为单个变元 u 的函数.

这对整函数尤其清楚，例如

$$V=\alpha y^3+\beta y^2 z+\gamma y z^2+\delta z^3$$

时，置 $y=uz$，则

$$V=z^3\ (\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta).$$

在分数函数情况下，这也是明显的，例如对 -1 次函数

$$V=\frac{\alpha y+\beta z}{y^2+z^2},$$

置 $y=uz$，得

$$V=z^{-1}\cdot\frac{\alpha u+\beta}{u^2+1}.$$

即使对无理函数，这一规则也照样适用. 例如，对 $-\frac{3}{2}$次函数

$$V=\frac{y+\sqrt{y^2+z^2}}{z\sqrt{y^3+z^3}},$$

令 $y=uz$，得

$$V=z^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{u+\sqrt{u^2+1}}{\sqrt{u^3+1}}.$$

经过这样的变换，二元函数变成了一元函数，z 的幂成了对 u 的函数无影响的因式.

§ 89

代换 $y=uz$ 变两个变元y，z 的零次齐次函数 V 为一元函数.

此时 V 化为 z 的零次幂 $z^0=1$ 与 u 的函数的乘积，即 z 在变换后的表达式中消失. 例如令 $y=uz$，则

$$V=\frac{y+z}{y-z}$$

变为

$$V=\frac{u+1}{u-1},$$

无理函数

$$V=\frac{y-\sqrt{y^2+z^2}}{z}$$

变为

$$V=u-\sqrt{u^2+1}.$$

§ 90

两个变元 y，z 的齐次整函数，可以表示成其次数那么多个，状如 $\alpha y+\beta z$ 的因式的乘积.

由于函数是齐次的，所以代换 $y=uz$ 变它为 z^n 与 u 的一个整函数的乘积. u 的这个整函数可以分解成 $\alpha u+\beta$ 状的线性因式的乘积. 由这线性因式的个数与 z^n 所含 z 的个数相等，可以乘这每个因式以 z，再利用 $uz=y$，这样对每个因式我们都得到 $\alpha uz+\beta z=\alpha y+\beta z$. 注意，线性因式可以是实的，也可以是虚的，即 α，β 可实可虚.

由此知，二次齐次函数

$$ay^2+byz+cz^2$$

有两个 $\alpha+\beta z$ 状的因式；函数

$$ay^3+by^2z+cyz^2+dz^3$$

有三个 $\alpha y+\beta z$ 状的因式. 更高次的齐次整函数类似.

§ 91

由上节知，一、二、三次齐次整函数依次可表成

$$\alpha y+\beta z,$$
$$(\alpha y+\beta z)(\gamma y+\delta z),$$
$$(\alpha y+\beta z)(\gamma y+\delta z)(\varepsilon y+\zeta z).$$
一般地，凡二元齐次整函数都可表示成，其次数那么多个，状如 $\alpha y+\beta z$ 的线性因式的乘积．这线性因式，可以照一元整函数那样，用解方程的方法求得．但三元和更多元的函数，则不具备这种性质．
$$ay^2+byz+cyx+dxz+ex^2+fz^2$$
分解不成
$$(\alpha y+\beta z+\gamma x)(\delta y+\varepsilon z+\zeta x).$$
更多元的函数，一般地，也分解不成线性因式的积．

§ 92

各项次数不都相同的函数叫非齐次函数．非齐次函数可以按各项次数的种数分类．我们把含有两种次数的函数，也即两个不同次数的齐次函数之和称为二齐函数．例如
$$y^5+2y^3z^2+y^2+z^2$$
就是一个二齐函数，它含有 5 和 2 两种次数，是一个五次与一个二次齐次函数之和．类似地，我们把含有三种次数的函数，也即三个不同次数的齐次函数之和称为三齐函数．
$$y^6+y^2z^2+z^4+y-z$$
就是一个三齐函数．

分数函数和无理函数，例如
$$\frac{y^3+ayz}{by+z^2},\quad \frac{a+\sqrt{y^2+z^2}}{y^2-bz},$$
它们拆不成齐次函数的和，因而不能用各项次数的种数分类．

§ 93

用适当的变量代换可以把有的非齐次函数化成齐次函数．我们给不出可以做到这一点的比较普遍一点的条件，只限于举几个例子．例如函数

$$y^5+z^2y+y^3z+\frac{z^3}{y},$$

代换 $z=x^2$ 化它为

$$y^5+x^4y+y^3x^2+\frac{x^6}{y},$$

是 x，y 的五次齐次函数．又例如函数

$$y+y^2x+y^3x^2+y^5x^4+\frac{a}{x}$$

代换 $x=\frac{1}{z}$ 化它为

$$y+\frac{y^2}{z}+\frac{y^3}{z^2}+\frac{y^5}{z^4}+az,$$

是 y，z 的一次齐次函数．例子还可举出一些，但代换都不这么简单，要复杂得多．

§ 94

再一种方法，是按项的最高次数对整函数进行分类．例如整函数

$$x^2+y^2+z^2+ay-a^2,$$

项的最高次数为 2，是二次整函数；整函数

$$y^4+yz^3-ay^2z+abyz-a^2y^2+b^4$$

是四次整函数．这是很重要的一种分类方法，讨论曲线时通常都用它．

§ 95

整函数还可分为可约和不可约两种．可以表示成两个或更多个函数之积的整函数称为可约的．例如

$$y^4 - z^4 + 2az^3 - 2byz^2 - a^2z^2 + 2abzy - b^2y^2$$

可分解成

$$(y^2 + z^2 - az + by)(y^2 - z^2 + az - by),$$

是可约整函数．前面讲了，二元齐次整函数都是其次数那么多个状如 $\alpha y + \beta z$ 的因式之积，因而它们都是可约的．不能表示成有理因式之积的整函数，称为不可约的．易知

$$y^2 + z^2 - a^2$$

没有有理因式，是不可约的．从除法的角度看，有除式的为可约的，无除式的为不可约的．

第六章

指数和对数

§ 96

超越函数属积分学范畴，但有几种却可以，也应该放在积分学前面讲，它们用得最多，也为进一步学习所必需．先考虑指数函数，即指数是变数，这样的幂．显然，这种幂不是代数函数，代数函数中指数是常数．指数函数，可以指数为变数，底为常数，如 a^z；也可以底和指数都是变数，如 y^z；指数本身也可以是指数函数，如 a^{a^z}，a^{y^z}，y^{a^z}，x^{y^z}．我们只讲指数为变数底为常数这一种，即 a^z．明白了这一种，别的也就清楚了．

§ 97

考虑指数函数 a^z，a 为常数，指数 z 为变数，因而可以是任何确定的数．先让 z 依次取正整数，得 a^1，a^2，a^3，a^4，a^5，a^6，…；再让 z 依次取负整数 -1，-2，-3，…，得 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{a^2}$，

$\frac{1}{a^3}$，$\frac{1}{a^4}$，…；$z=0$，得 $a^0=1$；让 z 为分数，例如$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，…，得$\sqrt{a}$，$\sqrt[3]{a}$，$\sqrt[3]{a^2}$，$\sqrt[4]{a}$，$\sqrt[4]{a^3}$，…，这是方根，方根可以不只一个值，但我们视 a^z 为单值函数，因而只考虑其实的正值. 例如 $a^{\frac{5}{2}}$，它既等于 $-a^2\sqrt{a}$，又等于 $+a^2\sqrt{a}$，但我们只取后者，即认为它在 a^2 与 a^3 之间. z 为无理数时，考虑方式类似，但理解起来要困难些. 例如 $a^{\sqrt{7}}$的值在 a^2 与 a^3 之间. 对 z 的虚数值我们不考虑.

§ 98

指数函数 a^z 的值依赖于常数 a. $a=1$，对任何的 z 值都有 $a^z=1$. $a>1$：a^z 的值随 z 的增大而增大，且 $z=\infty$时，a^z 也趋向无穷；$z=0$，则 $a^z=1$；$z<0$ 时，a^z 的值小于 1，且 $z=-\infty$ 时，$a^z=0$. $0<a<1$：对大于零的 z，a^z 的值随 z 的增大而减小；对小于零的 z，a^z 的值随 z 的增大而增大. $a<1$，则$\frac{1}{a}>1$. 记$\frac{1}{a}=b$，则 $a^z=b^{-z}$. 因而 $a<1$ 的情形可由 $a>1$ 的情形推出.

§ 99

$a=0$，则 a^z 的值是跳跃式的：z 为正数，即 z 大于零时恒有 $a^z=0$；$z=0$ 时 $a^0=1$；z 为负数时，a^z 为无穷大，例如 $z=-3$，则 $a^z=0^{-3}=\frac{1}{0^3}=\frac{1}{0}$，是无穷大. 也即 $a=0$，则 a^z 的值从 0 跳到 1，再从 1 跳到无穷大.

a 取负值，则 a^z 的跳跃更频．例如 a 取 -2；z 依次取整数时，a^z 的值正负交替．此时

$$a^{-4},\ a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \cdots$$

的值为

$$+\frac{1}{16},\ -\frac{1}{8},\ +\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ -2,\ +4,\ -8,\ +16,$$

$\cdots$；

z 取分数值时，$a^z=(-2)^z$ 时实时虚，例如 $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2}$ 是虚数，而 $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$ 是实数；如果指数 z 取无理数，则 a^z 可能为实数可能为虚数，何时为实何时为虚，事先不能确定．

§ 100

上节我们看到，a 为负值时，a^z 的值或正或负，或实或虚，不定．又 a 在 0，1 之间的情形可化为 $a>1$ 的情形．所以我们取 a 为正数，为大于 1 的数．令 $y=a^z$，让 z 取 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的所有实数，则 y 取 0 到 $+\infty$ 的所有正实数．$z=\infty$，则 $y=\infty$；$z=0$，则 $y=1$；$z=-\infty$，则 $y=0$．反之，对 y 的任何一个正值，都有 z 的一个实数值与之对应，值得 $a^z=y$．对 y 的负值，则没有实的 z 值与之对应．

§ 101

这样，记 $y=a^z$，则 y 是 z 的函数，即每一个 z 值都确定一个 y 值．从指数的性质我们可以看到 y 对 z 的依赖方式．例如，$y^2=a^{2z}$，$y^3=a^{3z}$，一般的 $y^n=a^{nz}$．由此得 $\sqrt{y}=a^{\frac{1}{2}z}$，$\sqrt[3]{y}=a^{\frac{1}{3}z}$，$\frac{1}{y}=a^{-z}$，$\frac{1}{y^2}=a^{-2z}$，$\frac{1}{\sqrt{y}}=a^{-\frac{1}{2}z}$，等等．进一步，若 $v=$

a^z，则 $vy = a^{x+z}$，$\frac{v}{y} = a^{x-z}$. 根据上述性质，每给定一个 z 值都可确定一个 y 值.

例 取 $a=10$，那么 z 为整数时，我们能直接写出 y，例如

$10^1=10$，$10^2=100$，$10^3=1000$，$10^4=10000$，$10^0=1$；

$10^{-1}=\frac{1}{10}=0.1$，$10^{-2}=\frac{1}{100}=0.01$，$10^{-3}=\frac{1}{1000}=0.001$.

z 取分数值时，可用求根的方法得到 y 值. 例如 $10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}=3.162277$ 等.

§ 102

前面我们看到，给定了数 a，那么对每一个 z 值，我们都能求得一个 y 值，使得 $y=a^z$. 现在倒过来，对每一个 y 值，要我们求出一个 z 值，使得 $a^z=y$，也即把 z 看成是 y 的函数. 此时称 z 为 y 的对数. 讨论对数时，我们都假定 a 是一个固定的数，称它为底，有了底，我们称等式 $a^z=y$ 中幂 a^z 的指数 z 为 y 的对数. 通常记 y 的对数为 $\log y$. 如果

$$a^z=y，则 z=\log y.$$

由此我们知道，对数的底虽然由我们指定，但是它应该大于 1. 还有，只有正数的对数是实数.

§ 103

1 的对数为 0，即不管取什么数为底，我们都有 $\log 1=0$，这是因为在决定 $z=\log y$ 的方程 $a^z=y$ 中，$y=1$ 时恒有 $z=0$.

大于 1 的数的对数为正. 例如

$$\log a = 1,\ \log a^2 = 2,\ \log a^3 = 3,\ \log a^4 = 4,\ \cdots.$$

可以推出底是什么，是其对数为 1 的那个数．小于 1 的正数的对数为负．例如

$$\log\frac{1}{a} = -1,\ \log\frac{1}{a^2} = -2,\ \log\frac{1}{a^3} = -3,\ \cdots.$$

负数的对数，不是实数，而是虚数．这我们前面指出过．

§ 104

类似地，如果 $\log y = z$，则 $\log y^2 = 2z$，$\log y^3 = 3z$，一般的 $\log y^n = nz$，将 $z = \log y$ 代人，得

$$\log y^n = n\log y.$$

即 y 的幂的对数等于指数乘上 y 的对数．例如

$$\log\sqrt{y} = \frac{1}{2}\log y,\ \log\frac{1}{\sqrt{y}} = \log y^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log y,$$

等．可见知道了一个数的对数，我们就可以求出它任何一个幂的对数．如果知道了两个数的对数．例如

$$\log y = z,\ \log v = x,$$

那么由 $a^z = y$ 和 $a^x = v$，我们得到

$$\log(vy) = x + z = \log v + \log y.$$

即两数积的对数等于两数对数的和．类似地，我们有

$$\log\frac{y}{v} = z - x = \log y - \log x.$$

即商的对数等于分子的对数减去分母的对数．根据已知的几个数的对数，利用上述规则，可以求出很多数的对数．

§ 105

从前面讲的我们看到，一个数，如果不是底的幂，它的对数

就不能是有理数．也即，如果 b 不是底 a 的幂，则 b 的对数就不能是有理数．在 b 不是底 a 的幂时，b 的对数也不能是无理数．假定 $\log b=\sqrt{n}$，即 $a^{\sqrt{n}}=b$，但在 a 和 b 都是有理数时，这是不可能的．我们首先要知道的是有理数和整数的对数，分数和无理数的对数可从有理数和整数的对数得到．有理数和无理数之外的是超越数，因而不是底的幂的数，其对数是超越数．即对数是超越量．

§ 106

当对数是超越数时，我们只能用小数近似地表示它．这小数的位数取得越多，近似程度就越好．下面是一种用计算平方根来求对数近似值的方法．我们知道，若 $\log y=z$，$\log v=x$，则 $\log\sqrt{vy}=\frac{x+z}{2}$．现在我们来求数 b 的对数的近似值．假定 b 在 a^2 和 a^3 之间，这两个数的对数分别为 2 和 3．我们先求出 a^2，a^3 的几何平均数 $a^{\frac{5}{2}}$ 或 $a^2\sqrt{a}$．这时 b 必定或者在 a^2 与 $a^2\sqrt{a}$ 之间，或者在 $a^2\sqrt{a}$ 与 a^3 之间．在哪两个数之间，我们就再求哪两个数的几何平均数．这样，我们就把 b 所在的区间进一步缩小．重复下去，b 所在的区间就越来越小．最终就可以得到 b 的具有我们所要的那么多位小数的近似值．由于区间端点的对数都计算出来了，所以 b 的对数也就有了．

例 设对数的底 $a=10$，即取常用对数，我们来求 5 的对数的近似值．5 在 1 与 10 之间，1 和 10 的对数分别为 0 和 1．下面我们逐次地求平方根，直至达到数 5．

$A=1.000000$，$\log A=0.0000000$.

$B=10.000000$，$\log B=1.0000000$.　$C=\sqrt{AB}$

$C=3.162277$，$\log C=0.5000000$.　$D=\sqrt{BC}$

$D=5.623413$, $\log D=0.7500000$. $E=\sqrt{CD}$

$E=4.216964$, $\log E=0.6250000$. $F=\sqrt{DE}$

$F=4.869674$, $\log F=0.6875000$. $G=\sqrt{DF}$

$G=5.232991$, $\log G=0.7187500$. $H=\sqrt{FG}$

$H=5.048065$, $\log H=0.7031250$. $J=\sqrt{FH}$

$J=4.958069$, $\log J=0.6953125$. $K=\sqrt{HJ}$

$K=5.002865$, $\log K=0.6992187$. $L=\sqrt{JK}$

$L=4.980416$, $\log L=0.6972656$. $M=\sqrt{KL}$

$M=4.991627$, $\log M=0.6982421$. $N=\sqrt{KM}$

$N=4.997242$, $\log N=0.6987304$. $O=\sqrt{KN}$

$O=5.000052$, $\log O=0.6989745$. $P=\sqrt{NO}$

$P=4.998647$, $\log P=0.6988525$. $Q=\sqrt{OP}$

$Q=4.999350$, $\log Q=0.6989135$. $R=\sqrt{OQ}$

$R=4.999701$, $\log R=0.6989440$. $S=\sqrt{OR}$

$S=4.999876$, $\log S=0.6989592$. $T=\sqrt{OS}$

$T=4.999963$, $\log T=0.6989668$. $V=\sqrt{OT}$

$V=5.000008$, $\log V=0.6989707$. $W=\sqrt{TV}$

$W=4.999984$, $\log W=0.6989687$. $X=\sqrt{VW}$

$X=4.999997$, $\log X=0.6989697$. $Y=\sqrt{VX}$

$Y=5.000003$, $\log Y=0.6989702$. $Z=\sqrt{XY}$

$Z=5.000000$, $\log Z=0.6989700$.

最后，这几何平均收敛于 $Z=5.000000$. 从而得到底为 10 时，5 的对数为 0.6989700. 因而近似地有

$$10^{\frac{69897}{100000}}=5.$$

Briggs 和 *Vlasc* 造数学史上第一本对数表时，用的就是这种方法. 当然后来人们找到了几种更简捷的方法.

§ 107

一种底决定一种对数，有多少种底，就有多少种对数．底的个数无穷，因而对数的种数也无穷．但每两种对数的比都为常数．设两种对数的底为 a 和 b，又设数 n 以 a 为底的对数为 p，以 b 为底的对数为 q，即 $a^p=n$，$b^q=n$．从而 $a^p=b^q$，进而 $a=b^{\frac{q}{p}}$．即两种对数的比 $\frac{q}{p}$ 是一个与 n 无关的常数．这样，有了一个数的一种对数，利用这个常数，即可算出它的另一种对数．这是一条“黄金”规则．知道了所有数的一种对数，利用这条“黄金”规则，就可以算出所有数的另一种对数．例如有了以 10 为底的对数，我们就可以算出以任何别的数为底的对数．设这别的数为 2，记数 n 以 10 为底的对数为 p，以 2 为底的对数为 q．由以 10 为底 $\log 2=0.3010300$，以 2 为底，$\log 2=1$，得

$$0.3010300:1=p:q$$

从而

$$q=\frac{p}{0.3010300}=3.3219277\cdot p.$$

也即常用对数乘上 3.3219277，就是以 2 为底的对数．

§ 108

相异两数，其对数的比，是一个与底无关的常数．

设数 M 和 N 以 a 为底的对数分别为 m 和 n．即 $M=a^m$，$N=a^n$，则 $a^{mn}=M^n=N^m$，从而 $M=N^{\frac{m}{n}}$．这个等式中不含 a，即比 $\frac{m}{n}$ 与底 a 无关．如果对另一个底 b，数 M 和 N 的对数分别为 μ

和 ν，经由同样的推导，得 $M = N^{\frac{\mu}{\nu}}$. 由 $N^{\frac{m}{n}} = N^{\frac{\mu}{\nu}}$ 得 $\frac{m}{n} = \frac{\mu}{\nu}$ 或 $m : n = \mu : \nu$. 我们已经看到，同一个数的不同幂的任何一种对数的比，都等于指数的比. 例如 y^m 和 y^n 的任何一种对数的比都等于 $m : n$.

§ 109

造对数表，可以用前面讲的计算对数的方法，当然也可以用别的更方便的方法. 但由于合数的对数等于其因数的对数之和，所以要造对数表，只需算出质数的对数，有了质数的对数，合数的对数用简单的加法即可得到. 例如有了 3 和 5 的对数，则

$$\log 15 = \log 3 + \log 5, \quad \log 45 = 2\log 3 + \log 5.$$

前面我们已经算出了以 10 为底时

$$\log 5 = 0.6989700$$

且 $\log 10 = 1$. 从面由

$$\log \frac{10}{5} = \log 2 = \log 10 - \log 5,$$

得

$$\log 2 = 1 - 0.6989700 = 0.3010300.$$

有了 2 和 5 的对数，那么所有只以 2，只以 5，或只以 2 和 5 为因数的合数，诸如 4，8，16，32，64，…和 20，40，80，25，50，…，它们的对数就都可以用加法得到.

§ 110

用对数表可以从数查对数，也可以从对数查数. 两相结合使得对数表在数值计算中大显身手. 假定给了六个数 c，d，e，f，g，h，要我们计算的不是这六个数的积，面是

$$\frac{c^2 d\sqrt{e}}{f\sqrt[3]{gh}}$$

这样一个复杂表达式的值．这个表达式的对数为

$$2\log c+\log d+\frac{1}{2}\log e-\log f-\frac{1}{3}\log g-\frac{1}{3}\log h.$$

算出来的这个对数，它所对应的数就是我们所要的数．对数把求幂求根两种运算转换成了乘法和除法．因而求复杂的幂和根时，对数表显示其特别的作用．

例 1 我们计算 $2^{\frac{7}{12}}$ 的值．它的对数为 $\frac{7}{12}\log 2$，乘 2 的对数 0.3010300 以 $\frac{7}{12}$，即 $\frac{1}{12}+\frac{1}{2}$，我们得到 $\log 2^{\frac{7}{12}}=0.1756008$．对应于这个对数的数为 1.498307．这就是 $2^{\frac{7}{12}}$ 的近似值．

例 2 某地现有人口 100000，年增长率为 $\frac{1}{30}$．求百年后该地人口数．

为简便计，记现有人口数为 n，即

$$n=100000.$$

一年后人口数为

$$\left(1+\frac{1}{30}\right)n=\frac{31}{30}n,$$

两年后人口数为 $\left(\frac{31}{30}\right)^2 n$，三年后人口数为 $\left(\frac{31}{30}\right)^3 n$，百年后人口数为

$$\left(\frac{31}{30}\right)^{100} n=\left(\frac{31}{30}\right)^{100} 100000.$$

百年后人口数的对数为

$$100\cdot\log\frac{31}{30}+\log 100000.$$

由

$$\log\frac{31}{30}=\log 31-\log 30=0.014240439,$$

得

$$100\log\frac{31}{30}=1.4240439,$$

加上 $\log 100000=5$，得所求人口数的对数为

$$6.4240439.$$

对应的人口数为

$$2654874.$$

即百年后人口数是现有人口数的 26 倍半稍多.

例 3 一场洪水使得某地只剩下了 6 个人，人们希望该地 200 年后人口数为 1000000. 问人口的年增长率应该是多少?

设年增长率为$\frac{1}{x}$，则 200 年后人口数为

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200}\cdot 6=1000000.$$

由此得

$$\frac{1+x}{x}=\left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}.$$

取对数，得

$$\log\frac{1+x}{x}=\frac{1}{200}\log\frac{1000000}{6}=\frac{1}{200}\cdot 5.2218487=0.0261092.$$

査对数表，得

$$\frac{1+x}{x}=\frac{1061963}{1000000},$$

从而

$$1000000=61963x.$$

最后得 x 的近似值为 16. 即年增长率为$\frac{1}{16}$，就能达到人们预期的目标. 现在我们假定保持这个增长速度 400 年，那时人口数将为

$$1000000\cdot\frac{1000000}{6}=166666666666.$$

这么多人，整个地球恐怕都负担不了.

例 4　百年人口增加一倍．问这年增长率是多少？

假定年增长率为$\frac{1}{x}$，原有人口数为 n. 那么，百年之后人口数为 $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100}n=2n$. 从而

$$\frac{1+x}{x}=2^{\frac{1}{100}},$$

取对数，得

$$\log\frac{1+x}{x}=\frac{1}{100}\log2=0.0030103.$$

查表，得

$$\frac{1+x}{x}=\frac{10069555}{10000000},$$

从而

$$x=\frac{10000000}{69555},$$

其近似值为 144. 即年增长$\frac{1}{144}$，百年就可加倍.

§ 111

对数的最重要的应用，是解未知量含于指数的方程．例如求满足方程

$$a^x=b$$

的 x 值，我们就必须应用对数．对 $a^x=b$ 两边取对数，得

$$\log a^x=x\log a=\log b,$$

从而

$$x=\frac{\log b}{\log a}.$$

我们指出，用随便以什么数为底的对数都可以，求得的比不因底

而不同.

例1　知人口年增长率为$\frac{1}{100}$，求人口增长到10倍所需的时间.

记所需年数为x，记原有人口数为n，则x年后人口数为$(\frac{101}{100})^x\cdot n$，等于$10n$．从而

$$(\frac{101}{100})^x=10,$$

取对数，得

$$x\log\frac{101}{100}=\log10.$$

由此得

$$x=\frac{\log10}{\log101-\log100}=\frac{10000000}{43214}\approx231,$$

即年增长率为$\frac{1}{100}$时，231年人口就增长到十倍，462年就增长到百倍，693年就增长到千倍.

例2　某人以5%的年利借款400000弗罗林，商定了每年归还25000弗罗林．问还清这笔债要多少年？

记借款数400000弗罗林为a，记每年还款数25000弗罗林为b，那么满一年欠款数为

$$\frac{105}{100}a-b,$$

满二年欠款数为

$$(\frac{105}{100})^2a-(\frac{105}{100})b-b,$$

满三年欠款数为

$$(\frac{105}{100})^3a-(\frac{105}{100})^2b-\frac{105}{100}b-b,$$

为简便计，令$n=\frac{105}{100}$，那么满x年欠款数为

$$n^x a-n^{x-1}b-n^{x-2}b-n^{x-3}b-\cdots-b=n^x a-b\ (1+n+$$
$$n^2+\cdots+n^{x-1}).$$

由几何级数的性质知

$$1+n+n^2+\cdots+n^{x-1}=\frac{n^x-1}{n-1},$$

从而，满 x 年债务人欠款数为

$$n^x a-\frac{n^x b-b}{n-1}.$$

欠款还清时欠款数为零，由此我们得到方程

$$n^x a=\frac{n^x b-b}{n-1}\text{或}\ (n-1)\ n^x a=n^x b-b,$$

从而

$$(b-na+a)\ n^x=b\ \text{或}\ n^x=\frac{b}{b-\ (n-1)\ a}.$$

取对数，解出 x，得

$$x=\frac{\log b-\log\ (b-\ (n-1)\ a)}{\log n}.$$

由

$$a=400000,\ b=25000,\ n=\frac{105}{100}$$

得

$$(n-1)\ a=20000,\ b-\ (n-1)\ a=5000.$$

从而还清这笔债务的年数

$$x=\frac{\log 25000-\log 5000}{\log\frac{105}{100}}=\frac{\log 5}{\log\frac{21}{20}}=\frac{6989700}{211893}.$$

即 33 年不到一点．满 33 年时，还款数本利和比借款数本利和多，多出来的数为

$$\frac{(n^{33}-1)\ b}{n-1}-n^{33}a=\frac{(\frac{21}{20})^{33}5000-25000}{\frac{1}{20}}=100000\ (\frac{21}{20})^{33}-$$

500000

由

$$\log \frac{21}{20} = 0.0211892991$$

得

$$\log \left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 0.69924687, \quad \log 100000 \left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 5.6992469.$$

这个数是 500318.8 的对数. 即满 33 年时债权人应退给债务人 318.8 弗罗林.

§ 112

我们来看常用对数. 常用对数以 10 为底，我们通常使用十进制数，因而常用对数比别种对数特别地有用. 10 的幂的对数是整数，不是 10 的幂的数的对数含有小数. 例如 1 与 10 之间的数的对数在 0 和 1 之间，10 与 100 之间的数的对数在 1 和 2 之间，等等. 因此对数都由整数和小数两部分构成. 我们称整数部分为首数，称小数部分为尾数. 一个数的对数的首数等于它的整数部分的位数减 1. 例如五位数 78509 的对数的首数为 4. 反之，从一个数的对数，我们也立刻可以说出它的位数. 例如，对数为 7.5804631 的数是 8 位数.

§ 113

两个数，如果其对数的尾数相同，首数不同，则这两数的比为 10 的幂. 也即这两个数的数字相同. 例如，对数为 4.9130187 和 6.9130187 的数分别为 81850 和 8185000. 对数为 3.9130187 和 0.9130187 的数，分别为 8185 和 8.185. 即尾数给出数的数字，首数告诉我们数的整数部分的位数. 例如对数 2.7603429，尾数

给出数的数字为 5758945，首数 2 告诉我们整数部分为 3 位，即数为 575.8945. 如果首数为 0，则告诉我们整数部分为 1 位，即数为 5.758945. 如果首数为负数，例如 -1，则数为 0.5758945. 首数为 -2，则数为 0.05758945. 首数 -1，-2，-3 常常记为 9，8，7，即从记的数减去 10 为实际的首数. 以上所讲，对数表的说明中有更详细的解释.

例 数列 2，4，16，256，…，每一项都是前一项的平方. 求它的第 25 项.

该数列可记为

$$2,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^8\cdots,$$

可见这数列的指数成几何级数，第 25 项的指数为

$$2^{24}=16777216.$$

因而所求的项为

$$2^{16777216},$$

它的对数为

$$16777216\log 2.$$

由

$$\log 2=0.30102999566398 1195$$

得所求项的对数为

$$5050445.25973367,$$

首数告诉我们所求项整数部分的位数为

$$5050446.$$

从对数表中查得尾数 259733675932 对应的数为 181858. 它后面还有 5050440 位. 从位数更多的对数表中可多查到几位. 事实上，该数的前 11 位为 18185852986.

第七章

指数函数和对数函数的级数表示

§ 114

a 大于 1 时，a 的幂随 a 增加而增加，而 $a^0=1$，所以指数比零增加无穷小时，幂比 1 增加也为无穷小. 也就是说，数 ω 是一个无穷小，即它几几乎乎就等于零时，我们有

$$a^{\omega}=1+\psi$$

数 ψ 也是无穷小. 从前一章我们知道，如果数 ψ 不是无穷小，ω 就也不为无穷小. 这就是说，ω 与 ψ 的关系，或为 $\psi=\omega$，或为 $\psi>\omega$，或为 $\psi<\omega$. 究竟是哪一种，由 a 决定. 而 a 暂且还是未知的. 我们令 $\psi=K\omega$. 这样我们有

$$a^{\omega}=1+K\omega,$$

取以 a 为底的对数，得

$$\omega=\log\ (1+K\omega).$$

例 为看清 K 对 a 的依赖情形，我们令 $a=10$，取一个比 1

大得很小的数，例如 $1+\frac{1}{1000000}$（即 $K\omega=\frac{1}{1000000}$），从常用对数表中查出该数的对数，得

$$\log\left(1+\frac{1}{1000000}\right)=\log\frac{1000001}{1000000}=0.00000043429=\omega.$$

由 $K\omega=0.00000100000$ 得

$$\frac{1}{K}=\frac{43429}{100000},\ K=\frac{100000}{43429}=2.30258.$$

我们看到 K 是一个依赖于底 a 的有限数．换一个底，则数 $1+K\omega$ 的对数随着改变，因而 K 也随着改变．

§ 115

由 $a^{\omega}=1+K\omega$ 得

$$a^{i\omega}=(1+K\omega)^{i}$$

对任何的 i 都成立，从而

$$a^{i\omega}=1+\frac{i}{1}K\omega+\frac{i(i-1)}{1\cdot 2}K^{2}\omega^{2}+\frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}K^{3}\omega^{3}+\cdots.$$

如果令 $i=\frac{z}{\omega}$，其中 z 为某个有限数，那么由 ω 为无穷小，知 i 为无穷大．由 $\omega=\frac{z}{i}$ 知 ω 是一个分母为无穷大的分数，即 ω 为无穷小，跟我们所取一致．将 ω 换为 $\frac{z}{i}$，得

$$a^{z}=1+\frac{1}{1}Kz+\frac{1(i-1)}{1\cdot 2i}K^{2}z^{2}+\frac{1(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}K^{3}z^{3}+\frac{1\cdot(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}K^{4}z^{4}+\cdots,$$

换 i 为无穷大，该等式依然成立，K 也如我们前面看到的，是一个确定的依赖于 a 的数．

§ 116

i 为无穷大时

$$\frac{i-1}{i}=1.$$

事实上，i 越大$\frac{i-1}{i}$越接近于 1，如果 i 大于任何给定的数，则$\frac{i-1}{i}$等于 1．类似地，我们有

$$\frac{i-2}{i}=1,\ \frac{i-3}{i}=1,$$

等等．由此得

$$\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2},\ \frac{i-2}{3i}=\frac{1}{3},\ \frac{i-3}{4i}=\frac{1}{4},$$

等等．将它们代入上节 a^z 的表达式，得

$$a^z=1+\frac{Kz}{1}+\frac{K^2z^2}{1\cdot2}+\frac{K^3z^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{K^4z^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots.$$

该等式还表示 a 与 K 之间的关系．事实上，如果令 $z=1$，则

$$a=1+\frac{K}{1}+\frac{K^2}{1\cdot2}+\frac{K^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{K^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots.$$

$a=10$ 时近似地有 $K=2.30258$，跟前面求得的一致．

§ 117

设

$$b=a^n,$$

那么以 a 为底取对数，得 $\log b=n$．由 $b^z=a^{nz}$，我们得到无穷级数

$$b^z=1+\frac{Knz}{1}+\frac{K^2n^2z^2}{1\cdot2}+\frac{K^3n^3z^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{K^4n^4z^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots,$$

将 n 换成 $\log b$，得

$$b^z = 1 + \frac{Kz}{1}\log b + \frac{K^2z^2}{1\cdot 2}(\log b)^2 + \frac{K^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}(\log b)^3 + \frac{K^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\log b)^4 + \cdots,$$

K 可由底 a 求得. 可见任何一个指数函数 b^z 都可以表示成按 z 的幂排列的无穷级数. 下面我们讲对数函数的无穷级数展开.

§ 118

由于 $a^\omega = 1 + K\omega$，其中 ω 为无穷小分数，且 a 与 K 之间有关系

$$a = 1 + \frac{K}{1} + \frac{K^2}{1\cdot 2} + \frac{K^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

于是以 a 为底取对数，得

$$\omega = \log(1 + K\omega),\quad i\omega = \log(1 + K\omega)^i.$$

显然 i 取得越大，幂 $(1 + K\omega)^i$ 比 1 大得就越多，让 i 为无穷大，则 $(1 + K\omega)^i$ 可以成为大于 1 的任何数. 令

$$(1 + K\omega)^i = 1 + x,$$

则

$$\log(1 + x) = i\omega.$$

$1 + x$ 的对数 $i\omega$ 是有限数，可见 i 应该是无穷大，否则 $i\omega$ 不能是有限数.

§ 119

由

$$(1 + K\omega)^i = 1 + x$$

得

$$1+K\omega=(1+x)^{\frac{1}{i}},\ K\omega=(1+x)^{\frac{1}{i}}-1.$$

从而

$$i\omega=\frac{i}{K}\left[(1+x)^{\frac{1}{i}}-1\right].$$

而 $i\omega=\log(1+x)$，所以

$$\log(1+x)=\frac{i}{K}\left[(1+x)^{\frac{1}{i}}-1\right],$$

这里的 i 是无穷大. 我们有

$$(1+x)^{\frac{1}{i}}=1+\frac{1}{i}x-\frac{1(i-1)}{i\cdot 2i}x^2+\frac{1(i-1)(2i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i}x^3$$

$$-\frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}x^4+\cdots,$$

又 i 为无穷大时我们有

$$\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2},\ \frac{2i-1}{3i}=\frac{2}{3},\ \frac{3i-1}{4i}=\frac{3}{4},\ \cdots,$$

从而

$$i(1+x)^{\frac{1}{i}}=i+\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$

继而

$$\log(1+x)=\frac{1}{K}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right),$$

这里对数的底为 a，K 是一个数，它满足

$$a=1+\frac{K}{1}+\frac{K^2}{1\cdot 2}+\frac{K^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots.$$

§ 120

上节我们求出了等于 $1+x$ 的对数的级数. 利用这个级数，我们可以求出对应于给定的底 a 的 K 值. 令 $1+x=a$，则 $\log a=1$，这样我们有

$$1=\frac{1}{K}\left(\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\cdots\right),$$

从而

$$K=\frac{(a-1)}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\cdots.$$

令 $a=10$，则这个无穷级数的值应该近似地等于 2.30258，也即应该有

$$2.30258=\frac{9}{1}-\frac{9^2}{2}+\frac{9^3}{3}-\frac{9^4}{4}+\cdots.$$

该级数项的值不断增加，前若干项的和也不趋向于某个极限，所以很难看出这个等式成立．下面我们来推出这一不易看出的结果．

§ 121

已知

$$\log(1+x)=\frac{1}{K}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right),$$

换 x 为 $-x$，得

$$\log(1-x)=-\frac{1}{K}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right).$$

前式减后式，得

$$\log(1+x)-\log(1-x)=\log\frac{1+x}{1-x}=\frac{2}{K}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right).$$

置

$$\frac{1+x}{1-x}=a,$$

则

$$x=\frac{a-1}{a+1},$$

由 $\log a=1$，得

$$K=2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+\cdots\right).$$

由这一等式可求出对应于给定底 a 的 K.

如果底 $a=10$，则

$$K=2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3\cdot 11^3}+\frac{9^5}{5\cdot 11^5}+\frac{9^7}{7\cdot 11^7}+\cdots\right).$$

该级数的项的值明显地递减，很快就给出 K 的满意的结果.

§ 122

对数的底 a 可以根据需要选取. 现在我们取 a 使 $K=1$. $K=1$，则 § 116 求得的级数成为

$$a=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots.$$

将各项化为小数，相加得

$$a=2.71828182845904523536028,$$

精确到最后一位.

称以这个数为底的对数为自然对数或双曲对数. 后一名称的采用，是由于双曲线下的面积，可用这种对数来表示. 为简便起见，我们记数 2.718281828459…为 e，即 e 是自然对数或双曲对数的底. 对应于这个底 e 的 $K=1$. e 是下面这个无穷级数的和

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots.$$

§ 123

可见自然对数有这样的性质：ω 为无穷小量时，$1+\omega$ 的对

数为ω．由此可以得到$K=1$，从而可以求出所有数的自然对数．记上节求得的数为e，则

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot2}+\frac{z^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{z^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots.$$

级数

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\cdots,$$

$$\log\frac{1+x}{1-x}=\frac{2x}{1}+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+\frac{2x^9}{9}+\cdots,$$

可用来计算自然对数．当x为很小的分数时，这两个级数都收敛很快．利用后一个级数，可以很容易地求出一些大于1的数的对数．例如令$x=\frac{1}{5}$，得

$$\log\frac{6}{4}=\log\frac{3}{2}=\frac{2}{1.5}+\frac{2}{3.5^3}+\frac{2}{5.5^5}+\frac{2}{7.5^7}+\cdots.$$

令$x=\frac{1}{7}$，得

$$\log\frac{4}{3}=\frac{2}{1.7}+\frac{2}{3.7^3}+\frac{2}{5.7^5}+\frac{2}{7.7^7}+\cdots.$$

令$x=\frac{1}{9}$，得

$$\log\frac{5}{4}=\frac{2}{1.9}+\frac{2}{3.9^3}+\frac{2}{5.9^5}+\frac{2}{7.9^7}+\cdots.$$

一些整数的对数，可从这几个分数的对数求得．由对数的性质，我们得到

$$\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}=\log2;\ \log\frac{3}{2}+\log2=\log2;\ 2\log2=\log4;$$

$$\log\frac{5}{4}+\log4=\log5;$$

$$\log2+\log2=\log6;\ 3\log2=\log5;\ 2\log3=\log9,\ \log2+\log5=\log10$$

例 数1到10的自然对数为

$\log1=0.00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000$

$$\log 2 = 0.69314\ 71805\ 59945\ 30941\ 72321$$
$$\log 2 = 1.09861\ 22886\ 68109\ 69139\ 52452$$
$$\log 4 = 1.38629\ 43611\ 19890\ 61883\ 44642$$
$$\log 5 = 1.60943\ 79124\ 34100\ 37460\ 07593$$
$$\log 6 = 1.79175\ 94692\ 28055\ 00081\ 24773$$
$$\log 7 = 1.94591\ 01490\ 55313\ 30510\ 54639$$
$$\log 8 = 2.07944\ 15416\ 79835\ 92825\ 16964$$
$$\log 2 = 2.19722\ 45773\ 36219\ 38279\ 04905$$
$$\log 10 = 2.30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914$$

这 10 个对数，除了 log7，都是从刚举出的三个级数求得的. log7 的求法是：令后一个级数中的 $x = \frac{1}{99}$，得

$$\log\frac{100}{98} = \log\frac{50}{49} = 0.0202027073175194484078230.$$

从

$$\log 50 = 2\log 5 + \log 2 = 3.9120230054281460586187508$$

中减去 $\log\frac{50}{49}$，得 log49，$\log 7 = \frac{1}{2}\log 49$.

§ 124

记 $1+x$ 的自然对数为 y，即 $\log(1+x) = y$，则

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

记 $1+x$ 的以 a 为底的对数为 v，则

$$v = \frac{1}{K}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right) = \frac{y}{K}.$$

从而

$$K = \frac{y}{v}.$$

这是计算对应于 a 的 K 值的最方便的方法：任一数，其自然对

数除以其以 a 为底的对数，商就是对应于 a 的 K 值．取这任一数为 a，则 $r=1$，K 就等于 a 的自然对数．常用对数的底为 10．对应于 10 的 K 就等于 10 的自然对数

$$K=2.30258509299404568401799 14\cdots,$$

跟我们前面算出来的一样．一个数的常用对数就等于它的自然对数除上这个 K 值，或者乘上

$$0.43429448190325182765 11289$$

§ 125

已知

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots,$$

令 $a^y=e^z$，两边取自然对数，由于 $\log e=1$，得 $y\log a=z$．将 z 的这个值代入上面的级数，得

$$a^y=1+\frac{y\log a}{1}+\frac{y^2\ (\log a)^2}{1\cdot 2}+\frac{y^3\ (\log a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots.$$

这样，任何一个指数函数 a^y 就都可以借助于自然对数表示成无穷级数．

如果 i 为无穷大，那么指数函数和对数函数就都可以表示成幂，即

$$e^z=\left(1+\frac{z}{i}\right)^i,$$

从而

$$a^y=\left(1+\frac{y\log a}{i}\right)^i.$$

对自然对数我们有

$$\log(1+x)=i\left((1+x)^{\frac{1}{i}}-1\right).$$

自然对数的另外一些应用在积分学中讨论．

第八章

来自圆的超越量

§ 126

讨论过对数和指数这两种超越量之后，我们应该来讨论弧及其正弦和余弦．所以应该讨论这几种量，不仅因为它们也是超越量，还因为借助复数，它们可由对数和指数这两种量产生．怎样产生，后面讲．

如果圆的半径（或完整的正弦）为 1，周长就不能为有理数，这是清楚的．半径为 1 的圆，其半周长的近似值为

3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971
69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899
86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
09384 46…

为简便起见，我们用符号 π 代表这个数．我们说：单位圆的半周长为 π，或者单位圆 180°弧的长为 π．

§ 127

用 z 表示半径为 1 的圆的一段弧，我们关心最多的是这段弧的正弦和余弦．弧 z 的正弦记为 $\sin\cdot A\cdot z$ 或简记为 $\sin\cdot z$，余弦记为 $\cos\cdot A\cdot z$ 或简记为 $\cos\cdot z$①.

π 是 180°的弧，首先我们有

$\sin 0\pi=0$，$\cos 0\pi=1$；

和

$$\sin\frac{1}{2}\pi=1,\ \cos\frac{1}{2}\pi=0;$$
$$\sin\pi=0,\ \cos\pi=-1;$$
$$\sin\frac{3}{2}\pi=-1,\ \cos\frac{3}{2}\pi=0;$$
$$\sin 2\pi=0,\ \cos 2\pi=1.$$

正弦和余弦的值都在 +1 和 −1 之间.

其次我们有

$$\cos z=\sin\left(\frac{1}{2}\pi-z\right),\ \sin z=\cos\left(\frac{1}{2}\pi-z\right).$$

再次我们有

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1.$$

还有从三角学中我们知道，弧 z 的正切记为 $\mathrm{tg}z$，余切记为 $\mathrm{ctg}z$.

$$\mathrm{tg}z=\frac{\sin z}{\cos z},\ \mathrm{ctg}z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{1}{\mathrm{tg}z}.$$

① 以下凡三角函数都采用现在的通用记法，字母 A 和圆点都略去．——译者

§ 128

我们知道，如果有 y，z 两段弧，则

$$\sin(y+z)=\sin y\cos z+\cos y\sin z$$
$$\cos(y+z)=\cos y\cos z-\sin y\sin z$$
$$\sin(y-z)=\sin y\cos z-\cos y\sin z$$
$$\cos(y-z)=\cos y\cos z+\sin y\sin z.$$

将这四个公式中的弧 y 依次换为$\frac{1}{2}\pi$，π，$\frac{3}{2}\pi$ 等，我们得到

$\sin(\frac{1}{2}\pi+z)=+\cos z$ $\cos(\frac{1}{2}\pi+z)=-\sin z$	$\sin(\frac{1}{2}\pi-z)=+\cos z$ $\cos(\frac{1}{2}\pi-z)=+\sin z$
$\sin(\pi+z)=-\sin z$ $\cos(\pi+z)=-\cos z$	$\sin(\pi-z)=+\sin z$ $\cos(\pi-z)=-\cos z$
$\sin(\frac{3}{2}\pi+z)=-\cos z$ $\cos(\frac{3}{2}\pi+z)=+\sin z$	$\sin(\frac{3}{2}\pi-z)=-\cos z$ $\cos(\frac{3}{2}\pi-z)=-\sin z$
$\sin(2\pi+z)=+\sin z$ $\cos(2\pi+z)=+\cos z$	$\sin(2\pi-z)=-\sin z$ $\cos(2\pi-z)=+\cos z.$

如果 n 表示某个整数，则

$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi+z\right)=+\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi+z\right)=-\sin z$	$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi-z\right)=+\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi-z\right)=+\sin z$
$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi+z\right)=-\sin z$ $\cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi+z\right)=-\cos z$	$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi-z\right)=+\sin z$ $\cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi-z\right)=-\cos z$
$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi+z\right)=-\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi+z\right)=+\sin z$	$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi-z\right)=-\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi-z\right)=-\sin z$
$\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi+z\right)=+\sin z$ $\cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi+z\right)=+\cos z$	$\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi-z\right)=-\sin z$ $\cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi-z\right)=+\cos z$

这些公式对正整数 n 和负整数 n 都成立.

§ 129

记

$$\sin z=p,\quad \cos z=q,$$

则

$$p^2+q^2=1.$$

记

$$\sin\gamma=m,\quad \cos\gamma=n,$$

则

$$m^2+n^2=1.$$

这样我们有下列结果

$\sin z = p$	$\cos z = q$
$\sin(y+z) = mq + np$	$\cos(y+z) = nq - mp$
$\sin(2y+z) = 2mnq + (n^2 - m^2)p$	$\cos(2y+z) = (n^2 - m^2)q - 2mnp$
$\sin(3y+z) = (3n^2m - m^3)q + (n^3 - 3m^2n)p$	$\cos(3y+z) = (n^3 - 3m^2n)q - (3mn^2 - m^3)p$

式中弧

$$z,\ y+z,\ 2y+z,\ 3y+z,\ \cdots.$$

成算术级数，它们的正弦和余弦都构成由分母

$$1 - 2nx + (m^2 + n^2)x^2$$

所产生的递推序列. 事实上

$$\sin(2y+z) = 2n\sin(y+z) - (m^2+n^2)\sin z,$$

或

$$\sin(2y+z) = 2\cos y\sin(y+z) - \sin z.$$

类似地

$$\cos(2y+z) = 2\cos y\cos(y+z) - \cos z.$$

进一步

$$\sin(3y+z) = 2\cos y\sin(2y+z) - \sin(y+z),$$
$$\cos(3y+z) = 2\cos y\cos(2y+z) - \cos(y+z).$$

再进一步

$$\sin(4y+z) = 2\cos y\sin(3y+z) - \sin(2y+z),$$
$$\cos(4y+z) = 2\cos y\cos(3y+z) - \cos(2y+z)$$

类推. 当弧成算术序列时，利用这里的规律，易于写出弧的正弦和余弦表达式.

§ 130

表达式

$$\sin(y+z)=\sin y\cos z+\cos y\sin z$$
$$\sin(y-z)=\sin y\cos z-\cos y\sin z$$
相加相减，得
$$\sin y\cos z=\frac{\sin(y+z)+\sin(y-z)}{2}$$
$$\cos y\sin z=\frac{\sin(y+z)-\sin(y-z)}{2}.$$
表达式
$$\cos(y+z)=\cos y\cos z-\sin y\sin z$$
$$\cos(y-z)=\cos y\cos z+\sin y\sin z$$
相加相减，得
$$\cos y\cos z=\frac{\cos(y-z)+\cos(y+z)}{2}$$
$$\sin y\sin z=\frac{\cos(y-z)-\cos(y+z)}{2}$$
如果 $y=z=\frac{v}{2}$，则从最后这两个公式得
$$\cos^2\frac{v}{2}=\frac{1+\cos v}{2},\quad \cos\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos v}{2}}$$
$$\sin^2\frac{v}{2}=\frac{1-\cos v}{2},\quad \sin\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos v}{2}}.$$
可见，知道了弧的余弦，我们就可以求出半弧的正弦和余弦.

§ 131

设弧
$$y+z=a,\quad y-z=b,$$
则
$$y=\frac{a+b}{2},\quad z=\frac{a-b}{2}.$$
将这里的 y，z 代入前节的公式，我们得到下面的四个等式，这

每一个等式都是一个定理.

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos b-\cos a=2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

从这四个等式，用除法，得定理

$$\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}=\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{a-b}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}$$

$$\frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b}=\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{\sin b+\sin a}{\cos b-\cos a}=\operatorname{ctg}\frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin a-\sin b}{\cos a+\cos b}=\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin a-\sin b}{\cos b-\cos a}=\operatorname{ctg}\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{\cos a+\cos b}{\cos b-\cos a}=\operatorname{ctg}\frac{a+b}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{a-b}{2}.$$

由此我们又推出定理

$$\frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b}=\frac{\cos b-\cos a}{\sin a-\sin b}$$

$$\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}\cdot\frac{\cos a+\cos b}{\cos b-\cos a}=\operatorname{ctg}^2\frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}\cdot\frac{\cos b-\cos a}{\cos a+\cos b}=\operatorname{tg}^2\frac{a+b}{2}.$$

§ 132

从

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

分解因式得

$$(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = 1.$$

这因式是虚的，但它们在关于弧的和与弧的积的讨论中很有用.

考虑乘积

$$(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y),$$

展开，得

$$\cos y\cos z - \sin y\sin z + (\cos y\sin z + \sin y\cos z)\sqrt{-1}.$$

由于

$$\cos y\cos z - \sin y\sin z = \cos(y + z),$$

$$\sin y\cos z + \cos y\sin z = \sin(y + z),$$

从而所给乘积可表示成

$$(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y + z) + \sqrt{-1}\sin(y + z).$$

类似地

$$(\cos y - \sqrt{-1}\sin y)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y + z) - \sqrt{-1}\sin(y + z),$$

进一步，我们有

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1}\sin y)(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) = \cos(x + y + z) \pm \sqrt{-1}\sin(x + y + z).$$

§ 133

利用上节结果，得

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^2 = \cos 2z \pm \sqrt{-1}\sin 2z,$$
$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^3 = \cos 3z \pm \sqrt{-1}\sin 3z,$$

一般地

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz.$$

从而由于两重符号，我们得到

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2},$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

将二项式的幂展开，得

$$\cos nz = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2} z\sin^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4} z\sin^4 z - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cos^{n-6} z\sin^6 z + \cdots,$$

$$\sin nz = \frac{n}{1}\cos^{n-1} z\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3} z\sin^3 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cos^{n-5} z\sin^5 z - \cdots.$$

§ 134

设弧 z 为无穷小，则 $\sin z = z$，$\cos z = 1$. 又设 n 为无穷大，则 nz 为有限数. 记 $nz = v$，由 $\sin z = z = \frac{v}{n}$，得

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$$

$$\sin v = v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{v^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots.$$

给了弧 v，我们可以用这两个级数来求它的正弦和余弦. 为

了使这两个公式用起来更清楚，我们取 v 比四分一圆周，或 90° 等于 m 比 n，也即 $v=\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$. π 的值已知，代入公式，得

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{m}{n}90^{\circ} = &+\frac{m}{n}\cdot 1.5707963267948966192313216916\\
&-\frac{m^{3}}{n^{3}}\cdot 0.6459640975062462536557565636\\
&+\frac{m^{5}}{n^{5}}\cdot 0.0796926262461670451205055488\\
&-\frac{m^{7}}{n^{7}}\cdot 0.0046817541353186881006854632\\
&+\frac{m^{9}}{n^{9}}\cdot 0.0001604411847873598218726605\\
&-\frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0.0000035988432352120853404580\\
&+\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0.0000000569217292196792681171\\
&-\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0.0000000006688035109811467224\\
&+\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0.0000000000060669357311061950\\
&-\frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0.0000000000000437706546731370\\
&+\frac{m^{21}}{n^{21}}\cdot 0.0000000000000002571422892856\\
&-\frac{m^{23}}{n^{23}}\cdot 0.0000000000000000012538995403\\
&+\frac{m^{25}}{n^{25}}\cdot 0.0000000000000000000051564550\\
&-\frac{m^{27}}{n^{27}}\cdot 0.0000000000000000000000181239\\
&+\frac{m^{29}}{n^{29}}\cdot 0.0000000000000000000000000549,
\end{aligned}
$$

$$\cos\frac{m}{n}90^\circ = +1.0000000000000000000000000000$$

$$-\frac{m^2}{n^2}\cdot 1.2337005501361698273543113745$$

$$+\frac{m^4}{n^4}\cdot 0.2536695079010480136365633659$$

$$-\frac{m^6}{n^6}\cdot 0.0208634807633529608730516364$$

$$+\frac{m^8}{n^8}\cdot 0.0009192602748394265802417158$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0.0000252020423730606054810526$$

$$+\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0.0000004710874778818171503665$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0.0000000063866030837918522408$$

$$+\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0.0000000000656596311497947230$$

$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0.0000000000005294400200734620$$

$$+\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0.0000000000000034377391790981$$

$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0.0000000000000000183599165212$$

$$+\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0.0000000000000000000820675327$$

$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0.0000000000000000000003115285$$

$$+\frac{m^{28}}{n^{28}}\cdot 0.0000000000000000000000010165$$

$$-\frac{m^{30}}{n^{30}}\cdot 0.0000000000000000000000000026.$$

只需求出45°以内的正弦和余弦，从而只需对小于$\frac{1}{2}$的$\frac{m}{n}$求级数的和．此时$\frac{m}{n}$的幂，次数越高值越小．级数收敛很快．如果要求的小数位数不多，取少数几项即可．

§ 135

正切和余切都是正弦与余弦的比，所以有了正弦和余弦就可以算出正切和余切．但大数的相乘相除太繁，所以我们还是要想法导出正切和余切的方便的展开式．我们有

$$\operatorname{tg}v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{v - \frac{v^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{v^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{v^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \cdots}{1 - \frac{v^2}{1\cdot2} + \frac{v^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{v^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \cdots}$$

$$\operatorname{ctg}v = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1 - \frac{v^2}{1\cdot2} + \frac{v^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{v^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \cdots}{v - \frac{v^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{v^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{v^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \cdots}$$

如果 $v = \frac{m}{n}90°$，那么类似于上一节，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{m}{n}90° = {} & \frac{2mn}{n^2 - m^2}\cdot 0.6366197723675 \\ & + \frac{m}{n}\cdot 0.2975567820597 \\ & + \frac{m^3}{n^3}\cdot 0.0186886502773 \\ & + \frac{m^5}{n^5}\cdot 0.0018424752034\end{aligned}$$

$$+\frac{m^7}{n^7}\cdot 0.0001975800714$$

$$+\frac{m^9}{n^9}\cdot 0.0000216977245$$

$$+\frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0.0000024011370$$

$$+\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0.0000002664132$$

$$+\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0.0000000295864$$

$$+\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0.0000000032867$$

$$+\frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0.0000000003651$$

$$+\frac{m^{21}}{n^{21}}\cdot 0.0000000000405$$

$$+\frac{m^{23}}{n^{23}}\cdot 0.0000000000045$$

$$+\frac{m^{25}}{n^{25}}\cdot 0.0000000000005$$

$$\operatorname{ctg}\frac{m}{n}90^\circ = +\frac{n}{m}\cdot 0.6366197723675$$

$$-\frac{4mn}{4n^2-m^2}\cdot 0.3183098861837$$

$$-\frac{m}{n}\cdot 0.2052888894145$$

$$-\frac{m^3}{n^3}\cdot 0.0065510747882$$

$$-\frac{m^5}{n^5}\cdot 0.0003450292554$$

$$-\frac{m^7}{n^7}\cdot 0.0000202791060$$

$$-\frac{m^9}{n^9}\cdot 0.0000012366527$$
$$-\frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0.0000000764959$$
$$-\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0.0000000047597$$
$$-\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0.0000000002969$$
$$-\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0.0000000000185$$
$$-\frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0.0000000000011.$$

这两个级数的导出方法见 § 197.

§ 136

前面讲了，有了半直角以内的角的正弦和余弦，我们就可以写出任何一个更大的角的正弦和余弦. 事实上，用不了那么多，有了 30°以内的角的正弦和余弦，用加法和减法我们就可以求出所有更大的角的正弦和余弦. 令 § 130 公式中的 $y=30°$，由于 $\sin 30°=\frac{1}{2}$，我们得到

$$\cos z=\sin(30°+z)+\sin(30°-z),$$

和

$$\sin z=\cos(30°-z)-\cos(30°+z);$$

这样一来，由角 z 和 $30°-z$ 的正弦和余弦，我们得到

$$\sin(30°+z)=\cos z-\sin(30°-z)$$

和

$$\cos(30°+z)=\cos(30°-z)-\sin z.$$

由此我们可以得到 30°到 60°的正弦和余弦，也就可以得到一切更

大的角的正弦和余弦.

§ 137

也可以用类似的方法来求正切和余切. 由

$$\mathrm{tg}(a+b)=\frac{\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b}{1-\mathrm{tg}a\mathrm{tg}b}$$

得

$$\mathrm{tg}2a=\frac{2\mathrm{tg}a}{1-(\mathrm{tg}a)^2},\quad \mathrm{ctg}2a=\frac{\mathrm{ctg}a-\mathrm{tg}a}{2},$$

利用这两个等式, 由小于 30°的弧的正切和余切, 我们可以求出直到 60°的弧的所有角的正切和余切.

如果 $a=30°-b$, 则 $2a=60°-2b$, $\mathrm{ctg}2a=\mathrm{tg}(30°+2b)$. 从而

$$\mathrm{tg}(30°+2b)=\frac{\mathrm{ctg}(30°-b)-\mathrm{tg}(30°-b)}{2}$$

利用这个公式也可以得到大于 30°的弧的正切和余切.

正割和余割可以从正切用减法得到. 这只需利用

$$\csc z=\mathrm{ctg}\frac{z}{2}-\mathrm{ctg}z$$

和

$$\sec z=\mathrm{ctg}\left(45°-\frac{z}{2}\right)-\mathrm{tg}z.$$

从以上所讲, 正弦表的造法应该清楚了.

§ 138

我们再一次应用 § 133 的公式. 令弧 z 为无穷小, 令 n 为无穷大数 i, 从而 iz 为有限数 v. 这样一来, 我们有 $nz=v$, $z=\frac{v}{i}$,

从而 $\sin z=\frac{v}{i}$，$\cos z=1$. 将这些代人 § 133 节公式，得

$$\cos v=\frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}+\left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}}{2}$$

和

$$\sin v=\frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}-\left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}}{2\sqrt{-1}}.$$

前一章中我们看到

$$\left(1+\frac{z}{i}\right)^{i}=e^{z},$$

e 为自然对数的底. 分别令 z 等于 $+v\sqrt{-1}$和 $-v\sqrt{-1}$，我们得到

$$\cos v=\frac{e^{+v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

和

$$\sin v=\frac{e^{+v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

从这两个方程得

$$e^{+v\sqrt{-1}}=\cos v+\sqrt{-1}\sin v$$

和

$$e^{-v\sqrt{-1}}=\cos v-\sqrt{-1}\sin v.$$

即虚指数量可以用实弧的正弦和余弦表示.

§ 139

令 § 133 公式中的 n 为无穷小数，即 $n=\frac{1}{i}$，i 为无穷大，则

$$\cos nz=\cos\frac{z}{i}=1,\ \sin nz=\sin\frac{z}{i}=\frac{z}{i}.$$

这是因为 i 为无穷大，所以$\frac{z}{i}$是接近于消失的弧，这种弧的正弦等于弧本身，余弦等于 1. 代入 § 133 的公式，得

$$1=\frac{(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}}+(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}}}{2}$$

和

$$\frac{z}{i}=\frac{(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}}-(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}}}{2\sqrt{-1}}$$

§ 125 节中证明了，取自然对数，我们有

$$\log(1+x)=i(1+x)^{\frac{1}{i}}-i,$$

或者换 $1+x$ 为y，我们有

$$y^{\frac{1}{i}}=\frac{1}{i}\log y+1$$

现在先用 $\cos z+\sqrt{-1}\sin z$，再用 $\cos z-\sqrt{-1}\sin z$ 代换 y，结果相加，得

$$1=\frac{1+\frac{1}{i}\log(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)+1+\frac{1}{i}\log(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)}{2}$$

$=1$,

由于有对数的项消失，成为 $1=1$，因而从这一方程我们一无所获. 结果相减，得

$$\frac{z}{i}=\frac{\frac{1}{i}\log(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)-\frac{1}{i}\log(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)}{2\sqrt{-1}},$$

从而

$$z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{\cos z+\sqrt{-1}\sin z}{\cos z-\sqrt{-1}\sin z}.$$

由此我们看到，虚数的对数如何地化成了圆的弧.

§ 140

由于$\frac{\sin z}{\cos z}=\operatorname{tg} z$，从上节末的等式我们得到，弧 z 可用它的正切表示为

$$z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+\sqrt{-1}\operatorname{tg} z}{1-\sqrt{-1}\operatorname{tg} z}$$

§ 123 我们看到

$$\log\frac{1+x}{1-x}=\frac{2x}{1}+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+\cdots,$$

令 $x=\sqrt{-1}\operatorname{tg} z$，得

$$z=\frac{\operatorname{tg} z}{1}-\frac{\operatorname{tg}^3 z}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 z}{5}-\frac{\operatorname{tg}^7 z}{7}+\cdots$$

记正切为 t 的弧为 arctg$t$①，即 $t=\operatorname{tg} z$ 时

$$z=\operatorname{arctg} t,$$

则

$$z=\operatorname{arctg} t=\frac{t}{1}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}-\cdots.$$

45°或$\frac{\pi}{4}$的正切等于 1，从而

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

莱布尼兹最先导出这个级数，并用它作圆周长的表示式.

§ 141

我们来实践一下用上节所给级数法求弧长．为此我们将级数

① 欧拉用的符号为 $A\cdot tang t$．——中译者

中的正切 t 换成一个足够小的分数，比如$\frac{1}{10}$，则对应的弧

$$z=\frac{1}{10}-\frac{1}{3000}+\frac{1}{500000}-\cdots.$$

不难用小数写出这个级数的近似值．但从求得的这段弧长，我们得不到关于圆周长的任何东西，因为我们完全不知道正切为$\frac{1}{10}$的弧与整个圆周的比．为了同时求得圆周长，我们找这样一段弧，它本身是圆周的若干分之一，它的正切小而且容易表示，通常认为正切为$\frac{1}{\sqrt{3}}$的 $30°$弧是合乎要求的，因为与圆周有公度的更小的弧，其正切都是太过复杂的无理数．由 $30°=\frac{\pi}{6}$得

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\cdot 3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\cdot 3^2\sqrt{3}}-\cdots$$

和

$$\pi=\frac{2\sqrt{3}}{1}-\frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3}+\frac{2\sqrt{3}}{5.3^2}-\frac{2\sqrt{3}}{7\cdot 3^3}+\cdots.$$

§ 126 所列的那个 π 值，就是利用这个级数，化费了难以想象的那么多劳动算出来的．

§ 142

上节所提那劳动量之所以巨大，这一则因为每项都是无理数，再则因为每项都是前项的约三分之一．为降低劳动量，我们取 $45°$弧或$\frac{\pi}{4}$．表示它的级数为

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

这个级数收敛极慢．我们取这段弧，不做更改，但分它为 a，b 两部分，使得 $a+b=\frac{\pi}{4}=45°$．由

$$\mathrm{tg}(a+b)=\frac{\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b}{1-\mathrm{tg}a\cdot\mathrm{tg}b}$$

得

$$1-\mathrm{tg}a\cdot\mathrm{tg}b=\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b.$$

从而

$$\mathrm{tg}b=\frac{1-\mathrm{tg}a}{1+\mathrm{tg}a}.$$

这样，令 $\mathrm{tg}a=\frac{1}{2}$，则 $\mathrm{tg}b=\frac{1}{3}$. 弧 a 和弧 b 的级数都是有理的，且其收敛速度比原来要快得多. 它们的和就是$\frac{\pi}{4}$的值. 即

$$\pi=4\begin{Bmatrix}\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{9\cdot 2^9}-\cdots \\ \frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}-\cdots\end{Bmatrix}.$$

用这样两个级数求半圆周 π，比用原来的一个级数，速度要快得多.

第九章

二项求因式

§ 143

我们讲了用解方程的方法求整函数的线性因式．也即讲了求整函数

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\cdots$$

的状如 $p-qz$ 的因式的方法，当 $p-qz$ 是函数 $\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\cdots$ 的因式时，令 $z=\frac{p}{q}$，则 $p-qz=0$，从而整个函数为零．也即，如果 $p-qz$ 是整函数

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\cdots$$

的因式，则

$$\alpha+\frac{\beta p}{q}+\frac{\gamma p^2}{q^2}+\frac{\delta p^3}{q^3}+\frac{\varepsilon p^4}{q^4}+\cdots=0$$

反之，这个方程的所有的根，给出整函数

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\cdots$$

的所有因式 $p-qz$．显然，线性因式的个数，由 z 的最高幂的次数决定．

§ 144

但上述方法不大适用于求虚线性因式. 因而本章我们讲一种常常可以用来求虚线性因式的特殊方法. 由于虚线性因式是成对出现的, 每对乘积是实的, 所以我们先考察其一次因式是虚的那种二次因式, 即状如

$$p - qz + rz^2$$

的实二次因式. 如果函数 $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \cdots$ 的因式, 都是这种类型的二次三项式 $p - qz + rz^2$, 那么它的根就都是虚的.

§ 145

如果 $4pr > q^2$, 或

$$\frac{q}{2\sqrt{pr}} < 1,$$

则三项式 $p - qz + rz^2$ 的因式是虚的. 因为角的正弦和余弦都是小于 1 的, 所以如果 $\frac{q}{2\sqrt{pr}}$ 等于某个角的正弦或余弦, 则三项式 $p - qz + rz^2$ 的两个因式都是虚的. 设

$$\frac{q}{2\sqrt{pr}} = \cos\varphi \text{ 或 } q = 2\sqrt{pr}\cos\varphi,$$

则三项式 $p - qz + rz^2$ 的因式是虚的, 为免得无理性带来麻烦, 我们假定三项式的形状为 $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$, 它的虚因式为

$$qz - p\ (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) \text{ 和 } qz - p\ (\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi).$$

显然, 如果 $\cos\varphi = \pm 1$, 则 $\sin\varphi = 0$, 两个因式相等, 都是实的.

§ 146

对整函数 $\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\cdots$，如果求出了其因式 $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ 中的字母 p，q 和角度 φ，也就等于求出了它的虚线性因式．这时虚线性因式为

$qz-p\ (\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$ 和 $qz-p\ (\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)$．

因此将

$$z=\frac{p}{q}\ (\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi),$$

$$z=\frac{p}{q}\ (\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)$$

代入所给函数，都得零．每做一次这样的代入，我们都得到关于分数$\frac{p}{q}$和弧 φ 的两个方程．

§ 147

这种代入，看上去可能会认为它太麻烦，但利用前一章所得结果，做起来相当容易．事实上，将 z 的上述两个表达式代入 z 的幂，利用前章公式

$$(\cos\varphi\pm\sqrt{-1}\sin\varphi)^n=\cos n\varphi\pm\sqrt{-1}\sin n\varphi,$$

我们得到下面的公式

将第一式代入，得

$$z=\frac{p}{q}\ (\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$$

$$z^2=\frac{p^2}{q^2}\ (\cos2\varphi+\sqrt{-1}\sin2\varphi)$$

$$z^3=\frac{p^3}{q^3}\ (\cos3\varphi+\sqrt{-1}\sin3\varphi)$$

将第二式代入，得

$$z=\frac{p}{q}\ (\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)$$

$$z^2=\frac{p^2}{q^2}\ (\cos2\varphi-\sqrt{-1}\sin2\varphi)$$

$$z^3=\frac{p^3}{q^3}\ (\cos3\varphi-\sqrt{-1}\sin3\varphi)$$

$z^4 = \frac{p^4}{q^4}\ (\cos 4\varphi + \sqrt{-1}\sin 4\varphi)$ | $z^4 = \frac{p^4}{q^4}\ (\cos 4\varphi - \sqrt{-1}\sin 4\varphi)$

……

为简单起见，记$\frac{p}{q} = r$，那么代入之后，得到如下的两个方程

$$0 = \begin{cases} \alpha + \beta r\cos\varphi + \gamma r^2\cos 2\varphi + \delta r^3\cos 3\varphi + \cdots \\ \quad + \beta r\sqrt{-1}\sin\varphi + \gamma r^2\sqrt{-1}\sin 2\varphi + \delta r^3\sqrt{-1}\sin 3\varphi + \cdots \end{cases}$$

$$0 = \begin{cases} \alpha + \beta r\cos\varphi + \gamma r^2\cos 2\varphi + \delta r^3\cos 3\varphi + \cdots \\ \quad - \beta r\sqrt{-1}\sin\varphi - \gamma r^2\sqrt{-1}\sin 2\varphi - \delta r^3\sqrt{-1}\sin 3\varphi - \cdots \end{cases}$$

§ 148

将这两个方程先相加，再相减，并在相减之后除以 $2\sqrt{-1}$，这样我们得到两个实方程

$$0 = \alpha + \beta r\cos\varphi + \gamma r^2\cos 2\varphi + \delta r^3\cos 3\varphi + \cdots,$$

$$0 = \quad \beta r\sin\varphi + \gamma r^2\sin 2\varphi + \delta r^3\sin 3\varphi + \cdots,$$

给了整函数

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \cdots,$$

我们立刻就可以写出这两个实方程，这只需先置

$$z^n = r^n\cos n\varphi$$

再置

$$z^n = r^n\sin n\varphi,$$

因为 $\sin 0\varphi = 0$，$\cos 0\varphi = 1$，所以 z^n在第一个方程中为 1，在第二个方程中为 0. 如果我们能够从这两个方程求出未知数 r 和 φ，那么由于 $r = \frac{p}{q}$，我们就可以得到所给函数的三项式因式 $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$. 从而也就得到了虚线性因式.

§ 149

分别乘上节第一、二两个方程以 $\sin m\varphi$ 和 $\cos m\varphi$，积相加相减，得

$$0=\alpha\sin m\varphi+\beta r\sin(m+1)\varphi+\gamma r^2\sin(m+2)\varphi+\delta r^3\sin(m+3)\varphi+\cdots,$$

$$0=\alpha\sin m\varphi+\beta r\sin(m-1)\varphi+\gamma r^2\sin(m-2)\varphi+\delta r^3\sin(m-3)\varphi+\cdots.$$

如果颠倒一下，改为乘 $\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$，则加减之后得：

$$0=\alpha\cos m\varphi+\beta r\cos(m-1)\varphi+\gamma r^2\cos(m-2)\varphi+\delta r^3\cos(m-3)\varphi+\cdots,$$

$$0=\alpha\cos m\varphi+\beta r\cos(m+1)\varphi+\gamma r^2\cos(m+2)\varphi+\delta r^3\cos(m+3)\varphi+\cdots.$$

这四个方程中任何两个都可以决定未知数 r 和 φ. 因为这样的两个方程常常有几组不同的解，我们也就得到两样多不同的三项式因式，事实上是所求三项式因式全体.

§ 150

为了进一步弄清这些公式的应用，我们来考察几种较为常见的函数的三项式因式. 所得结果可供需要时套用. 先求函数

$$a^n+z^n$$

的状如

$$p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$$

的三项式因式. 令 $r=\frac{p}{q}$，我们得到方程

$$0=a^n+r^n\cos n\varphi \text{ 和 } 0=r^n\sin n\varphi.$$

从后一个方程得

$$\sin n\varphi = 0.$$

从而 $n\varphi$ 等于 $(2K+1)\pi$ 或 $2K\pi$，K 为整数. 我们把这两种情况分开，是因为它们的余弦不同 $\cos(2K+1)\pi = -1$，$\cos 2K\pi = +1$. 显然应取第一种情形

$$n\varphi = (2K+1)\pi,$$

因为它给出 $\cos n\varphi = -1$，从而

$$0 = a^n - r^n.$$

进而

$$r = a = \frac{p}{q}.$$

这样

$$p = a,\ q = 1,\ \varphi = \frac{(2K+1)\pi}{n},$$

从而函数 $a^n + z^n$ 的因式为

$$a^2 - 2az\cos\frac{(2K+1)\pi}{n} + z^2,$$

K 可以为任何整数，也即可以得到很多因式. 但由 $\cos(2\pi \pm \varphi) = \cos\varphi$ 知，$2K+1$ 增大到大于 n 时，因式开始重复，所以因式的个数可以很多，但不是无穷. 这一点从下而的例子可以看得更清楚. 再一点，如果 n 为奇数，则当 $2K+1 = n$ 时得到完全平方 $a^2 + 2az + z^2$. 但完全平方 $(a+z)^2$ 不是函数 $a^n + z^n$ 的因式. 这是因为（根据§148）由 $(a+z)^2$ 我们只能得到一个方程.

例 为看得更清楚，我们列出几种情形，并按 n 的奇偶分为两类

$n=1$ 时，函数为 $a+z$	$n=2$ 时，函数为 a^2+z^2

因式为 $a+z$	因式为 a^2+z^2
$n=3$ 时，函数为 a^3+z^3 因式为 $a^2-2az\cos\frac{\pi}{3}+z^2$ $a+z$	$n=4$ 时，函数为 a^4+z^4 因式为 $a^2-2az\cos\frac{\pi}{4}+z^2$ $a^2-2az\cos\frac{3\pi}{4}+z^2$
$n=5$ 时，函数为 a^5+z^2 因式为 $a^2-2az\cos\frac{\pi}{5}+z^2$ $a^2-2az\cos\frac{3\pi}{5}+z^2$ $a+z$	$n=6$ 时，函数为 a^6+z^6 因式为 $a^2-2az\cos\frac{\pi}{6}+z^2$ $a^2-2az\cos\frac{3\pi}{6}+z^2$ $a^2-2az\cos\frac{5\pi}{6}+z^2$

从这些例子我们看到将 $2K+1$ 换为不大于指数 n 的各个奇数，就得到所有的因式. 得到完全平方时，因式为这完全平方的方根.

§ 151

在函数

$$a^n-z^n$$

的状如

$$p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$$

的三项式因式中，令 $r=\frac{p}{q}$，则

$$0=a^n-r^n\cos n\varphi,\ 0=r^n\sin n\varphi.$$

我们又得到

$$\sin n\varphi=0,$$

即 $n\varphi=(2K+1)\pi$ 或 $n\varphi=2K\pi$. 这里应该取第二个值，使 $\cos n\varphi=+1$，从而得到

$$0=a^n-r^n,\ r=\frac{p}{q}=a.$$

这样一来，我们就有

$$p=a,\ q=1,\ \varphi=\frac{2K\pi}{n}.$$

进而得到所给函数的三项式因式为

$$a^2-2az\cos\frac{2K\pi}{n}+z^2.$$

令该式中的 $2K$ 取不大于 n 的各个偶数，我们就得到所有因式. 关于完全平方因式，我们照上节的办法处理. 首先 $K=0$ 时得 $a^2-2az+z^2$，由此得到方根 $a-z$. 类似地，如果 n 是偶数 $2K=n$，则我们得到 $a^2+2az+z^2$，从而 $a+z$ 是 a^n-z^n 的因式.

例 跟前节的例一样，按数 n 的奇偶分为两类

$n=1$ 时，函数为 $a-z$ 因式为 $a-z$	$n=2$ 时，函数为 a^2-z^2 因式为 $a-z$ $a+z$

$n=3$ 时，函数为 a^3-z^3 因式为 $a-z$ $a^2-2az\cos\frac{2\pi}{3}+z^2$	$n=4$ 时，函数为 a^4-z^4 因式为 $a-z$ $a^2-2az\cos\frac{2\pi}{4}+z^2$ $a+z$
$n=5$ 时，函数为 a^5-z^5 因式为 $a-z$ $a^2-2az\cos\frac{2\pi}{5}+z^2$ $a^2-2az\cos\frac{4\pi}{5}+z^3$	$n=6$ 时，函数为 a^6-z^6 因式为 $a-z$ $a^2-2az\cos\frac{2\pi}{6}+z^2$ $a^2-2az\cos\frac{4\pi}{6}+z^2$ $a+z$

§ 152

我们说过，每一个整函数都可以表示成实线性和实二次因式的乘积．前面举的是一些具体实现的例子．也即我们能够把状如 $a^n \pm z^n$ 的任何次数的整函数分解成实线性和实二次因式的乘积．现在我们转向更复杂的状如 $\alpha+\beta z^n+\gamma z^{2n}$的函数．如果能把它分解成状如 $\eta+\theta z^n$ 的两个实因式，那就成了前两节讲过的情形．下面讲另外情形的 $\alpha+\beta z^n+\gamma z^{2n}$的分解．

§ 153

考虑不能分解成状如 $\eta+\theta z^n$ 的两个实因式乘积的函数

$$a^{2n}-2a^nz^n\cos g+z^{2n}.$$

假定它的一个实二次因式为

$$p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2,$$

那么令 $r=\frac{p}{q}$，我们得到两个方程

$$0=a^{2n}-2a^nr^n\cos g\cos n\varphi+r^{2n}\cos 2n\varphi$$

和

$$0=-2a^nr^n\cos g\sin n\varphi+r^{2n}\sin 2n\varphi.$$

用§ 149 的方法，置 $m=2n$。将第一个方程换成

$$0=a^{2n}\sin 2n\varphi-2a^nr^n\cos g\sin n\varphi.$$

这个方程与第二个方程联立，得

$$r=a.$$

从而

$$\sin 2n\varphi=2\cos g\sin n\varphi.$$

但

$$\sin 2n\varphi=2\sin n\varphi\cos n\varphi$$

两式比较，得

$$\cos n\varphi=\cos g.$$

由 $\cos(2K\pi\pm g)=\cos g$ 得

$$n\varphi=2K\pi\pm g,\quad \varphi=\frac{2K\pi\pm g}{n}.$$

这样我们就得到了，所给函数的二次因式的一般形状为

$$a^2-2az\cos\frac{2K\pi\pm g}{n}+z^2,$$

让 $2K$ 依次等于不大于 n 的各个偶数，就得到所有的因式.

例 为弄清因式的具体求法，我们考虑 n 为 1，2，3，4，……的情形.

函数 $a^2-2az\cos g+z^2$ 的因式为

$$a^2-2az\cos g+z^2$$

函数 $a^4-2a^2z^2\cos g+z^4$ 的因式为

$$a^2-2az\cos\frac{g}{2}+z^2$$

$$a^2-2az\cos\frac{2\pi\pm g}{2}+z^2 \text{ 或 } a^2+2az\cos\frac{g}{2}+z^2$$

函数 $a^6-2a^3z^3\cos g+z^6$ 的因式为

$$a^2-2az\cos\frac{g}{3}+z^2$$

$$a^2-2az\cos\frac{2\pi-g}{3}+z^2$$

$$a^2-2az\cos\frac{2\pi+g}{3}+z^2$$

函数 $a^8-2a^4z^4\cos g+z^8$ 的因式为

$$a^2-2az\cos\frac{g}{4}+z^2$$

$$a^2-2az\cos\frac{2\pi-g}{4}+z^2$$

$$a^2-2az\cos\frac{2\pi+g}{4}+z^2$$

$$a^2-2az\cos\frac{4\pi\pm g}{4}+z^2 \text{ 或 } a^2+2az\cos\frac{g}{4}+z^2$$

函数 $a^{10}-2a^5z^5\cos g+z^{10}$ 的因式为

$$a^2-2az\cos\frac{g}{5}+z^2$$

$$a^2-2az\cos\frac{2\pi-\vartheta}{5}+z^2$$
$$a^2-2az\cos\frac{2\pi+\vartheta}{5}+z^2$$
$$a^2-2az\cos\frac{4\pi-\vartheta}{5}+z^2$$
$$a^2-2az\cos\frac{4\pi+\vartheta}{5}+z^2.$$

这是证实整函数都可以分解成实的线性和二次因式的又一批例子.

§ 154

接下去我们考虑函数

$$\alpha+\beta z^n+\gamma z^{2n}+\delta z^{3n},$$

它必定有一个状如 $\eta+\theta z^n$ 的因式. 这个因式的实线性和实二次因式的求法,我们已经讲过;它的另一个因式,形状为 $\iota+\chi z^n+\lambda z^{2n}$,这个因式的实线性和实二次因式的求法是上节的内容.

下面考虑函数

$$\alpha+\beta z^n+\gamma z^{2n}+\delta z^{3n}+\varepsilon z^{4n},$$

它必定可分解成两个状如 $\eta+\theta z^n+\iota z^{2n}$的因式,这每一个我们又都可以把它分解成实线性和实二次因式.

再考虑函数

$$\alpha+\beta z^n+\gamma z^{2n}+\delta z^{3n}+\varepsilon z^{4n}+\zeta z^{5n},$$

它必定有一个状如 $\eta+\theta z^n$ 的因式,它的另一个因式是我们刚考虑过的. 因而这个函数可以分解成实线性和实二次因式. 如果对每个整函数都可以分解成实线性和实二次因式的乘积这一点有过什么怀疑,那么现在可以完全消除了.

§ 155

我们可以把分解因式推广到无穷级数上去．例如，我们有

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots=e^x,$$

还有

$$e^x=\left(1+\frac{x}{i}\right)^i,$$

其中 i 是无穷大数．相比较，得到级数

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

有无穷多个线性因式，它们都等于 $1+\frac{x}{i}$．减去级数的第一项，我们得到

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots=e^x-1=\left(1+\frac{x}{i}\right)^i-1,$$

置

$$a=1+\frac{x}{i},\ n=i,\ z=1,$$

再与 § 151 的表达式相比较，我们看到：去掉第一项所得级数，其因式的形状都为

$$\left(1+\frac{x}{i}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{i}\right)\cos\frac{2K\pi}{i}+1,$$

让 $2K$ 依次等于所有的偶数，我们就得到去掉第一项所得级数的所有因式．但是当 $2K=0$ 时，因式为完全平方 $\frac{x^2}{i^2}$．前面说过，此时只取方根 $\frac{x}{i}$．这就是说，x 是 e^x-1 的因式，这从级数本身也是看得清楚的．求其余的因式时，我们应注意弧 $\frac{2K\pi}{i}$ 是无穷小数．根据 § 134 我们有

$$\cos\frac{2K\pi}{i}=1-\frac{2K^2\pi^2}{i^2},$$

后面的项都因 i 为无穷大而略去．从而 x 以外的因式的形状都为

$$\frac{x^2}{i^2}+\frac{4K^2}{i^2}\pi^2+\frac{4K^2\pi^2}{i^3}x.$$

从而 e^x-1 以

$$1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{4K^2\pi^2}$$

为因式．由此得到，表达式

$$e^x-1=x\left(1+\frac{x}{1\cdot2}+\frac{x^2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots\right)$$

在 x 之外的无穷多个因式为

$$\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{36\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{64\pi^2}\right)\cdots.$$

§ 156

这每一个因式中都含有$\frac{x}{i}$，因式个数为$\frac{1}{2}i$，从而因式相乘产生一个为$\frac{x}{2}$的项，所以$\frac{x}{i}$虽为无穷小，但不能略去，为方便计，我们考虑 e^x-e^{-x}．由

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots,$$

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots$$

得

$$e^x-e^{-x}=\left(1+\frac{x}{i}\right)^i-\left(1-\frac{x}{i}\right)^i=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\right.$$

$\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\cdots)$.

记

$$n=i,\ a=1+\frac{x}{i},\ z=1-\frac{x}{i},$$

根据§151的结果，得该级数的因式

$$a^2-2az\cos\frac{2K\pi}{n}+z^2=2+\frac{2x^2}{i^2}-2\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2K\pi}{i}=$$

$$\frac{4x^2}{i^2}+\frac{4K^2\pi^2}{i^2}-\frac{4K^2\pi^2x^2}{i^4}.$$

这里利用了

$$\cos\frac{2K\pi}{i}=1-\frac{2K^2\pi^2}{i^2}.$$

因而函数 e^x-e^{-x}被

$$1+\frac{x^2}{K^2\pi^2}-\frac{x^2}{i^2}$$

除得尽．我们略去该式中的$\frac{x^2}{i^2}$，因为即使乘上 i，它也还是无穷小．又利用前面的结果，知 $K=0$ 时因式为 x．依次写出 K 等于0，1，2，3，…时的因式，得

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

$$=x\left(1+\frac{x^2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\cdots\right)$$

这里利用乘因式以相应常数的方法，使得它们具有现在这样的形状．因式相乘时，其展开式的第一项为 x．

§ 157

同样地，我们有

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots=\frac{\left(1+\frac{x}{i}\right)^i+\left(1-\frac{x}{i}\right)^i}{2}.$$

令

$$a=1+\frac{x}{i},\ z=1-\frac{x}{i},\ n=i,$$

再与 a^n+z^n 的因式相比较，我们得到这里的因式

$$a^2-2az\cos\frac{2K+1}{i}\pi+z^2=2+\frac{2x^2}{i^2}-2\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2K+1}{i}\pi.$$

由

$$\cos\frac{2K+1}{i}\pi=1-\frac{(2K+1)^2\pi^2}{2i^2}$$

得因式的形状为

$$\frac{4x^2}{i^2}+\frac{(2K+1)^2\pi^2}{i^2},$$

我们略去了分母为 i^4 的项.

$$1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

的每一个因式的形状都应该为 $1+\alpha x^2$. 为化求得的因式为这种形状，我们除它以$\frac{(2K+1)^2\pi^2}{i^2}$，得

$$1+\frac{4x^2}{(2K+1)^2\pi^2}.$$

令 $2K+1$ 依次取所有的奇数，得到无穷乘积形式

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$$

$$= \left(1 + \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\cdots.$$

§ 158

x 为虚数时，前两节的指数表达式可以用实弧的正弦和余弦表示．事实上，令 $x = z\sqrt{-1}$，则

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin z = z - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{z^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots,$$

该表达式可以表示成无穷乘积

$$z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{25\pi^2}\right)\cdots,$$

或

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{3\pi}\right)\cdots.$$

我们看到，只要弧 z 的长度使任何一个因式为零，也即只要 $z = 0$，$z = \pm\pi$，$z = \pm 2\pi\cdots$，或 $z = \pm K\pi$ 的时候，K 为任何整数，这段弧的正弦就为零．反之亦可以此为根据写出所求因式．

类似地，由

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} = \cos z$$

得

$$\cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{49\pi^2}\right)\cdots,$$

或者将每个因式再分解，得

$$\cos z = \left(1-\frac{2z}{\pi}\right)\left(1+\frac{2z}{\pi}\right)\left(1-\frac{2z}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2z}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2z}{5\pi}\right)$$

$$\left(1+\frac{2z}{5\pi}\right)\cdots.$$

由此我们看到 $z=\pm\frac{2K+1}{2}\pi$ 时 $\cos z=0$. 这是我们熟悉的余弦性质.

§ 159

用§ 153 的方法，也可以将

$$e^{x}-2\cos g+e^{-x}=2\left(1-\cos g+\frac{x^{2}}{1\cdot 2}+\frac{x^{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\right)$$

表示成无穷个因式的乘积. 该表达式可以写为

$$\left(1+\frac{x}{i}\right)^{i}-2\cos g+\left(1-\frac{x}{i}\right)^{i}.$$

令

$$2n=i,\ a=1+\frac{x}{i},\ z=1-\frac{x}{i},$$

则其因式的形状都为

$$a^{2}-2az\cos\frac{2K\pi\pm g}{n}+z^{2}=2+\frac{2x^{2}}{i^{2}}$$

$$-2\left(1-\frac{x^{2}}{i^{2}}\right)\cos\frac{2\left(2K\pi\pm g\right)}{i}.$$

由

$$\cos\frac{2\left(2K\pi\pm g\right)}{i}=1-\frac{2\left(2K\pi\pm g\right)^{2}}{i^{2}}$$

进一步得到因式的形状为

$$\frac{4x^{2}}{i^{2}}+\frac{4\left(2K\pi\pm g\right)^{2}}{i^{2}},$$

或

$$1+\frac{x^2}{(2K\pi\pm g)^2}.$$

除所给表达式以 2（$1-\cos g$），使无穷级数的常数项为 1，写出所有的因式，得

$$\frac{e^x-2\cos g+e^{-x}}{2\ (1-\cos g)}=\left(1+\frac{x^2}{g^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(2\pi-g)^2}\right)$$

$$\left(1+\frac{x^2}{(2\pi+g)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(4\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(4\pi+g)^2}\right)\cdots.$$

将 x 换为 $z\sqrt{-1}$，则

$$\frac{\cos z-\cos g}{1-\cos g}=\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1+\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi-g}\right)$$

$$\left(1+\frac{z}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{z}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{z}{4\pi-g}\right)$$

$$\cdots$$

$$=1-\frac{z^2}{1\cdot2\ (1-\cos g)}+\frac{z^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\ (1-\cos g)}$$

$$-\frac{z^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\ (1-\cos g)}+\cdots.$$

这样，我们就求得了这个无穷级数的无穷乘积表达式.

§ 160

下面求函数

$$e^{b+x}\pm e^{c-x}$$

的无穷乘积表示. 先将它改写成

$$\left(1+\frac{b+x}{i}\right)^i\pm\left(1+\frac{c-x}{i}\right)^i,$$

再与

$$a^i\pm z^i$$

相比较.

$a^i \pm z^i$ 的因式为

$$a^2-2az\cos\frac{m\pi}{i}+z^2,$$

原式中符号为正时，m 取奇数，为负时，m 取偶数. 对无穷大 i 有

$$\cos\frac{m\pi}{i}=1-\frac{m^2\pi^2}{2i^2},$$

从而这因式的一般形状为

$$(a-z)^2+\frac{m^2\pi^2}{i^2}az.$$

我们这里

$$a=1+\frac{b+x}{i},\quad z=1+\frac{c-x}{i},$$

从而

$$(a-z)^2=\frac{(b-c+2x)^2}{i^2},$$

$$az=1+\frac{b+c}{i}+\frac{bc+(c-b)x-x^2}{i^2}.$$

代入一般形状因式，并乘以 i^2，得

$$(b-c)^2+4(b-c)x+4x^2+m^2\pi^2,$$

我们略去了分母中含 i 和含 i^2 的项，因为与留下的项相比，它们可以不计. 用 $(b-c)^2+m^2\pi^2$ 除得到的因式，得常数项为 1 的因式

$$1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{m^2\pi^2+(b-c)^2}.$$

§ 161

每个因式的常数项都为 1，因而应该用一个常数除函数 e^{b+x}

$\pm e^{c-x}$，使其展开式的常数项，或其本身 $x=0$ 时的值为 1. 这个常数为 $e^b \pm e^c$. 这样，我们要将它写为无穷乘积的函数为

$$\frac{e^{b+x} \pm e^{c-x}}{e^b \pm e^c}.$$

符号为正时，m 取奇数，乘积为

$$\frac{e^{b+x} + e^{c-x}}{e^b + e^c}$$

$$= \left(1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{\pi^2+(b-c)^2}\right)$$

$$\left(1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{9\pi^2+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{25\pi^2+(b-c)^2}\right)\cdots$$

符号为负时，m 取偶数，且 $m=0$ 时因式为方根，乘积为

$$\frac{e^{b+x} - e^{c-x}}{e^b - e^c}$$

$$= \left(1+\frac{2x}{b-c}\right)\left(1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{4\pi^2+(b-c)^2}\right)$$

$$\left(1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{16\pi^2+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)x+4x^2}{36\pi^2+(b-c)^2}\right)\cdots$$

§ 162

不失一般性，令 $b=0$，则

$$\frac{e^x + e^c e^{-x}}{1+e^c} = \left(1-\frac{4cx-4x^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{9\pi^2+c^2}\right)$$

$$\left(1-\frac{4cx-4x^2}{25\pi^2+c^2}\right)\cdots,$$

$$\frac{e^x - e^c e^{-x}}{1-e^c} = \left(1-\frac{2x}{c}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{4\pi^2+c^2}\right)$$

$$\left(1-\frac{4cx-4x^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{36\pi^2+c^2}\right)\cdots.$$

c 取负号时，得

$$\frac{e^{x}+e^{-c}e^{-x}}{1+e^{-c}}=\left(1+\frac{4cx+4x^{2}}{\pi^{2}+c^{2}}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^{2}}{9\pi^{2}+c^{2}}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^{2}}{25\pi^{2}+c^{2}}\right)\cdots,$$

$$\frac{e^{x}-e^{-c}e^{-x}}{1-e^{c}}=\left(1+\frac{2x}{c}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^{2}}{4\pi^{2}+c^{2}}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^{2}}{16\pi^{2}+c^{2}}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^{2}}{36\pi^{2}+c^{2}}\right)\cdots.$$

这样，我们得到了四个等式．一、三相乘，得

$$\frac{e^{2x}+e^{-2x}+e^{c}+e^{-c}}{2+e^{c}+e^{-c}},$$

换 $2x$ 为 y，得

$$\frac{e^{y}+e^{-y}+c^{c}+e^{-c}}{2+e^{c}+e^{-c}}$$

$$=\left(1-\frac{2cy-y^{2}}{\pi^{2}+c^{2}}\right)\left(1+\frac{2cy+y^{2}}{\pi^{2}+c^{2}}\right)\left(1-\frac{2cy-y^{2}}{9\pi^{2}+c^{2}}\right)\left(1+\frac{2cy+y^{2}}{9\pi^{2}+c^{2}}\right)\cdots,$$

一、四相乘，得

$$\frac{e^{2x}-e^{-2x}+e^{c}-e^{-c}}{e^{c}-e^{-c}},$$

换 $2x$ 为 y，得

$$\frac{e^{y}-e^{-y}+c^{c}-e^{-c}}{e^{c}-e^{-c}}$$

$$=\left(1+\frac{y}{c}\right)\left(1-\frac{2cy-y^{2}}{\pi^{2}+c^{2}}\right)\left(1+\frac{2cy+y^{2}}{4\pi^{2}+c^{2}}\right)\left(1-\frac{2cy-y^{2}}{9\pi^{2}+c^{2}}\right)\left(1+\frac{2cy+y^{2}}{16\pi^{2}+c^{2}}\right)\left(1-\frac{2cy-y^{2}}{25\pi^{2}+c^{2}}\right)\cdots.$$

二、三相乘，得

$$\frac{e^{c}-e^{-c}-e^{y}+e^{-y}}{e^{c}-e^{-c}}$$

$$= \left(1-\frac{y}{c}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{9\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{25\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{36\pi^2+c^2}\right)\cdots$$

同于前式中 c 取负号．最后，二、四相乘，得

$$\frac{e^y+e^{-y}-e^c-e^{-c}}{2-e^c-e^{-c}}$$

$$= \left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{36\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{36\pi^2+c^2}\right)\cdots.$$

§ 163

这四个等式不难用于圆函数．令

$$c=g\sqrt{-1},\quad y=v\sqrt{-1},$$

则

$$e^{v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}=2\cos v$$

$$e^{v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\sin v$$

$$e^{g\sqrt{-1}}+e^{-g\sqrt{-1}}=2\cos g$$

$$e^{g\sqrt{-1}}-e^{-g\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\sin g$$

这样一来，第一个等式成为

$$\frac{\cos v+\cos g}{1+\cos g}$$

$$= 1-\frac{v^2}{1\cdot2\,(1+\cos g)}+\frac{v^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\,(1+\cos g)}-\frac{v^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\,(1+\cos g)}+\cdots$$

$$= \left(1+\frac{2gv-v^2}{\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{9\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{9\pi^2-g^2}\right)$$

$$\left(1+\frac{2g\,v-v^2}{25\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2g\,v+v^2}{25\pi^2-g^2}\right)\cdots$$

$$=\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)$$

$$\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi+g}\right)\cdots$$

$$=\left(1-\frac{v^2}{(\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(\pi+g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(3\pi-g)^2}\right)\left[1-\frac{v^2}{(3\pi+g)^2}\right]$$

$$\left[1-\frac{v^2}{(5\pi-g)^2}\right]\left[1-\frac{v^2}{(5\pi+g)^2}\right]\cdots.$$

第四个等式成为

$$\frac{\cos v-\cos g}{1-\cos g}$$

$$=1-\frac{v^2}{1\cdot2\,(1-\cos g)}+\frac{v^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\,(1-\cos g)}-$$

$$\frac{v^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\,(1-\cos g)}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{v^2}{g^2}\right)\left(1+\frac{2g\,v-v^2}{4\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2g\,v+v^2}{4\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{2g\,v-v^2}{16\pi^2-g^2}\right)\left(1-\right.$$

$$\left.\frac{2g\,v+v^2}{16\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{2g\,v-v^2}{36\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2g\,v+v^2}{36\pi^2-g^2}\right)\cdots$$

$$=\left(1-\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1\right.$$

$$\left.+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi+g}\right)\cdots$$

$$=\left(1-\frac{v^2}{g^2}\right)\left[1-\frac{v^2}{(2\pi-g)^2}\right]\left[1-\frac{v^2}{(2\pi+g)^2}\right]\left[1-\frac{v^2}{(4\pi-g)^2}\right]\left[1\right.$$

$$\left.-\frac{v^2}{(4\pi+g)^2}\right]\cdots.$$

第二个等式成为

$$\frac{\sin g+\sin v}{\sin g}$$

$$= 1 + \frac{v}{\sin g} - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3\sin g} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\sin g} - \cdots$$

$$= \left(1 + \frac{v}{g}\right)\left(1 + \frac{2g\,v - v^2}{\pi^2 - g^2}\right)\left(1 - \frac{2g\,v + v^2}{4\pi^2 - g^2}\right)\left(1 + \frac{2g\,v - v^2}{9\pi^2 - g^2}\right)$$

$$\left(1 - \frac{2g\,v + v^2}{16\pi^2 - g^2}\right)\cdots$$

$$= \left(1 + \frac{v}{g}\right)\left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{2\pi - g}\right)\left(1 + \frac{v}{2\pi + g}\right)$$

$$\left(1 + \frac{v}{3\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{3\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{4\pi - g}\right)\cdots.$$

v 取负号时得第三个.

§ 164

§ 162 的表达式也可用于圆弧. 在

$$\frac{e^x + e^c e^{-x}}{1 + e^c} = \frac{(1 + e^{-c})(e^x + e^c e^{-x})}{2 + e^c + e^{-c}}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x} + e^{c-x} + e^{-c+x}}{2 + e^c + e^{-c}}$$

中置

$$c = g\sqrt{-1},\quad x = z\sqrt{-1},$$

得

$$\frac{\cos z + \cos(g - z)}{1 + \cos g} = \cos z + \frac{\sin g \sin z}{1 + \cos g}.$$

由于 $\frac{\sin g}{1 + \cos g} = \operatorname{tg}\frac{g}{2}$，我们有

$$\cos z + \operatorname{tg}\frac{g}{2}\sin z$$

$$= 1 + \frac{z}{1}\operatorname{tg}\frac{g}{2} - \frac{z^2}{1\cdot 2} - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\operatorname{tg}\frac{g}{2} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\operatorname{tg}\frac{g}{2} - \cdots$$

$$= \left(1 + \frac{4g\,z - 4z^2}{\pi^2 - g^2}\right)\left(1 + \frac{4g\,z - 4z^2}{9\pi^2 - g^2}\right)\left(1 + \frac{4g\,z - 4z^2}{25\pi^2 - g^2}\right)\cdots$$

$$= \left(1 + \frac{2z}{\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{\pi + g}\right)\left(1 + \frac{2z}{3\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{3\pi + g}\right)\left(1 + \frac{2z}{5\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{5\pi + g}\right)\cdots.$$

类似地，第二个等式左端分子分母同乘 $1 - e^{-c}$，得

$$\frac{e^{x} + e^{-x} - e^{c-x} - e^{-c+x}}{2 - e^{c} - e^{-c}},$$

令这里的 $c = g\sqrt{-1}$，$x = z\sqrt{-1}$，得

$$\frac{\cos z - \cos(g - z)}{1 - \cos g} = \cos z - \frac{\sin g \sin z}{1 - \cos g} = \cos z - \frac{\sin z}{\operatorname{tg}\frac{g}{2}}.$$

这样一来

$$\cos z - \operatorname{ctg}\frac{g}{2}\sin z$$

$$= 1 - \frac{z}{1}\operatorname{ctg}\frac{g}{2} - \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\operatorname{ctg}\frac{g}{2} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\operatorname{ctg}\frac{g}{2} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{2z}{g}\right)\left(1 + \frac{4gz - 4z^2}{4\pi^2 - g^2}\right)\left(1 + \frac{4gz - 4z^2}{16\pi^2 - g^2}\right)\left(1 + \frac{4gz - 4z^2}{36\pi^2 - g^2}\right)\cdots$$

$$= \left(1 - \frac{2z}{g}\right)\left(1 + \frac{2z}{2\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{2\pi + g}\right)\left(1 + \frac{2z}{4\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{4\pi + g}\right)\cdots.$$

如果令 $v = 2z$，或者 $z = \frac{1}{2}v$，我们得到

$$\frac{\cos\frac{g - v}{2}}{\cos\frac{g}{2}} = \cos\frac{v}{2} + \operatorname{tg}\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$

$$= \left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right)\left(1 + \frac{v}{3\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{3\pi + g}\right)\cdots$$

$$\frac{\cos\frac{g + v}{2}}{\cos\frac{g}{2}} = \cos\frac{v}{2} - \operatorname{tg}\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$

$$= \left(1-\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi+g}\right)\cdots$$

$$\frac{\sin\frac{g-v}{2}}{\sin\frac{g}{2}}=\cos\frac{v}{2}-\operatorname{ctg}\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$

$$= \left(1-\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi-g}\right)$$
$$\left(1-\frac{v}{4\pi+g}\right)\cdots$$

$$\frac{\sin\frac{g+v}{2}}{\sin\frac{g}{2}}=\cos\frac{v}{2}+\operatorname{ctg}\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$

$$= \left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi+g}\right)$$
$$\cdots$$

这些等式的构成规律都相当简单，并且是类似的．得到的这几个表达式相乘，也得到上节求出的表达式。

第十章

利用已知因式求无穷级数的和

§ 165

如果

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots = (1 + \alpha z)(1 + \beta z)(1 + \gamma z)(1 + \delta z)\cdots,$$

那么不管这些因式的个数有穷与否，它们的积都应该等于 $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots$. 从而，系数 A 等于单个量 α，β，…的和，即

$$A = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots;$$

系数 B 等于每两个之积的和，即

$$B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \cdots;$$

系数 C 等于每三个之积的和，即

$$C = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \cdots;$$

D 是每四个之积的和，E 是每五个之积的和，类推. 这是代数里面讲过了的.

§ 166

单个量的和 $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots$ 和每两个之积的和都是已经知道了的. 利用这两个和，我们可以求出平方和 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\cdots$. 平方和等于单个量之和的平方减去每两个之积的和的两倍. 用类似的方法可以求出三次、四次和更高次幂的和. 如果我们令

$$P=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\cdots$$
$$Q=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2+\cdots$$
$$R=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\varepsilon^3+\cdots$$
$$S=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4+\varepsilon^4+\cdots$$
$$T=\alpha^5+\beta^5+\gamma^5+\delta^5+\varepsilon^5+\cdots$$
$$V=\alpha^6+\beta^6+\gamma^6+\delta^6+\varepsilon^6+\cdots$$
$$\cdots\cdots$$

那么 P，Q，R，S，T，$V\cdots$就都可以用下面的方法，从 A，B，C，$D\cdots$求出：

$$P=A$$
$$Q=AP-2B$$
$$R=AQ-BP+3C$$
$$S=AR-BQ+CP-4D$$
$$T=AS-BR+CQ-DP+5E$$
$$V=AT-BS+CR-DQ+EP-6F$$
$$\cdots\cdots$$

可以直观地想象这些公式，并验证它们成立，严格的证明由微积分学给出.

§ 167

§ 156 我们求出了

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{x^2}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \cdots\right)$$

$$= x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{25\pi^2}\right)\cdots,$$

从而

$$1 + \frac{x^2}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \cdots)$$

$$= \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots.$$

令 $x^2 = \pi^2 z$，得

$$1 + \frac{\pi^2}{1\cdot2\cdot3}z + \frac{\pi^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}z^2 + \frac{\pi^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}z^3 + \cdots$$

$$= (1 + z)\left(1 + \frac{1}{4}z\right)\left(1 + \frac{1}{9}z\right)\left(1 + \frac{1}{16}z\right)\left(1 + \frac{1}{25}z\right)\cdots.$$

利用前面的记号，我们有

$$A = \frac{\pi^2}{6},\ B = \frac{\pi^4}{120},\ C = \frac{\pi^6}{5040},\ D = \frac{\pi^8}{362880},\ \cdots$$

和

$$P = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots$$

$$Q = 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{36^2} + \cdots$$

$$R = 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{36^3} + \cdots$$

$$S = 1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{36^4} + \cdots$$

$$T = 1 + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{16^5} + \frac{1}{25^5} + \frac{1}{36^5} + \cdots$$

……

利用前面的规则，从 A，B，C，D，…我们求得

$$P = \frac{\pi^2}{6}$$

$$Q = \frac{\pi^4}{90}$$

$$R = \frac{\pi^6}{945}$$

$$S = \frac{\pi^8}{9450}$$

$$T = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

……

§ 168

可见，当 n 为偶数时，状如

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

的任何一个级数，它的和都等于 π^n 与一个有理数的积．为了进一步清楚这些有理数，我们用一种更方便的形式写出一些这种级数的和

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{2^0}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{1} \pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{3} \pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots = \frac{2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 7} \cdot \frac{1}{3} \pi^6$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\cdots=\frac{2^6}{1\cdot2\cdot3\cdots9}\cdot\frac{3}{5}\pi^8$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\cdots=\frac{2^8}{1\cdot2\cdot3\cdots11}\cdot\frac{5}{3}\pi^{10}$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\cdots=\frac{2^{10}}{1\cdot2\cdot3\cdots13}\cdot\frac{691}{105}\pi^{12}$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\frac{1}{5^{14}}+\cdots=\frac{2^{12}}{1\cdot2\cdot3\cdots15}\cdot\frac{35}{1}\pi^{14}$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\frac{1}{5^{16}}+\cdots=\frac{2^{14}}{1\cdot2\cdot3\cdots17}\cdot\frac{3617}{15}\pi^{16}$$

$$1+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{3^{18}}+\frac{1}{4^{18}}+\frac{1}{5^{18}}+\cdots=\frac{2^{16}}{1\cdot2\cdot3\cdots19}\cdot\frac{43867}{21}\pi^{18}$$

$$1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\frac{1}{5^{20}}+\cdots=\frac{2^{18}}{1\cdot2\cdot3\cdots21}\cdot\frac{1222277}{55}\pi^{20}$$

$$1+\frac{1}{2^{22}}+\frac{1}{3^{22}}+\frac{1}{4^{22}}+\frac{1}{5^{22}}+\cdots=\frac{2^{20}}{1\cdot2\cdot3\cdots23}\cdot\frac{854513}{3}\pi^{22}$$

$$1+\frac{1}{2^{24}}+\frac{1}{3^{24}}+\frac{1}{4^{24}}+\frac{1}{5^{24}}+\cdots=\frac{2^{22}}{1\cdot2\cdot3\cdots25}\cdot\frac{1181820455}{273}\pi^{24}$$

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\frac{1}{5^{26}}+\cdots=\frac{2^{24}}{1\cdot2\cdot3\cdots27}\cdot\frac{76977927}{1}\pi^{26}$$

有方法继续写下去，所以写出这一部分，是因为其中看上去全无规律的序列 1，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{691}{105}$，$\frac{35}{1}$，…有着很大的用处.

§ 169

现在我们用同样的方式来处理 § 157 所求出的方程．在那里我们看到

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\cdots$$

$$= \left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\cdots,$$

置 $x^2=\frac{\pi^2}{4}z$，则

$$1+\frac{\pi^2}{1\cdot2\cdot4}z+\frac{\pi^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot4^2}z^2+\frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot4^3}z^3+\cdots$$

$$=(1+z)\left(1+\frac{1}{9}z\right)\left(1+\frac{1}{25}z\right)\left(1+\frac{1}{49}z\right)\cdots,$$

利用前面讲的，由

$$A=\frac{\pi^2}{1\cdot2\cdot4},\quad B=\frac{\pi^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot4^2},\quad C=\frac{\pi^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot4^3},\quad\cdots$$

和

$$P=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\cdots$$

$$Q=1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{49^2}+\frac{1}{81^2}+\cdots$$

$$R=1+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{25^3}+\frac{1}{49^3}+\frac{1}{81^3}+\cdots$$

$$S=1+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{25^4}+\frac{1}{49^4}+\frac{1}{81^4}+\cdots$$

……

得

$$P=\frac{1}{1}\cdot\frac{\pi^2}{2^3}$$

$$Q=\frac{2}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{\pi^4}{2^5}$$

$$R=\frac{16}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{\pi^6}{2^7}$$

$$S=\frac{272}{1\cdot2\cdot3\cdots7}\cdot\frac{\pi^8}{2^9}$$

$$T=\frac{7936}{1\cdot2\cdot3\cdots9}\cdot\frac{\pi^{10}}{2^{11}}$$

$$V=\frac{353792}{1\cdot2\cdot3\cdots11}\cdot\frac{\pi^{12}}{2^{13}}$$

$$W=\frac{22368256}{1\cdot2\cdot3\cdots13}\cdot\frac{\pi^{14}}{2^{15}}$$

…….

§ 170

从正整数幂的倒数和可以求出奇数幂的倒数和．置

$$M=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\cdots,$$

两边乘$\frac{1}{2^n}$，得

$$\frac{M}{2^n}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}+\cdots,$$

这是偶数幂的倒数和，从 M 中减去$\frac{M}{2^n}$，得

$$M-\frac{M}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}M=1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\cdots,$$

是奇数的倒数和．从 M 减去$\frac{M}{2^n}$的两倍，得

$$M-\frac{2M}{2^n}=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}M=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{6^n}+\cdots.$$

是正整数幂的倒数正负号交替时的和．即我们得到了下面三种级数的和

$$1\pm\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\pm\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}\pm\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}\pm\cdots,$$

$$1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots.$$

如果 n 为偶数，则和为 $A\pi^n$，A 为有理数．

§ 171

从 § 164 的表达式，我们也得到一些值得注意的级数的和. 在

$$\cos\frac{v}{2}+\operatorname{tg}\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}=\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi-g}\right)\cdots$$

中置 $v=\frac{x}{n}\pi$，$g=\frac{m}{n}\pi$，得

$$\left(1+\frac{x}{n-m}\right)\left(1-\frac{x}{n+m}\right)\left(1+\frac{x}{3n-m}\right)\left(1-\frac{x}{3n+m}\right)$$

$$\left(1+\frac{x}{5n-m}\right)\left(1-\frac{x}{5n+m}\right)\cdots$$

$$=\cos\frac{x\pi}{2n}+\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}\sin\frac{x\pi}{2n}$$

$$=1+\frac{x\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}-\frac{\pi^2x^2}{2\cdot 4n^2}-\frac{\pi^3x^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}+\frac{\pi^4x^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8n^4}+\cdots.$$

利用 § 165 的符号，我们有

$$A=\frac{\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n},\ B=-\frac{\pi^2}{2\cdot 4n^2},\ C=-\frac{\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n},$$

$$D=\frac{\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8n^4},\ E=\frac{\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10n^5}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n},\ \cdots.$$

这里

$$\alpha=\frac{1}{n-m},\ \beta=-\frac{1}{n+m},\ \gamma=\frac{1}{3n-m},\ \delta=-\frac{1}{3n+m},$$

$$\epsilon=\frac{1}{5n-m},\ \zeta=-\frac{1}{5n+m},\ \cdots.$$

§ 172

利用 § 166 的规则，得

$$P=\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}+\frac{1}{5n-m}-\frac{1}{5n+m}+\cdots$$

$$Q=\frac{1}{(n-m)^2}+\frac{1}{(n+m)^2}+\frac{1}{(3n-m)^2}+\frac{1}{(3n+m)^2}+\frac{1}{(5n-m)^2}+\frac{1}{(5n+m)^2}+\cdots$$

$$R=\frac{1}{(n-m)^3}-\frac{1}{(n+m)^3}+\frac{1}{(3n-m)^3}-\frac{1}{(3n+m)^3}+\frac{1}{(5n-m)^3}-\frac{1}{(5n+m)^3}+\cdots$$

$$S=\frac{1}{(n-m)^4}+\frac{1}{(n+m)^4}+\frac{1}{(3n-m)^4}+\frac{1}{(3n+m)^4}+\frac{1}{(5n-m)^4}+\frac{1}{(5n+m)^4}+\cdots$$

$$T=\frac{1}{(n-m)^5}-\frac{1}{(n+m)^5}+\frac{1}{(3n-m)^5}-\frac{1}{(3n+m)^5}+\frac{1}{(5n-m)^5}-\frac{1}{(5n+m)^5}+\cdots$$

$$V=\frac{1}{(n-m)^6}+\frac{1}{(n+m)^6}+\frac{1}{(3n-m)^6}+\frac{1}{(3n+m)^6}+\frac{1}{(5n-m)^6}+\frac{1}{(5n+m)^6}+\cdots$$

如果置 $\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=K$，那么像证明过的，我们得到

$$P=A=\frac{K\pi}{2n}=\frac{K\pi}{2n}$$

$$Q=\frac{(K^2+1)\ \pi^2}{4n^2}=\frac{(2K^2+2)\ \pi^2}{2\cdot4\cdot n^2}$$

$$R=\frac{(K^3+K)\ \pi^3}{8n^3}=\frac{(6K^3+6K)\ \pi^3}{2\cdot4\cdot6\cdot n^3}$$

$$S=\frac{(3K^4+4K^2+1)\ \pi^4}{48n^4}=\frac{(24K^4+32K^3+8)\ \pi^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot n^4}$$

$$T=\frac{(3K^5+5K^3+2K)\ \pi^5}{96n^5}=\frac{(120K^5+200K^3+80K)\ \pi^5}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot n^5}$$

……

§ 173

同样的，置§ 164 最后一个表达式

$$\cos\frac{v}{2}+\operatorname{ctg}\frac{g}{2}\sin\frac{v}{2}$$

$$=\left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi+g}\right)\cdots$$

中的 $v=\frac{x}{n}\pi$，$g=\frac{m}{n}\pi$，$\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=K$，从而 $\operatorname{ctg}\frac{g}{2}=\frac{1}{K}$，我们得到

$$\cos\frac{\pi x}{2n}+\frac{1}{K}\sin\frac{\pi x}{2n}$$

$$=1+\frac{\pi x}{2nK}-\frac{\pi^2x^2}{2\cdot4\cdot n^2}-\frac{\pi^3x^3}{2\cdot4\cdot6\cdot n^3K}+\frac{\pi^4x^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot n^4}+\frac{\pi^5x^5}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot n^5K}-\cdots$$

$$=\left(1+\frac{x}{m}\right)\left(1-\frac{x}{2n-m}\right)\left(1+\frac{x}{2n+m}\right)\left(1-\frac{x}{4n-m}\right)\left(1+\frac{x}{4n+m}\right)\cdots,$$

与§ 165 公式相比较，得

$$A=\frac{\pi}{2nK},\ B=-\frac{\pi^2}{2\cdot4\cdot n^2},\ C=-\frac{\pi^3}{2\cdot4\cdot6\cdot n^3K},\ D=\frac{\pi^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot n^4},\ E=\frac{\pi^5}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot n^5K},\ \cdots.$$

由因式得

$$\alpha = \frac{1}{m},\ \beta = -\frac{1}{2n-m},\ \gamma = \frac{1}{2n+m},\ \delta = -\frac{1}{4n-m},\ \varepsilon = \frac{1}{4n+m},\ \cdots.$$

§ 174

利用§ 166 的规则，我们列出级数

$$P = \frac{1}{m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{4n-m} + \frac{1}{4n+m} - \cdots$$

$$Q = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \frac{1}{(4n-m)^2} + \frac{1}{(4n+m)^2} + \cdots$$

$$R = \frac{1}{m^3} - \frac{1}{(2n-m)^3} + \frac{1}{(2n+m)^3} - \frac{1}{(4n-m)^3} + \frac{1}{(4n+m)^3} - \cdots$$

$$S = \frac{1}{m^4} + \frac{1}{(2n-m)^4} + \frac{1}{(2n+m)^4} + \frac{1}{(4n-m)^4} + \frac{1}{(4n+m)^4} + \cdots$$

$$T = \frac{1}{m^5} - \frac{1}{(2n-m)^5} + \frac{1}{(2n+m)^5} - \frac{1}{(4n-m)^5} + \frac{1}{(4n+m)^5} - \cdots$$

……

并得到它们的和为

$$P = A = \frac{\pi}{2nK} = \frac{1 \cdot \pi}{2nK}$$

$$Q = \frac{(K^2+1)\ \pi^2}{4n^2K^2} = \frac{(2+2K^2)\ \pi^2}{2 \cdot 4 \cdot n^2K^2}$$

$$R=\frac{(K^2+1)\ \pi^3}{8n^3K^3}=\frac{(6+6K^2)\ \pi^3}{2\cdot4\cdot6n^3K^3}$$

$$S=\frac{(K^4+4K^2+3)\ \pi^4}{48n^4K^4}=\frac{(24+32K^2+8K^4)\ \pi^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot n^4K^4}$$

$$T=\frac{(2K^4+5K^2+3)\ \pi^5}{96n^5K^5}=\frac{(120+200K^2+80K^4)\ \pi^5}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot n^5K^5}$$

$$V=\frac{(2K^6+17K^4+30K^2+15)\ \pi^6}{960n^6K^6}=$$

$$\frac{(720+1440K^2+816K^4+96K^6)\ \pi^6}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot n^6K^6}$$

§ 175

对 § 172，§ 174 中一般形状的级数，令 m 和 n 为特殊的值，可以得到一些有价值的结果．置 $m=1$，$n=2$，则 $K=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{tg}45^\circ=1$．这时两节的结果相同

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi^3}{32}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\cdots$$

$$\frac{\pi^4}{96}=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots$$

$$\frac{5\pi^5}{1536}=1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\cdots$$

$$\frac{\pi^6}{960}=1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\cdots$$

……

得到的这些级数中：第一个，§ 140 中我们见过；指数为偶数

的，§ 169 中我们讨论过；其余，指数为奇数的，即

$$1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\frac{1}{9^{2n+1}}-\cdots,$$

这里我们得到了它们的用 π 表示的和.

§ 176

令 $m=1$，$n=3$，则 $K=\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}=\mathrm{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$，这时 § 172 的级数成为

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{27}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{16^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi^3}{162\sqrt{3}}=\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{8^3}-\frac{1}{10^3}+\frac{1}{14^3}-\frac{1}{16^3}+\cdots$$

……

或

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$$

$$\frac{4\pi^2}{27}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots$$

$$\frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}}=1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}-\frac{1}{8^3}+\cdots$$

……

它们都不含被$\frac{1}{3}$除得尽的项．我们可以求出含有这种项的级数，至少可以求出偶指数的这种级数．做法是：由

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots,$$

得

$$\frac{\pi^2}{6\cdot 9}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{15^2}+\cdots.$$

它的项都被$\frac{1}{3}$除得尽，从原来的减去得到的这一个，得

$$\frac{8\pi^2}{54}=\frac{4\pi^2}{27}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots,$$

是原来的一个，也不包含被$\frac{1}{3}$除得尽的项.

§ 177

令 $m=1$，$n=3$，$K=\frac{1}{\sqrt{3}}$，那么从§ 174 我们得到

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{9}=1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{17^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi^3}{18\sqrt{3}}=1-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}-\frac{1}{17^3}+\cdots$$

……

分母为被 3 除不尽的奇数的幂．分母为被 3 除得尽的数的幂，这种级数可以从已知级数求得，由

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots$$

得

$$\frac{\pi^2}{8\cdot 9}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{21^2}+\frac{1}{27^2}+\cdots,$$

这个级数中，分母都是被 3 除得尽的奇数的幂，从上面的级数减它得到的级数

$$\frac{\pi^2}{9}=1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\cdots,$$

其分母都是被 3 除不尽的奇数的幂.

§ 178

§ 172 的级数与 § 174 的级数相加相减，我们得到另外一些有价值的级数. 相加，得

$$\frac{K\pi}{2n}+\frac{\pi}{2nK}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\cdots$$
$$=\frac{(K^2+1)\pi}{2nK}.$$

由

$$K=\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\cos\frac{m\pi}{2n}},$$

得

$$1+K^2=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{m\pi}{2n}\right)},$$

从而

$$\frac{2K}{1+K^2}=2\sin\frac{m\pi}{2n}\cos\frac{m\pi}{2n}=\sin\frac{m\pi}{n}.$$

代入，得

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+$$
$$\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}-\cdots.$$

类似地，相减，得

$$\frac{\pi}{2nK}-\frac{K\pi}{2n}=\frac{(1-K^2)\pi}{2nK}$$
$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\frac{1}{3n+m}-\cdots.$$

由

$$\frac{2K}{1-K^2}=\operatorname{tg}2\frac{m\pi}{2n}=\operatorname{tg}\frac{m\pi}{n}=\frac{\sin\frac{m\pi}{n}}{\cos\frac{m\pi}{n}}.$$

得

$$\frac{\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\cdots.$$

用这种方法推出的二次和更高次级数，留给微分学，在那里推导起来更容易.

§ 179

我们已经考虑了 $m=1$，$n=2$ 或 3 的情形. 现在我们让 m，n 取另外的几种值.

$m=1$，$n=4$ 时

$$\sin\frac{m\pi}{n}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad\cos\frac{m\pi}{n}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

我们得到

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots$$

和

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots.$$

$m=1$，$n=8$ 时

$$\frac{m\pi}{n}=\frac{\pi}{8},\quad\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}},\quad\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}},$$

$$\frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}}=1+\sqrt{2},$$

由此我们得到

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}=1+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{23}-\cdots,$$

$$\frac{\pi}{8\ (\sqrt{2}-1)}=1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\cdots.$$

$m=3$，$n=8$ 时

$$\frac{m\pi}{n}=\frac{3\pi}{8},\ \sin\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}},\ \cos\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}},$$

$$\frac{\cos\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{3\pi}{8}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

我们得到

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\cdots,$$

$$\frac{\pi}{8\ (\sqrt{2}+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}+\cdots.$$

§ 180

上面的级数相结合，我们得到

$$\frac{\pi\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi\ (\sqrt{4+2\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1)}{8}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}$$

$$+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1\right)}{8}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}$$

$$+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi\left(\sqrt{2}+1+\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)}{8}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}$$

$$+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\frac{\pi\left(\sqrt{2}+1-\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)}{8}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}$$

$$+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\cdots$$

用类似的方法可以继续对 $n=16$，$m=1$，3，5 或 7 的情形进行结合，得到的级数仍然由 1，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{9}\cdots$组成，但正负号规律完全不同.

§ 181

将§ 178 中的级数，从第二项起每两项相结合，得

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}+\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{4n^2-m^2}+\frac{2m}{9n^2-m^2}-\frac{2m}{16n^2-m^2}+\cdots,$$

从而

$$\frac{1}{n^2-m^2}-\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}-\cdots=\frac{\pi}{2mn\sin\frac{m\pi}{n}}-\frac{1}{2m^2}.$$

从另一个级数得

$$\frac{\pi}{n\operatorname{tg}\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}-\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{4n^2-m^2}-\frac{2m}{9n^2-m^2}-\cdots$$

从而

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\cdots=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2mn\operatorname{tg}\frac{m\pi}{n}}.$$

得到的这两个级数相加，得

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{25n^2-m^2}+\cdots=\frac{\pi\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}}{4mn}.$$

我们得到了三个级数，在第三个中令 $n=1$，令 m 等于任何一个非零偶数 $2K$（$K\neq0$），则由 $\operatorname{tg}K\pi=0$，我们恒有

$$\frac{1}{1-4K^2}+\frac{1}{9-4K^2}+\frac{1}{25-4K^2}+\frac{1}{49-4K^2}+\cdots=0.$$

在第二个中令 $n=2$，m 等于任何一个奇数 $2K+1$，那么由 $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{m\pi}{n}}=0$，我们得到

$$\frac{1}{4-(2K+1)^2}+\frac{1}{16-(2K+1)^2}+\frac{1}{36-(2K+1)^2}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2(2K+1)^2}.$$

§ 182

乘上节求得的前两个级数以 n^2，并令 $\frac{m}{n}=p$，我们得到表达式

$$\frac{1}{1-p^2}-\frac{1}{4-p^2}+\frac{1}{9-p^2}-\frac{1}{16-p^2}+\cdots=\frac{\pi}{2p\sin p\pi}-\frac{1}{2p^2}$$

$$\frac{1}{1-p^2}+\frac{1}{4-p^2}+\frac{1}{9-p^2}+\frac{1}{16-p^2}+\cdots=\frac{1}{2p^2}-\frac{\pi}{2p\mathrm{tg}p\pi},$$

令 $p^2=a$，得

$$\frac{1}{1-a}-\frac{1}{4-a}+\frac{1}{9-a}-\frac{1}{16-a}+\cdots=\frac{\pi\sqrt{a}}{2a\sin\pi\sqrt{a}}-\frac{1}{2a},$$

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{4-a}+\frac{1}{9-a}+\frac{1}{16-a}+\cdots=\frac{1}{2a}-\frac{\pi\sqrt{a}}{2a\mathrm{tg}\pi\sqrt{a}}.$$

只要 a 非负，且不是整数的平方，那么这两个级数的和，就都可以用圆（即 π—译者注）表示.

§ 183

a 为负数时，可以用我们讨论过的化虚指数量为弧的正弦和余弦的方法，求前节级数的和. 事实上，由于

$$e^{x\sqrt{-1}}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$$

$$e^{-x\sqrt{-1}}=\cos x-\sqrt{-1}\sin x$$

将 x 换为 $y\sqrt{-1}$，得

$$\cos y\sqrt{-1}=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$$

$$\sin y\sqrt{-1}=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2\sqrt{-1}}.$$

如果 $a=-b$，$y=\pi\sqrt{b}$，则

$$\cos\pi\sqrt{-b}=\frac{e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}}}{2}$$

$$\sin\pi\sqrt{-b}=\frac{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}{2\sqrt{-1}}$$

从而

$$\mathrm{tg}\pi\sqrt{-b}=\frac{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}{(e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}})\sqrt{-1}}$$

由此得

$$\frac{\pi\sqrt{-b}}{\sin\pi\sqrt{-b}}=\frac{-2\pi\sqrt{b}}{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}$$

$$\frac{\pi\sqrt{-b}}{\operatorname{tg}\pi\sqrt{-b}}=\frac{-\pi\sqrt{b}\ (e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}})}{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}$$

利用所得结果，我们得到

$$\frac{1}{1+b}-\frac{1}{4+b}+\frac{1}{9+b}-\frac{1}{16+b}+\cdots=\frac{1}{2b}-\frac{\pi\sqrt{b}}{(e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}})\ b}$$

$$\frac{1}{1+b}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{9+b}+\frac{1}{16+b}+\cdots=\frac{(e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}})\ \pi\sqrt{b}}{2\ (e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}})}-\frac{1}{2b}.$$

这里的级数，可以从§162用本章的方法导出，但我更喜欢现在这样，因为它还告诉我们，如何化虚数弧的正弦和余弦为实指数量.

第十一章

弧和正弦的几种无穷表示

§ 184

§ 158 中我们看到，对任何的圆弧 z 我们都有

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{16\pi^2}\right)\cdots$$

和

$$\cos z = \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{49\pi^2}\right)\cdots.$$

令 $z=\frac{m\pi}{n}$，得

$$\sin\frac{m\pi}{n}=\frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)\cdots$$

$$\cos\frac{m\pi}{n}=\left(1-\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{25n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{49n^2}\right)\cdots$$

用 $2n$ 代 n，得

$$\sin\frac{n\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2n}\left(\frac{4n^2-m^2}{4n^2}\right)\left(\frac{16n^2-m^2}{16n^2}\right)\left(\frac{36n^2-m^2}{36n^2}\right)\left(\frac{64n^2-m^2}{64n^2}\right)\cdots$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{n^2-m^2}{n^2}\right)\left(\frac{9n^2-m^2}{9n^2}\right)\left(\frac{25n^2-m^2}{25n^2}\right)\left(\frac{49n^2-m^2}{49n^2}\right)\cdots$$

分解成线性因式，得

$$\sin\frac{m\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\left(\frac{6n-m}{6n}\right)\cdots$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\left(\frac{5n-m}{5n}\right)\left(\frac{5n+m}{5n}\right)\cdots$$

用 $n-m$ 代 m，并利用

$$\sin\frac{(n-m)\pi}{2n}=\cos\frac{m\pi}{2n},\quad \cos\frac{(n-m)\pi}{2n}=\sin\frac{m\pi}{2n}$$

得

$$\cos\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{(n-m)\pi}{2n}\right)\left(\frac{n+m}{2n}\right)\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{4n}\right)\left(\frac{5n-m}{4n}\right)\left(\frac{5n+m}{6n}\right)\cdots$$

$$\sin\frac{m\pi}{2n}=\frac{m}{n}\left(\frac{2n-m}{n}\right)\left(\frac{2n+m}{3n}\right)\left(\frac{4n-m}{3n}\right)\left(\frac{4n+m}{5n}\right)\left(\frac{6n-m}{5n}\right)\cdots$$

§ 185

对弧$\frac{m\pi}{2n}$的正弦和余弦都导出了两个表达式．两者相除，得

$$1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdots,$$

从而

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12\cdot12\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdot13\cdots},$$

这是 *Wallis* 在他的《无穷算术》中导出的 π 的表达式. 从正弦的前一个表达式，可以推出许多类似的表达式. 例如，从它我们推得

$$\frac{\pi}{2}=\frac{n}{m}\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\left(\frac{2n}{2n-m}\right)\left(\frac{2n}{2n+m}\right)\left(\frac{4n}{4n-m}\right)\left(\frac{4n}{4n+m}\right)\left(\frac{6n}{6n-m}\right)\cdots$$

令 $\frac{m}{n}=1$，得 *Wallis* 公式. 令 $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$，则由 $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 得

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{16}{17}\cdots,$$

令 $\frac{m}{n}=\frac{1}{3}$，则由 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，得

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{24}{23}\cdots,$$

除 *Wallis* 公式以 $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ 时的表达式，得

$$\sqrt{2}=\frac{2\cdot2\cdot6\cdot6\cdot10\cdot10\cdot14\cdot14\cdot18\cdot18\cdots}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot19\cdots}.$$

§ 186

角的正切都等于正弦除以余弦. 因而正切也可以表示成无穷乘积. 用正弦的前一个表达式除上余弦的后一个表达式，我们得到

$$\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{m}{n-m}\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right)\cdots$$

$$\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{n-m}{m}\left(\frac{n+m}{2n-m}\right)\left(\frac{3n-m}{2n+m}\right)\left(\frac{3n+m}{4n-m}\right)\left(\frac{5n-m}{4n+m}\right)\cdots$$

类似地，我们得到正割和余割的表达式

$$\sec\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{n}{n-m}\right)\left(\frac{n}{n+m}\right)\left(\frac{3n}{3n-m}\right)\left(\frac{3n}{3n+m}\right)\left(\frac{5n}{5n-m}\right)\left(\frac{5n}{5n+m}\right)\cdots$$

$$\csc\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{m}\left(\frac{n}{2n-m}\right)\left(\frac{3n}{2n+m}\right)\left(\frac{3n}{4n-m}\right)\left(\frac{5n}{4n+m}\right)\left(\frac{5n}{6n-m}\right)\cdots$$

如果正弦和余弦都用第二表达式，那么我们得到

$$\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{m}{n-m}\cdot\frac{1}{2}\frac{(2n-m)}{(n+m)}\cdot\frac{3}{2}\frac{(2n+m)}{(3n-m)}\cdot\frac{3}{4}\frac{(4n-m)}{(3n+m)}\cdots$$

$$\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-m}{m}\cdot\frac{1}{2}\frac{(n+m)}{(2n-m)}\cdot\frac{3}{2}\frac{(3n-m)}{(2n+m)}\cdot\frac{3}{4}\frac{(3n+m)}{(4n-m)}\cdots$$

$$\sec\frac{m\pi}{2n}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{n-m}\cdot\frac{2n}{n+m}\cdot\frac{2n}{3n-m}\cdot\frac{4n}{3n+m}\cdot\frac{4n}{5n-m}\cdots$$

$$\csc\frac{m\pi}{2n}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{4n}{4n-m}\cdot\frac{4n}{4n+m}\cdots$$

§ 187

将正弦和余弦原表达式中的 m 换成 K，得到新表达式．用新表达式除原表达式，我们得到公式

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{K\pi}{2n}}=\frac{m}{K}\cdot\frac{2n-m}{2n-K}\cdot\frac{2n+m}{2n+K}\cdot\frac{4n-m}{4n-K}\cdot\frac{4n+m}{4n+K}\cdots$$

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\cos\frac{K\pi}{2n}}=\frac{m}{n-K}\cdot\frac{2n-m}{n+K}\cdot\frac{2n+m}{3n-K}\cdot\frac{4n-m}{3n+K}\cdot\frac{4n+m}{5n-K}\cdots$$

$$\frac{\cos\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{K\pi}{2n}}=\frac{n-m}{K}\cdot\frac{n+m}{2n-K}\cdot\frac{3n-m}{2n+K}\cdot\frac{3n+m}{4n-K}\cdot\frac{5n-m}{4n+K}\cdots$$

$$\frac{\cos\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{K\pi}{2n}}=\frac{n-m}{n-K}\cdot\frac{n+m}{n+K}\cdot\frac{3n-m}{3n-K}\cdot\frac{3n+m}{3n+K}\cdot\frac{5n-m}{5n-K}\cdots$$

如果取一个角$\frac{K\pi}{2n}$，其正弦和余弦都已知，那么利用上面的公式，我们可以求出另外任何一个角$\frac{m\pi}{2n}$的正弦和余弦.

§ 188

这些无穷多个因式相乘形式的表达式，可以用来计算 π 的值，也可以用来计算给定角的正弦和余弦. 其价值在于，到现在为止，我们还没有计算这些值的更好的方法. 我们也掌握另外一些稍具实用价值的无穷乘积，可以用来计算 π 或正弦和余弦的值. 例如

$$\frac{\pi}{2}=2\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\cdots$$

该乘积的因式不难变为小数，但要得到 π 的精确到小数点后 10 位的值，那因子的个数就已经多得不得了.

§ 189

这些乘积的主要应用是计算对数. 没有这些表达式，对数的

计算是很困难的. 首先我们有

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\cdots$$

取对数，得

$$\log\pi = \log 4 + \log\left(1-\frac{1}{9}\right) + \log\left(1-\frac{1}{25}\right) + \log\left(1-\frac{1}{49}\right) + \cdots$$

或

$$\log\pi = \log 2 - \log\left(1-\frac{1}{4}\right) - \log\left(1-\frac{1}{16}\right) - \log\left(1-\frac{1}{36}\right) - \cdots,$$

这里取常用对数或自然对数都可以. 但从自然对数易于求出常用对数，所以我们介绍求 π 的自然对数的方法.

§ 190

对于自然对数我们有

$$\log(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots.$$

将上节中表达式的项照此式展开，得

$$\begin{aligned}\log\pi = \log 4 &-\frac{1}{9}-\frac{1}{2\cdot 9^2}-\frac{1}{3\cdot 9^3}-\frac{1}{4\cdot 9^4}-\cdots\\ &-\frac{1}{25}-\frac{1}{2\cdot 25^2}-\frac{1}{3\cdot 25^3}-\frac{1}{4\cdot 25^4}-\cdots\\ &-\frac{1}{49}-\frac{1}{2\cdot 49^3}-\frac{1}{3\cdot 49^3}-\frac{1}{4\cdot 49^4}-\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

展开式中每竖列含有一个无穷级数. 含有的这些无穷级数的和，是我们前面已经算了出来的. 为简起见，我们记

$$A = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots$$

$$B = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \cdots$$

$$C = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \cdots$$

$$D = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \cdots$$

使用这些记号展开式就成了

$$\log\pi = \log 4 - (A-1) - \frac{1}{2}(B-1) - \frac{1}{3}(C-1) - \frac{1}{4}(D-1) - \cdots$$

利用前面求出的近似值，我们有

$A = 1.2337005501361698273543l$

$B = 1.0146780316041920545462 5$

$C = 1.0014470766409421219064 7$

$D = 1.0001551790252961193029 8$

$E = 1.0000170413630448255081 6$

$F = 1.0000018858485831195759 0$

$G = 1.0000002092405192115001 0$

$H = 1.0000000232371573791567 0$

$J = 1.000000002581437556659 77$

$K = 1.000000000286807697455 58$

$L = 1.000000000031866775140 44$

$M = 1.000000000003540722943 92$

$N = 1.000000000000393412466 91$

$O = 1.000000000000043712448 59$

$P = 1.000000000000004856936 82$

$Q = 1.000000000000000539659 57$

$R = 1.000000000000000059962 17$

$S = 1.000000000000000006662 46$

$$T = 1.000000000000000000074027$$

$$V = 1.000000000000000000008225$$

$$W = 1.000000000000000000000913$$

$$X = 1.000000000000000000000101.$$

将它们代入展开式，经过不太麻烦的计算，我们得到 π 的自然对数值

$$\log\pi = 1.14472988584940017414342\cdots,$$

乘这个值以 0.43429…，得到 π 的常用对数值

$$\log\pi = 0.49714987269413385435126.$$

§ 191

我们已经把角$\frac{m\pi}{2n}$的正弦和余弦都表示成了无穷乘积，因而不难写出它们的对数表示式. 从 § 184 的公式得

$$\log\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\pi + \log\frac{m}{2n} + \log\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{36n^2}\right) + \cdots$$

$$\log\cos\frac{m\pi}{2n} = \log\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{25n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{49n^2}\right) + \cdots$$

跟前面一样，取自然对数可以把它们表示成收敛很快的级数. 为避免不必要的无穷级数相乘，我们保留前几项为对数形式

$$\log\sin\frac{m\pi}{2n}$$

$$= \log\pi + \log m + \log(2n-m) + \log(2n+m) - \log 8 - 3\log n - \frac{m^2}{16n^2} - \frac{m^4}{2\cdot 16^2 n^4} - \frac{m^6}{3\cdot 16^3 n^6} - \frac{m^8}{4\cdot 16^4 n^8} - \cdots$$

$$-\frac{m^2}{36n^2}-\frac{m^4}{2\cdot36^2n^4}-\frac{m^6}{3\cdot36^3n^6}-\frac{m^8}{4\cdot36^4n^8}-\cdots$$

$$-\frac{m^2}{64n^2}-\frac{m^4}{2\cdot64^2n^4}-\frac{m^6}{3\cdot64^3n^6}-\frac{m^8}{4\cdot64^4n^8}-\cdots$$

…………

$$\log\cos\frac{m\pi}{2n}=\log(n-m)+\log(n+m)-2\log n$$

$$-\frac{m^2}{9n^2}-\frac{m^4}{2\cdot9^2n^4}-\frac{m^6}{3\cdot9^3n^6}-\frac{m^8}{4\cdot9^4n^8}-\cdots$$

$$-\frac{m^2}{25n^2}-\frac{m^4}{2\cdot25^2n^4}-\frac{m^6}{3\cdot25^3n^6}-\frac{m^8}{4\cdot25^4n^8}-\cdots$$

$$-\frac{m^2}{49n^2}-\frac{m^4}{2\cdot49^2n^4}-\frac{m^6}{3\cdot49^3n^6}-\frac{m^8}{4\cdot49^4n^8}-\cdots$$

……………

§ 192

这两个级数都含有$\frac{m}{n}$的所有偶次幂，且这每一个幂都与一个其和已知的级数相乘，即

$$\log\sin\frac{m\pi}{2n}$$

$$=\log m+\log(2n-m)+\log(2n+m)-3\log n+\log\pi-\log 8$$

$$-\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots\right)$$

$$-\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{12^4}+\cdots\right)$$

$$-\frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{8^6}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{12^6}+\cdots\right)$$

$$-\frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{4^8}+\frac{1}{6^8}+\frac{1}{8^8}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{12^8}+\cdots\right)$$

…………

$$\log\cos\frac{m\pi}{2n} = \log(n-m) + \log(n+m) - 2\log n$$
$$- \frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots\right)$$
$$- \frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \cdots\right)$$
$$- \frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \cdots\right)$$
$$- \frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \cdots\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

第二表达式中级数的和已知（§ 190），第一表达式中级数的和可以从第二表达式中级数的和推出. 为使用方便，下面列出它们中一部分的和.

§ 193

为简单起见，置

$$\alpha = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots$$
$$\beta = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \cdots$$
$$\gamma = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \cdots$$
$$\delta = \frac{1}{2^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \cdots$$

它们的近似值为

$\alpha = 0.41123351671205660911810$

$\beta = 0.06764520210694613696975$

$\gamma = 0.01589598534350701780804$

$\delta = 0.00392217717264822007571$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= 0.000977533764773259848 98\\
\zeta &= 0.00024420070472492872274\\
\eta &= 0.00006103889453949332915\\
\theta &= 0.00001525902225127269977\\
\iota &= 0.00000381471182744318008\\
\kappa &= 0.00000095367522617534053\\
\lambda &= 0.00000023841863595259154\\
\mu &= 0.00000005960464832831555\\
\nu &= 0.00000001490116141589813\\
\xi &= 0.00000000372529031233986\\
o &= 0.00000000093132257548284\\
\pi &= 0.00000000023283064370807\\
\rho &= 0.00000000005820766091685\\
\sigma &= 0.00000000001455191522858\\
\tau &= 0.00000000000363797880710\\
\upsilon &= 0.00000000000090949470177\\
\varphi &= 0.00000000000022737367544\\
\chi &= 0.00000000000005684341886\\
\psi &= 0.00000000000001421085471\\
\omega &= 0.00000000000000355271367.
\end{aligned}
$$

继续写下去，这近似值的下降速度很快，每一个都约为前一个的四分之一.

§ 194

利用这些结果，我们得到

$$\log\sin\frac{m\pi}{2n}$$

$$= \log m + \log(2n - m) + \log(2n + m) - 3\log n + \log\pi - \log 8$$

$$- \frac{m^2}{n^2}\left(\alpha - \frac{1}{2^2}\right) - \frac{m^4}{2n^4}\left(\beta - \frac{1}{2^4}\right) - \frac{m^6}{n^6}\left(\gamma - \frac{1}{2^6}\right) - \cdots$$

$$\log\cos\frac{m\pi}{2n} = \log(n - m) + \log(n + m) - 2\log n$$

$$- \frac{m^2}{n^2}(A - 1) - \frac{m^4}{2n^4}(B - 1) - \frac{m^6}{3n^6}(C - 1) - \cdots$$

$\log\pi$ 和 $\log 8$ 已知，所以角$\frac{m}{n}90°$的正弦的自然对数为

$$\log\sin\frac{m}{n}90° = \log m + \log(2n - m) + \log(2n + m) - 3\log n$$

$$- 0.93471165583043575410$$

$$- \frac{m^2}{n^2}0.16123351671205660911$$

$$- \frac{m^4}{n^4}0.00257260105347306848$$

$$- \frac{m^6}{n^6}0.00009032844783567260$$

$$- \frac{m^8}{n^8}0.00000398179316205501$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}}0.00000019425295465196$$

$$- \frac{m^{12}}{n^{12}}0.00000001001328748812$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}}0.00000000053404135618$$

$$- \frac{m^{16}}{n^{16}}0.00000000002914859658$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}}0.00000000000161797979$$

$$- \frac{m^{20}}{n^{20}}0.00000000000009097690$$

$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}0.000000000000000516827$$

$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}0.0000000000000000029607$$

$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}0.00000000000000001708$$

$$-\frac{m^{28}}{n^{28}}0.000000000000000000099$$

$$-\frac{m^{30}}{n^{30}}0.000000000000000000005.$$

角$\frac{m}{n}90°$的余弦的自然对数为

$$\log\cos\frac{m}{n}90° = \log(n-m) + \log(n+m) - 2\log n$$

$$-\frac{m^{2}}{n^{2}}0.23370055013616982735$$

$$-\frac{m^{4}}{n^{4}}0.00733901580209602727$$

$$-\frac{m^{6}}{n^{6}}0.00048235888031404063$$

$$-\frac{m^{8}}{n^{8}}0.00003879475632402982$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}0.00000340827260896510$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}0.00000031430809718659$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}0.00000002989150274450$$

$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}0.00000000290464467239$$

$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}0.00000000028682639518$$

$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}0.00000000002868076974$$

$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}0.00000000000289697956$$

$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}0.00000000000029506024$$

$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}0.00000000000003026249$$

$$-\frac{m^{28}}{n^{28}}0.00000000000000312232$$

$$-\frac{m^{30}}{n^{30}}0.00000000000000032379$$

$$-\frac{m^{32}}{n^{32}}0.00000000000000003373$$

$$-\frac{m^{34}}{n^{34}}0.00000000000000000352$$

$$-\frac{m^{36}}{n^{36}}0.00000000000000000037$$

$$-\frac{m^{38}}{n^{38}}0.00000000000000000004.$$

§ 195

前节中正弦和余弦的自然对数乘上 0.4342944819…就得到相应的常用对数．我们照习惯作法，相乘之后，给正弦和余弦的对数加上 10．这样我们得到

角 $\frac{m}{n}90°$ 的正弦的常用对数为

$$\log\sin\frac{m}{n}90° = \log m + \log(2n - m) + \log(2n + m) - 3\log n$$

$$+9.594059885702190$$

$$-\frac{m^2}{n^2}0.070022826605901$$

$$-\frac{m^4}{n^4}0.001117266441661$$

$$-\frac{m^6}{n^6}0.000039229146453$$

$$-\frac{m^8}{n^8}0.000001729270798$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}0.000000084362986$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}0.000000004348715$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}0.000000000231931$$

$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}0.000000000012659$$

$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}0.000000000000702$$

$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}0.000000000000039$$

角$\frac{m}{n}90°$的余弦的常用对数为

$$\log\cos\frac{m}{n}90° = \log(n-m) + \log(n+m) - 2\log n$$

$$+10.000000000000000$$

$$-\frac{m^2}{n^2}0.101494859341892$$

$$-\frac{m^4}{n^4}0.003187294065451$$

$$-\frac{m^6}{n^6}0.000209485800017$$

$$-\frac{m^8}{n^8}0.000016848348597$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}0.000001480193986$$
$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}0.000000136502272$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}0.000000012981715$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}0.000000001261471$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}0.000000000124567$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}0.000000000012456$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}0.000000000001258$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}0.000000000000128$$
$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}0.000000000000013$$

§ 196

利用前两节的公式，我们可以越过正弦和余弦，直接求出任何角度的正弦和余弦的自然和常用两种对数．我们指出一点，从一个角的正弦和余弦的对数，用简单的减法，我们就可以求出正切、余切、正割和余割的对数．因此对正弦、余弦之外的三角函数，就没有必要去寻求专门的对数公式．再指出一点，公式中 m，n，$n-m$，$n+m$，…的对数，在求哪种对数的公式中，就应该是哪种对数．最后一点是，比$\frac{m}{n}$表示给定角与直角的比．我

们知道大于半直角的角的正弦，等于一个小于半直角的角的余弦，反之亦然．所以分数$\frac{m}{n}$必定不大于$\frac{1}{2}$．由此可知级数收敛很快．

§ 197

结束这个题目之前，我们讲一种更好的求任意角正切和正割的方法．虽然正切和正割都可以由正弦和余弦求得，但要用除法，多位数除法是很麻烦的．在 § 135 中我们给出了正切和余切的公式，但未做推导，这里给以补充．

§ 198

首先由 § 181 角$\frac{m}{2n}\pi$ 的正切表达式

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{25n^2-m^2}+\cdots=\frac{\pi}{4mn}\operatorname{tg}\frac{m}{2n}\pi$$

得

$$\operatorname{tg}\frac{m}{2n}\pi=\frac{4mn}{\pi}\left(\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{25n^2-m^2}+\cdots\right).$$

再将

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\cdots=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2mn}\operatorname{ctg}\frac{m}{n}\pi$$

中的 n 换为 $2n$，得

$$\operatorname{ctg}\frac{m}{2n}\pi=\frac{2n}{m\pi}-\frac{4mn}{\pi}\left(\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{16n^2-m^2}+\frac{1}{36n^2-m^2}+\cdots\right).$$

两式中的分数，开始的一、二个易于计算，将其余的展成无穷级数，得

$$\operatorname{tg}\frac{m}{2n}\pi=\frac{mn}{n^2-m^2}\frac{4}{\pi}$$

$$+\frac{4}{\pi}\ \left(\frac{m}{3^2n}+\frac{m^3}{3^4n^3}+\frac{m^5}{3^6n^5}+\cdots\right)$$

$$+\frac{4}{\pi}\ \left(\frac{m}{5^2n}+\frac{m^3}{5^4n^3}+\frac{m^5}{5^6n^5}+\cdots\right)$$

$$+\frac{4}{\pi}\ \left(\frac{m}{7^2n}+\frac{m^3}{7^4n^3}+\frac{m^5}{7^6n^5}+\cdots\right)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\operatorname{ctg}\frac{m}{2n}\pi=\frac{n}{m}\frac{2}{\pi}-\frac{mn}{4n^2-m^2}\frac{4}{\pi}$$

$$-\frac{4}{\pi}\ \left(\frac{m}{4^2n}+\frac{m^3}{4^4n^3}+\frac{m^5}{4^6n^5}+\cdots\right)$$

$$-\frac{4}{\pi}\ \left(\frac{m}{6^2n}+\frac{m^3}{6^4n^3}+\frac{m^5}{6^6n^5}+\cdots\right)$$

$$-\frac{4}{\pi}\ \left(\frac{m}{8^2n}+\frac{m^3}{8^4n^3}+\frac{m^5}{8^6n^5}+\cdots\right)$$

$$\cdots\cdots$$

§ 198 a[1]

从已知的 π 值得

$$\frac{1}{\pi}=0.31830\ 98861\ 83790\ 67153\ 77679\ 26745\ 028724,$$

我们已求得了我们记为 A，B，C，$D\cdots$和 α，β，γ，$\delta\cdots$的各级数的和，用这两套记号可将上节公式改写为

$$\operatorname{tg}\frac{m}{2n}\pi$$

$$=\frac{mn}{n^2-m^2}\frac{4}{\pi}+\frac{m}{n}\frac{4}{\pi}\ (A-1)\ +\frac{m^3}{n^3}\frac{4}{\pi}\ (B-1)\ +\frac{m^5}{n^5}\frac{4}{\pi}\ (C-1)$$

① 原书误编两个 § 198．参照俄译本改第二个 § 198 为 § 198a．——中译者

$$+\frac{m^7}{n^7}\frac{4}{\pi}\ (D-1)\ +\cdots$$

和

$$\operatorname{ctg}\frac{m}{2n}\pi=\frac{n}{m}\frac{2}{\pi}-\frac{mn}{4n^2-m^2}\frac{4}{\pi}-\frac{m}{n}\frac{4}{\pi}\left(\alpha-\frac{1}{2^2}\right)-\frac{m^3}{n^3}\frac{4}{\pi}\cdot$$

$$\left(\beta-\frac{1}{2^4}\right)-\frac{m^5}{n^5}\frac{4}{\pi}\left(\gamma-\frac{1}{2^6}\right)-\frac{m^7}{n^7}\frac{4}{\pi}\left(\delta-\frac{1}{2^6}\right)-\cdots$$

从这两个公式可以得到 § 135 的正切和余切表达式. § 137 我们讲了如何从正切和余切经过简单的加减法得到正割和余割. 利用这些规则，造正弦、正切、正割表，造它们的对数表，都比原来容易很多.

第十二章

分解分数函数为实部分分式

§ 199

第二章讲了,分数函数可分解成其分母线性因式个数,那么多个部分分式,每一个因式都是一个部分分式的分母.自然,线性因式是虚的,由它作分母的部分分式也是虚的.实分数函数分解成的虚部分分式是很少用处的.但我们讲过,作为分数函数分母的整函数,不管它含有多少个虚线性因式,我们都可以把它们表示成实二次因式.这样,在允许部分分式的分母为实二次因式的条件之下,我们可以把任何一个分数函数都分解为实部分分式.

§ 200

记给定的分数函数为$\frac{M}{N}$,N 的实线性因式所对应的部分分式,求法我们讲过了.对于 N 的虚线性因式,我们改为考虑因式

$$p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$$

这时的分数函数,其形状为

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \cdots)}$$

我们求的以 $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ 为分母的部分分式应该为

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2}.$$

该分式的分母是二次的,因而分子的次数不能大于 1,否则该分式含有一个整函数,应该分出去.

§ 201

为简单起见,令分子

$$A + Bz + Cz^2 + \cdots = M,$$

令分母的第二因式

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \cdots = Z,$$

记因式 Z 产生的部分分式为 $\frac{Y}{Z}$,则

$$Y = \frac{M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2}.$$

Y 应该是 z 的整函数,因而必定 $M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz$ 被 $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ 整除.从而,当

$$p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2 = 0,$$

也即

$$z = \frac{p}{q}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

或

$$z = \frac{p}{q}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

时,$M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz$ 为零.置 $\frac{p}{q} = f$,则

$$z^n = f^n(\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi).$$

将 z^n 的这两个表达式代入,得到决定 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{a}$ 的两个方程.

§ 202

方程 $M=\mathfrak{A}Z+\mathfrak{a}Zz$ 经过两种代入成为方程

$$\left.\begin{aligned}&A+Bf\cos\varphi+Cf^2\cos2\varphi+Df^3\cos3\varphi+\cdots\\&\quad\pm(Bf\sin\varphi+Cf^2\sin2\varphi+Df^3\sin3\varphi+\cdots)\sqrt{-1}\end{aligned}\right\}$$
$$=\begin{cases}\mathfrak{A}(\alpha+\beta f\cos\varphi+\gamma f^2\cos2\varphi+\delta f^3\cos3\varphi+\cdots)\\\qquad\pm\mathfrak{A}(\beta f\sin\varphi+\gamma f^2\sin2\varphi+\delta f^3\sin3\varphi+\cdots)\sqrt{-1}\\\qquad+\mathfrak{a}(\alpha f\cos\varphi+\beta f^2\cos2\varphi+\gamma f^2\cos3\varphi+\cdots)\\\qquad\pm\mathfrak{a}(\alpha f\sin\varphi+\beta f^2\sin2\varphi+\gamma f^3\sin3\varphi+\cdots)\sqrt{-1},\end{cases}$$

为便于计算,令

$$A+Bf\cos\varphi+Cf^2\cos2\varphi+Df^3\cos3\varphi+\cdots=\mathfrak{P}$$
$$Bf\sin\varphi+Cf^2\sin2\varphi+Df^3\sin3\varphi+\cdots=\mathfrak{p}$$
$$\alpha+\beta f\cos\varphi+\gamma f^2\cos2\varphi+\delta f^3\cos3\varphi+\cdots=\mathfrak{Q}$$
$$\beta f\sin\varphi+\gamma f^2\sin2\varphi+\delta f^3\sin3\varphi+\cdots=\mathfrak{q}$$
$$\alpha f\cos\varphi+\beta f^2\cos2\varphi+\gamma f^3\cos3\varphi+\cdots=\mathfrak{R}$$
$$\alpha f\sin\varphi+\beta f^2\sin2\varphi+\gamma f^3\sin3\varphi+\cdots=\mathfrak{r}$$

在新的记号之下,我们的方程成为

$$\mathfrak{P}\pm\mathfrak{p}\sqrt{-1}=\mathfrak{A}\mathfrak{Q}\pm\mathfrak{A}\mathfrak{q}\sqrt{-1}+\mathfrak{a}\mathfrak{R}\pm\mathfrak{a}\mathfrak{r}\sqrt{-1}.$$

§ 203

由于双重符号,我们得到方程组

$$\mathfrak{P}=\mathfrak{A}\mathfrak{Q}+\mathfrak{a}\mathfrak{R}$$
$$\mathfrak{p}=\mathfrak{A}\mathfrak{q}+\mathfrak{a}\mathfrak{r},$$

解为

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r}-\mathfrak{p}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r}-\mathfrak{q}\mathfrak{R}}$$

$$\mathfrak{a}=\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{q}\mathfrak{R}-\mathfrak{D}\mathfrak{r}}$$

这样一来,我们就得到了分数函数

$$\frac{M}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)Z}$$

的部分分式

$$\frac{\mathfrak{A}+az}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}$$

的求法.

记 $f=\frac{p}{q}$,则

代换 $z^n=f^n\cos n\varphi$ 使 $M=\mathfrak{P}$;

代换 $z^n=f^n\sin n\varphi$ 使 $M=\mathfrak{p}$;

代换 $z^n=f^n\cos n\varphi$ 使 $Z=\mathfrak{Q}$;

代换 $z^n=f^n\sin n\varphi$ 使 $Z=\mathfrak{q}$;

代换 $z^n=f^n\cos n\varphi$ 使 $zZ=\mathfrak{R}$;

代换 $z^n=f^n\sin n\varphi$ 使 $zZ=\mathfrak{r}$.

有了 $\mathfrak{P},\mathfrak{Q},\mathfrak{R},\mathfrak{p},\mathfrak{q},\mathfrak{r}$,也就有了

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r}-\mathfrak{p}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r}-\mathfrak{q}\mathfrak{R}},\ a=\frac{\mathfrak{p}\mathfrak{Q}-\mathfrak{P}\mathfrak{q}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r}-\mathfrak{q}\mathfrak{R}}.$$

例 1:设给定的分数函数为

$$\frac{z^2}{(1-z+z^2)(1+z^4)},$$

我们先求对应于因式 $1-z+z^2$ 的部分分式

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z}{1-z+z^2}.$$

与通用表达式

$$p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$$

相比较,这里

$$p=1;q=1;\cos\varphi=\frac{1}{2},$$

从而

$$\varphi=60^\circ=\frac{\pi}{3}.$$

由 $M=z^2, Z=1+z^4, f=1$,我们得到

$$\mathfrak{P}=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2};\mathfrak{p}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathfrak{Q}=1+\cos\frac{4\pi}{3}=\frac{1}{2};\mathfrak{q}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathfrak{R}=\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{3}=1;\mathfrak{r}=0.$$

由此得

$$\mathfrak{A}=-1,\mathfrak{a}=0,$$

从而所求部分分式为

$$\frac{-1}{1-z+z^2}.$$

所给函数等于求得的这个分式与下面这个分式的和

$$\frac{1+z+z^2}{1+z^4},$$

该分式分母 $1+z^4$ 的因式为

$$1+z\sqrt{2}+z^2 \text{ 和 } 1-z\sqrt{2}+z^2.$$

求对应于这两个分母的部分分式时,φ 相同,都为$\frac{\pi}{4}$,一个的 $f=-1$,另一个的 $f=+1$.

例 2:我们来求这两个部分分式,也即求分数函数

$$\frac{1+z+z^2}{(1+z\sqrt{2}+z^2)(1-z\sqrt{2}+z^2)}$$

的部分分式.这里

$$M=1+z+z^2,$$

对于第一个因式我们有

$$f=-1, \varphi=\frac{\pi}{4}, Z=1-z\sqrt{2}+z^{2}.$$

从而

$$\mathfrak{P}=1-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{p}=-\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{2\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{Q}=1+\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2\pi}{4}=2$$

$$\mathfrak{q}=\quad+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{2\pi}{4}=2$$

$$\mathfrak{R}=\quad-\cos\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4}=0$$

$$\mathfrak{r}=\quad-\sin\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{4}=-2\sqrt{2}.$$

继而

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r}-\mathfrak{q}\mathfrak{R}=-4\sqrt{2}$$

和

$$\mathfrak{A}=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}, \mathfrak{a}=0.$$

这样我们得到对应于因式 $1+z\sqrt{2}+z^{2}$ 的部分分式为

$$\frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1+z\sqrt{2}+z^{2}}.$$

类似地,我们得到另一个部分分式为

$$\frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1-z\sqrt{2}+z^{2}}.$$

现在我们看到,例 1 所给函数

$$\frac{z^{2}}{(1-z+z^{2})(1+z^{4})}$$

分解成了

$$\frac{-1}{1-z+z^2}+\frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1+z\sqrt{2}+z^2}+\frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1-z\sqrt{2}+z^2}.$$

例 3:分解函数

$$\frac{1+2z+z^2}{(1-\frac{8}{5}z+z^2)(1+2z+3z^2)}$$

为部分分式.因式 $1-\frac{8}{5}z+z^2$ 产生的部分分式为

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z}{1-\frac{8}{5}z+z^2},$$

这里

$$p=1,q=1,\cos\varphi=\frac{4}{5},f=1$$

又

$$M=1+2z+z^2,Z=1+2z+3z^2.$$

由于这里角 φ 与直角的比未知,所以需计算 φ 和其倍数的正弦和余弦.由 $\cos\varphi$ 得到所需结果

$$\cos\varphi=\frac{4}{5},\qquad \sin\varphi=\frac{3}{5},$$

$$\cos2\varphi=\frac{7}{25},\qquad \sin2\varphi=\frac{24}{25},$$

$$\cos3\varphi=-\frac{44}{125},\quad \sin3\varphi=\frac{117}{125}.$$

从而

$$\mathfrak{P}=1+2\cdot\frac{4}{5}+\frac{7}{25}=\frac{72}{25}$$

$$\mathfrak{p}=2\cdot\frac{3}{5}+\frac{24}{25}=\frac{54}{25}$$

$$\mathfrak{Q}=1+2\cdot\frac{4}{5}+3\frac{7}{25}=\frac{86}{25}$$

$$\mathfrak{q}=2\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{24}{25}=\frac{102}{25}$$

$$\mathfrak{N}=\frac{4}{5}+2\cdot\frac{7}{25}-3\cdot\frac{44}{125}=\frac{38}{125}$$

$$\mathfrak{r}=\frac{3}{5}+2\cdot\frac{24}{25}+3\cdot\frac{117}{125}=\frac{666}{125},$$

由此得

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r}-\mathfrak{q}\mathfrak{N}=\frac{53400}{25\cdot125}=\frac{2136}{125},$$

从而

$$\mathfrak{A}=\frac{1836}{2136}=\frac{153}{178},\mathfrak{a}=-\frac{540}{2136}=-\frac{45}{178}.$$

这样我们得到由 $1-\frac{8}{5}z+z^2$ 产生的部分分式为

$$\frac{9(17-5z):178}{1-\frac{8}{5}z+z^2}.$$

对应于另一个因式的部分分式,求法类似.

我们有

$$p=1,q=-\sqrt{3},\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

和

$$f=-\frac{1}{\sqrt{3}},M=1+2z+z^2,Z=1-\frac{8}{5}z+z^2.$$

由 $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 得所需结果

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad \sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$\cos2\varphi=-\frac{1}{3},\qquad \sin2\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos3\varphi=-\frac{5}{3\sqrt{3}},\qquad \sin3\varphi=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}.$$

利用这些结果,我们得到

$$\mathfrak{B}=1-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

$$\mathfrak{p}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\mathfrak{Q}=1+\frac{8}{5\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{64}{45}$$

$$\mathfrak{q}=\frac{8}{5\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{34\sqrt{2}}{45}$$

$$\mathfrak{R}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{8}{5\cdot 3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{135}$$

$$\mathfrak{r}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{8}{5\cdot 3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{3}}=-\frac{98\sqrt{2}}{135}.$$

从而

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r}-\mathfrak{q}\mathfrak{R}=-\frac{712\sqrt{2}}{675},$$

继而

$$\mathfrak{A}=\frac{100}{712}=\frac{25}{178},\mathfrak{a}=\frac{540}{712}=\frac{135}{178}.$$

最后我们得到函数

$$\frac{1+2z+z^2}{\left(1-\frac{8}{5}z+z^2\right)(1+2z+3z^2)}$$

的部分分式表示为

$$\frac{9(17-5z):178}{1-\frac{8}{5}z+z^2}+\frac{5(5+27z):178}{1+2z+3z^2}.$$

§ 204

$\mathfrak{R}$ 和 $\mathfrak{r}$ 的值可由 $\mathfrak{Q}$ 和 $\mathfrak{q}$ 决定.事实上,由

$$\mathfrak{Q}=\alpha+\beta f\cos\varphi+\gamma f^2\cos 2\varphi+\delta f^3\cos 3\varphi+\cdots$$

$$\mathfrak{q} = \qquad \beta f\sin\varphi + \gamma f^2\sin 2\varphi + \delta f^3\sin 3\varphi + \cdots$$

得

$$\mathfrak{Q}\cos\varphi - \mathfrak{q}\sin\varphi = \alpha\cos\varphi + \beta f\cos 2\varphi + \gamma f^2\cos 3\varphi + \cdots$$

从而

$$\mathfrak{R} = f(\mathfrak{Q}\cos\varphi - \mathfrak{q}\sin\varphi).$$

类似地

$$\mathfrak{Q}\sin\varphi + \mathfrak{q}\cos\varphi = \alpha\sin\varphi + \beta f\sin 2\varphi + \gamma f^2\sin 3\varphi + \cdots$$

从而

$$\mathfrak{r} = f(\mathfrak{Q}\sin\varphi + \mathfrak{q}\cos\varphi).$$

进一步,得到

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R} = (\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2)f\sin\varphi$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R} = (\mathfrak{B}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})f\sin\varphi + (\mathfrak{B}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})f\cos\varphi.$$

从而

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q}}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2} + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\alpha = -\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}\cdot\frac{1}{f\sin\varphi}.$$

这样,因式 $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ 产生的部分分式为

$$\frac{(\mathfrak{B}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})f\sin\varphi + (\mathfrak{B}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})(f\cos\varphi - z)}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)(\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2)f\sin\varphi}.$$

或者换 f 为 $\frac{p}{q}$,将它写成

$$\frac{(\mathfrak{B}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})p\sin\varphi + (\mathfrak{B}q - p\mathfrak{Q})(p\cos\varphi - qz)}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)(\mathfrak{Q}^2 + q^2)p\sin\varphi}.$$

§ 205

上节我们推出了分数函数

$$\frac{M}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)Z}$$

分母的因式 $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ 所产生的部分分式. 所得表达式中的 $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{q}$ 可以从 M, Z 求出. 方法是对 M, Z 做代换. 做代换 $z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi$, 得

$$M=\mathfrak{P},\ Z=\mathfrak{Q},$$

做代换 $z^n=\frac{p^n}{q^n}$, 得

$$M=\mathfrak{p},\ Z=\mathfrak{Q}.$$

注意,代换之前应将 M 和 Z 展开,即要使得它们的形状为

$$M=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\cdots$$
$$Z=\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\cdots,$$

这样我们有

$$\mathfrak{P}=A+B\frac{p}{q}\cos\varphi+C\frac{p^2}{q^2}\cos2\varphi+D\frac{p^3}{q^3}\cos3\varphi+\cdots$$
$$\mathfrak{p}=\qquad B\frac{p}{q}\sin\varphi+C\frac{p^2}{q^2}\sin2\varphi+D\frac{p^3}{q^3}\sin3\varphi+\cdots$$
$$\mathfrak{Q}=\alpha+\beta\frac{p}{q}\cos\varphi+\gamma\frac{p^2}{q^2}\cos2\varphi+\delta\frac{p^3}{q^3}\cos3\varphi+\cdots$$
$$\mathfrak{q}=\qquad \beta\frac{p}{q}\sin\varphi+\gamma\frac{p^2}{q^2}\sin2\varphi+\delta\frac{p^3}{q^3}\sin3\varphi+\cdots$$

§ 206

如果 $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ 是 Z 的因式,那么代换

$$z^n=f^n(\cos n\varphi\pm\sqrt{-1}\sin n\varphi)$$

使 Z 为零,因而在这个代换之下,从方程

$$M=\mathfrak{A}Z+\mathfrak{a}Zz$$

得不到任何东西. 所以前面讲的方法不能使用. 当 $(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^2$ 或更高次幂为函数 $\frac{M}{N}$ 分母的因式时,我们求另外形状的部

分分式.先讨论

$$N=(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^2Z,$$

的情形.此时我们设$(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^2$产生的部分分式为

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^2}+\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2},$$

$\mathfrak{A},\mathfrak{a},\mathfrak{B},\mathfrak{b}$待定.

§ 207

依前节所设,表达式

$$\frac{M-(\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z)Z-(\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z)Z(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^2}$$

应该是整函数,也即分子应被分母除得尽.首先,同于前面,表达式

$$M-(\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z)Z$$

应被$p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$除得尽,因面照用前面的方法即可得到$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{a}$.

将$z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi$代人$M$和$Z$,得

$$M=\mathfrak{B},\ Z=\mathfrak{N};$$

将$z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi$代人$M$和$Z$,得

$$M=\mathfrak{p},\ Z=\mathfrak{n}.$$

有了这几个值,利用前面的规则,我们得到

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{N}+\mathfrak{p}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{n}-\mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{a}=-\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{n}-\mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\mathfrak{q}}{p\sin\varphi}.$$

§ 208

求得了 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{a}$,那么

$$\frac{M-(\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z)Z}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}$$

是一个整函数,记它为 P,则跟前面一样的表达式

$$\mathrm{P}-(\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z)Z$$

一样地被 $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ 整除,从而将 P 中的 z^n 换为$\frac{p^n}{q^n}\cdot\cos n\varphi$ 和$\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi$,记所得为 $\mathfrak{R}$ 和 $\mathfrak{r}$,得

$$\mathfrak{B}=\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N}+\mathfrak{r}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n}-\mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{b}=-\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n}-\mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

§ 209

对应于

$$(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k$$

的部分分式如何求,从以上所讲,我们已经可以得出结论.记

$$N=(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^kZ,$$

也即我们要将

$$\frac{M}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^kZ.}$$

分解成部分分式,假定因式$(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k$ 产生的部分分式为

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k}+\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^{k-1}}$$

$$+\frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{c}z}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^{k-2}}+\frac{\mathfrak{D}+\mathfrak{d}z}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^{k-3}}+\cdots,$$

那么记

$$z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \text{ 时 } M=\mathfrak{M},Z=\mathfrak{N},$$

$$z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \text{ 时}, M=\mathfrak{m},Z=\mathfrak{n},$$

则

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{N}+\mathfrak{m}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{n}-\mathfrak{m}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

$$\mathfrak{a}=-\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{n}-\mathfrak{m}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+n^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

首先,令

$$\frac{M-(\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z)Z}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}=P,$$

记

$$z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \text{ 时}, P=\mathfrak{B}$$

$$z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \text{ 时}, P=\mathfrak{p},$$

则

$$\mathfrak{B}=\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{N}+\mathfrak{p}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{n}-\mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$b=-\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{n}-\mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

其次,令

$$\frac{P-(\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z)Z}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}=Q,$$

记

$$z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \text{ 时}, Q=\mathfrak{Q}$$

$$z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \text{ 时}, Q=\mathfrak{q}$$

则

$$\mathfrak{C}=\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{N}+\mathfrak{q}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{n}-\mathfrak{q}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{c}=-\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{n}-\mathfrak{q}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

再次,令

$$\frac{Q-(\mathfrak{C}+\mathfrak{c}z)}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}=R,$$

记

$$z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \text{ 时}, R=\mathfrak{R}$$

$$z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \text{ 时}, R=\mathfrak{r};$$

则

$$\mathfrak{D}=\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N}+\mathfrak{r}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n}-\mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\mathfrak{d}=-\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n}-\mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

继续下去,直至以 $p^2-2pqz\cos\varphi+\mathfrak{q}^2z^2$ 为分母的那个部分分式的分子被确定.

例:考虑分数函数

$$\frac{z-z^3}{(1+z^2)^4(1+z^4)},$$

记分母的因式 $(1+z^2)^4$ 产生的部分分式为

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z}{(1+z^2)^4}+\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z}{(1+z^2)^3}+\frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{c}z}{(1+z^2)^2}+\frac{\mathfrak{D}+\mathfrak{d}z}{1+z^2}.$$

与一般形式比较,得

$$p=1, q=1, \cos\varphi=0, \varphi=\frac{\pi}{2}$$

又

$$M = z - z^3, Z = 1 + z^4.$$

从而

$$\mathfrak{M} = 0, \mathfrak{m} = 2, \mathfrak{N} = 2, \mathfrak{n} = 0, \sin\varphi = 1,$$

这样我们得到

$$\mathfrak{A} = -\frac{4}{4}\cdot 0 = 0, \mathfrak{a} = 1.$$

即

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z = z,$$

从而

$$P = \frac{z - z^3 - z - z^5}{1 + z^2} = -z^3,$$

继而

$$\mathfrak{P} = 0, \mathfrak{p} = 1,$$

进而

$$\mathfrak{B} = 0, \mathfrak{b} = \frac{1}{2}.$$

这样,我们有

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z = \frac{1}{2}z \text{ 和 } Q = \frac{-z^3 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^5}{1 + z^2} = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3,$$

从而

$$\mathfrak{Q} = 0, \mathfrak{q} = 0,$$

继而

$$\mathfrak{C} = 0, \mathfrak{c} = 0.$$

由此得

$$R = -\frac{\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^3}{1 + z^2} = -\frac{1}{2}z,$$

从而

$$\mathfrak{R}=0,\mathfrak{r}=-\frac{1}{2}$$

进而

$$\mathfrak{D}=0,\mathfrak{b}=-\frac{1}{4}.$$

得所求部分分式为

$$\frac{z}{(1+z^2)^4}+\frac{z}{2(1+z^2)^3}-\frac{z}{4(1+z^2)}.$$

剩下的那个分式的分子为

$$S=\frac{R-(\mathfrak{D}+\mathfrak{b}z)}{1+z^2}=-\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}z^3.$$

分式为

$$\frac{-z+z^3}{4(1+z^4)}$$

§ 210

这个方法在得到因式$(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k$产生的部分分式的同时,还得到了以 Z 为分母的那个分式(两部分加起来等于题给的函数).在求

$$\frac{M}{(p^2-2pq\cos\varphi+q^2z^2)^KZ}$$

的由因式$(p^2-2pq\cos\varphi+q^2z^2)^k$产生的各个部分分式的过程中形成了序列$P,Q,R,S,T,\cdots$.这序列的最后一项,就是剩下那个分式的分子,分母为 Z.如果 $K=1$,$\frac{P}{Z}$就是剩下那个分式;如果 $K=2$,$\frac{Q}{Z}$就是剩下那个分式;如果 $K=3$,$\frac{R}{Z}$就是剩下那个分式,类推.得到了以 Z 为分母的那个分式,我们要做的是再将它分解成部分分式.

第十三章

递推级数

§ 211

按分数函数表示的那样进行除法，我们得到一种级数. 棣莫弗称这种级数为递推级数. 递推级数的任何一项，都依某个固定的公式，由前几项推出.

固定公式由分数函数的分母决定. 这我们前面讲过. 现在，我们能够把分数函数分解为更简单的部分分式. 因而分数函数的递推级数，可用更简单的递推级数之和表示. 本章我们就讲构成递推级数的更简递推级数.

§ 212

设用除法将真分数函数

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+\cdots}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\cdots}$$

表示成了递推级数

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \cdots$$

这真分数函数的部分分式我们会求，将部分分式表示成递推级数，做起来简单，其性质易于考查.部分分式的递推级数加起来就是这真分数函数的递推级数

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \cdots.$$

§ 213

设部分分式产生的递推级数为

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \cdots$$

$$a' + b'z + c'z^2 + d'z^3 + e'z^4 + \cdots$$

$$a'' + b''z + c''z^2 + d''z^3 + e''z^4 + \cdots$$

$$a''' + b'''z + c'''z^2 + d'''z^3 + e'''z^4 + \cdots$$

$$\cdots\cdots$$

这些级数加起来应该等于

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots.$$

由此我们得到

$$A = a + a' + a'' + a''' + \cdots$$

$$B = b + b' + b'' + b''' + \cdots$$

$$C = c + c' + c'' + c''' + \cdots$$

$$D = d + d' + d'' + d''' + \cdots$$

$$\cdots\cdots$$

这样一来，如果能够求出部分分式产生的各个级数中 z^n 的系数，那么这些系数的和就是递推级数 $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ 中 z^n 的系数.

§ 214

这里可能产生一个疑问，两个级数相等，它们同次幂的系数一

定相等吗,即

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}z+\mathfrak{C}z^2+\mathfrak{D}z^3+\cdots$$

时,一定 $A=\mathfrak{A}, B=\mathfrak{B}, C=\mathfrak{C}, D=\mathfrak{D},\cdots$吗.我们利用等式应该对 z 的任何值都成立这一点,就可消除这一疑问.如果 $z=0$,则显然 $A=\mathfrak{A}$,两边去掉这相等的项,除剩下的方程以 z,我们得到

$$B+Cz+Dz^2+\cdots=\mathfrak{B}+\mathfrak{C}z+\mathfrak{D}z^2+\cdots,$$

由此我们得到 $B=\mathfrak{B}$.类似地,我们得到 $C=\mathfrak{C}, D=\mathfrak{D},\cdots$.

§ 215

现在我们考察由分数函数的各种部分分式所产生的级数.首先,分式

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-pz}$$

产生的级数为

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-pz}=\mathfrak{A}+\mathfrak{A}pz+\mathfrak{A}p^2z^2+\mathfrak{A}p^3z^3+\cdots,$$

其通项为

$$\mathfrak{A}p^nz^n.$$

称这个表达式为通项,是因为将其中的 n 依次换为所有的整数,我们就得到级数的所有的项.

其次,分式

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^2}$$

产生的级数为

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^2}=\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}pz+3\mathfrak{A}p^2z^2+4\mathfrak{A}p^3z^3+\cdots,$$

其通项为

$$(n+1)\mathfrak{A}p^nz^n.$$

再次

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^3}=\mathfrak{A}+3\mathfrak{A}pz+6\mathfrak{A}p^2z^2+10\mathfrak{A}p^3z^3+\cdots,$$

其通项为

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\mathfrak{A}p^nz^n.$$

一般地,分式

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^k}$$

产生的级数

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^k}=\mathfrak{A}+k\mathfrak{A}pz+\frac{k(k+1)}{1\cdot 2}\mathfrak{A}p^2z^2$$
$$+\frac{k(k+1)(k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\mathfrak{A}p^3z^3+\cdots,$$

其通项为

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)}\mathfrak{A}p^nz^n.$$

从级数的构成本身,得到这通项为

$$\frac{k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\mathfrak{A}p^nz^n.$$

这两个通项的相等,可由交叉相乘得出.事实上,交叉相乘得

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)\cdots(n+k-1)=1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)\cdot k\cdots(k+n-1),$$

这是一个等式.

§ 216

这样,每给一个分数函数,我们先将它分解成状如$\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^k}$的部分分式,再求出每个部分分式的递推级数的通项,最后将求得的通项加起来,就得到所给分数函数的递推级数

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$$

的通项.

例 1:求分数函数

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2}$$

的递推级数的通项.

由该函数得到的级数是

$$1 + 0z + 2z^2 + 2z^3 + 6z^4 + 10z^5 + 22z^6 + 42z^7 + 86z^8 + \cdots.$$

为了求得通项的系数,我们先将

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2}$$

分解成部分分式,得

$$\frac{\frac{2}{3}}{1+z} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2z}.$$

由此得到所求通项为

$$\left(\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n\right)z^n = \frac{2^n \pm 2}{3}z^n,$$

n 为偶数时取正号,n 为奇数时取负号.

例 2:求分式

$$\frac{1-z}{1-5z+6z^2}$$

产生的递推级数

$$1 + 4z + 14z^2 + 46z^3 + 146z^4 + 454z^5 + \cdots$$

的通项.

分母等于$(1-2z)(1-3z)$,从而分式分解为

$$\frac{-1}{1-2z} + \frac{2}{1-3z}.$$

由此得通项为

$$2\cdot 3^n z^n - 2^n z^n = (2\cdot 3^n - 2^n)z^n.$$

例 3:求分式

$$\frac{1+2z}{1-z-z^2}$$

展成的级数

$$1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+29z^6+47z^7+\cdots$$

的通项

分母的因式为

$$1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z \text{ 和 } 1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z,$$

从而分式的分解式为

$$\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}+\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z},$$

由此得通项为

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}z^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}z^n.$$

例 4:求分式

$$\frac{a+bz}{1-\alpha z-\beta z^2}$$

展成的级数

$$a+(\alpha a+b)z+(\alpha^2 a+\alpha b+\beta a)z^2+(\alpha^3 a+\alpha^2 b+2\alpha\beta a$$
$$+\beta b)z^3+\cdots$$

的通项.

所给分式的部分分式表示式为

$$\frac{(a(\sqrt{\alpha^2+4\beta}+\alpha)+2b):2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{1-\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}z}$$

$$+\frac{(a(\sqrt{\alpha^2+4\beta}-\alpha)-2b):2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{1-\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}z},$$

由此得所求通项为

$$\frac{a(\sqrt{\alpha^2+4\beta}+\alpha)+2b}{2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right)^n z^n$$

$$+\frac{a(\sqrt{\alpha^2+4\beta}-\alpha)-2b}{2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right)^n z^n.$$

这是通项的通用公式,适用于每项都由前两项推出的递推级数.

例 5:求分式

$$\frac{1}{1-z-z^2+z^3}=\frac{1}{(1-z)^2(1+z)}$$

展成的级数

$$1+z+2z^2+2z^3+3z^4+3z^5+4z^6+4z^7+\cdots$$

的通项.

级数系数的规律性是显然的.分式的部分分式表示式为

$$\frac{\frac{1}{2}}{(1-z)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{1-z}+\frac{\frac{1}{4}}{1+z},$$

由此得通项为

$$\frac{1}{2}(n+1)z^n+\frac{1}{4}z^n+\frac{1}{4}(-1)^n z^n=\frac{2n+3\pm1}{4}z^n,$$

n 为偶数时取正号,n 为奇数时取负号.

§ 217

用上述方法我们可以求出一切递推级数的通项,因为分式都可以分解成以线性因式的幂为分母的部分分式.但是如果我们想避开虚表达式,那我们就得考虑状如

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}, \quad \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2},$$

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^k},$$

的部分分式所展成的级数.首先,由于

$$\cos n\varphi = 2\cos\varphi\cos(n-1)\varphi - \cos(n-2)\varphi,$$

我们得到:

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}$$

展成的级数为

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}pz\cos\varphi+2\mathfrak{A}p^2z^2\cos2\varphi+2\mathfrak{A}p^3z^3\cos3\varphi+2\mathfrak{A}p^4z^4\cos4\varphi+\cdots\\
&\qquad+\mathfrak{A}p^2z^2+2\mathfrak{A}p^3z^3\cos\varphi+2\mathfrak{A}p^4z^4\cos2\varphi+\cdots\\
&\qquad\qquad+\mathfrak{A}p^4z^4+\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots
\end{aligned}$$

这个级数的通项求起来不那么容易.

§ 218

为了写出上节级数的通项,我们考虑这样两个级数:

$Ppz\sin\varphi+Pp^2z^2\sin2\varphi+Pp^3z^3\sin3\varphi+Pp^4z^4\sin4\varphi+\cdots,$

$Q+Qpz\cos\varphi+Qp^2z^2\cos2\varphi+Qp^3z^3\cos3\varphi+Qp^4z^4\cos4\varphi+\cdots.$

它们分别是分母同为

$$1-2pz\cos\varphi+p^2z^2$$

的两个分式的展开式.前一个分式为

$$\frac{Ppz\sin\varphi}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2},$$

后一个分式为

$$\frac{Q-Qpz\cos\varphi}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}.$$

这两个分式相加，和为

$$\frac{Q + Ppz\sin\varphi - Qpz\cos\varphi}{1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2},$$

这个和展成的级数，其通项为

$$(P\sin n\varphi + Q\cos n\varphi)p^nz^n.$$

将分式

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2}$$

与刚才的和相比较，得

$$Q = \mathfrak{A},\ P = \mathfrak{A}\cos\varphi + \mathfrak{B}\csc\varphi.$$

从而，展开

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2}$$

所成的级数，其通项为

$$\frac{\mathfrak{A}\cos\varphi\sin n\varphi + \mathfrak{B}\sin n\varphi + \mathfrak{A}\sin\varphi\cos n\varphi}{\sin\varphi}p^nz^n$$

$$= \frac{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi + \mathfrak{B}\sin n\varphi}{\sin\varphi}p^nz^n.$$

§ 219

为了得到以幂

$$(1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2)^K$$

为分母情况下的通项，我们把这种分式表示成两个含有虚数的分式之和

$$\frac{a}{(1 - (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)pz)^K} + \frac{b}{(1 - (\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)pz)^K}.$$

这个和展成的级数，其通项为

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+K-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(K-1)}(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi)ap^nz^n$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+K-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots(K-1)}(\cos n\varphi-\sqrt{-1}\sin n\varphi)bp^nz^n.$$

令

$$a+b=f,\ a-b=\frac{g}{\sqrt{-1}},$$

则

$$a=\frac{f\sqrt{-1}+g}{2\sqrt{-1}},\ b=\frac{f\sqrt{-1}-g}{2\sqrt{-1}},$$

那么,表达式

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+K-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots(K-1)}(f\cos n\varphi+g\sin n\varphi)p^nz^n$$

就是分式的和

$$\frac{\frac{1}{2}f+\frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{[1-(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)pz]^K}+\frac{\frac{1}{2}f-\frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{[1-(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)pz]^K},$$

或写成单个分式

$$\frac{\left\{\begin{matrix}f-Kfpz\cos\varphi+\frac{K(K-1)}{1\cdot2}fp^2z^2\cos2\varphi-\frac{K(K-1)(K-2)}{1\cdot2\cdot3}\\ fp^3z^3\cos3\varphi+\cdots\\ +Kgpz\sin\varphi-\frac{K(K-1)}{1\cdot2}fp^2z^2\sin2\varphi+\frac{K(K-1)(K-2)}{1\cdot2\cdot3}\\ fp^3z^3\sin3\varphi-\cdots\end{matrix}\right\}}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^k}$$

展成的级数的通项.

§ 220

如果 $k=2$,那么分式

$$\frac{f-2pz(f\cos\varphi-g\sin\varphi)+p^2z^2(f\cos2\varphi-g\sin2\varphi)}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2}$$

产生的级数,其通项为

$$(n+1)(f\cos n\varphi+g\sin n\varphi)p^nz^n.$$

但是,由分式

$$\frac{a}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}=\frac{a-2apz\cos\varphi+ap^2z^2}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2}$$

产生的级数,其通项为

$$\frac{a\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}p^nz^n.$$

将这两个分式相加,并令

$$a+f=\mathfrak{A}$$

$$2a\cos\varphi+2f\cos\varphi-2g\sin\varphi=-\mathfrak{B}$$

$$a+f\cos2\varphi-g\sin2\varphi=0,$$

则

$$g=\frac{\mathfrak{B}+2\mathfrak{A}\cos\varphi}{2\sin\varphi}=\frac{\mathfrak{B}\sin\varphi+\mathfrak{A}\sin2\varphi}{2\sin^2\varphi}$$

$$a=\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi}{1-\cos2\varphi}=\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi}{2\sin^2\varphi}$$

$$f=-\frac{\mathfrak{A}\cos2\varphi+\mathfrak{B}\cos\varphi}{2\sin^2\varphi}$$

由此,分式

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2}$$

产生的级数,其通项为

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi}{2\sin^3\varphi}\sin(n+1)\varphi p^nz^n$$

$$+(n+1)\frac{\mathfrak{B}\sin\varphi\sin n\varphi+\mathfrak{A}\sin2\varphi\sin n\varphi-\mathfrak{B}\cos\varphi\cos n\varphi-\mathfrak{A}\cos2\varphi\cos n\varphi}{2\sin^2\varphi}p^nz^n$$

$$=-\frac{(n+1)(\mathfrak{A}\cos(n+2)\varphi+\mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi)}{2\sin^2\varphi}p^nz^n$$

$$+\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi)\sin(n+1)\varphi}{2\sin^3\varphi}p^nz^n$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(n+3)\sin(n+1)\varphi-\frac{1}{2}(n+1)\sin(n+3)\varphi}{2\sin^3\varphi}\mathfrak{A}p^nz^n$$

$$+\frac{\frac{1}{2}(n+2)\sin n\varphi-\frac{1}{2}n\sin(n+2)\varphi}{2\sin^3\varphi}\mathfrak{B}p^nz^n.$$

也即,分式

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2}$$

产生的级数,其通项为

$$\frac{(n+3)\sin(n+1)\varphi-(n+1)\sin(n+3)\varphi}{4\sin^3\varphi}\mathfrak{A}p^nz^n$$

$$+\frac{(n+2)\sin n\varphi-n\sin(n+2)\varphi}{4\sin^3\varphi}\mathfrak{B}p^nz^n.$$

§ 221

$k=3$ 时,分式

$$\frac{f-3pz(f\cos\varphi-g\sin\varphi)+3p^2z^2(f\cos2\varphi-g\sin2\varphi)-p^3z^3(f\cos3\varphi-g\sin3\varphi)}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^3}$$

产生的级数,其通项为

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot2}(f\cos n\varphi+g\sin n\varphi)p^nz^n.$$

而分式

$$\frac{a+bpz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2}$$

$$=\frac{a-pz(2a\cos\varphi-b)+p^2z^2(a-2b\cos\varphi)+bp^3z^3}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^3}$$

产生的级数,其通项为

$$\frac{(n+3)\sin(n+1)\varphi-(n+1)\sin(n+3)\varphi}{4\sin^3\varphi}ap^nz^n$$

$$+\frac{(n+2)\sin n\varphi-n\sin(n+2)\varphi}{4\sin^3\varphi}bp^n z^n.$$

这两个分式相加,并令分子等于 $\mathfrak{A}$,则

$$a+f=\mathfrak{A}$$

$$3f\cos\varphi-3g\sin\varphi+2a\cos\varphi-b=0$$

$$3f\cos2\varphi-3g\sin2\varphi+a-2b\cos\varphi=0$$

$$f\cos3\varphi-g\sin3\varphi-b=0.$$

从而得

$$a=\frac{f\cos3\varphi-g\sin3\varphi-3f\cos\varphi+3g\sin\varphi}{2\cos\varphi}$$

$$=2g\sin^2\varphi\operatorname{tang}\varphi-f-2f\sin^2\varphi.$$

又得

$$\frac{f}{g}=\frac{\sin5\varphi-2\sin3\varphi+\sin\varphi}{\cos5\varphi-2\cos3\varphi+\cos\varphi}$$

和

$$a+f=\mathfrak{A}=2g\sin^2\varphi\operatorname{tg}\varphi-2f\sin^2\varphi,$$

也即

$$\frac{\mathfrak{A}}{2\sin^2\varphi}=\frac{g\sin\varphi-f\cos\varphi}{\cos\varphi}.$$

由此最后得到

$$f=\frac{\mathfrak{A}(\sin\varphi-2\sin3\varphi+\sin5\varphi)}{16\sin^5\varphi},$$

$$g=\frac{\mathfrak{A}(\cos\varphi-2\cos3\varphi+\cos5\varphi)}{16\sin^5\varphi}.$$

由于

$$16\sin^5\varphi=\sin5\varphi-5\sin3\varphi+10\sin\varphi$$

得到

$$a=\frac{\mathfrak{A}(9\sin\varphi-3\sin3\varphi)}{16\sin^5\varphi},$$

$$b=\frac{\mathfrak{A}(-\sin2\varphi+\sin2\varphi)}{16\sin^5\varphi}=0.$$

又由于

$$3\sin\varphi - \sin 3\varphi = 4\sin^3\varphi$$

得到

$$a = \frac{3\mathfrak{A}}{4\sin^2\varphi}.$$

这样一来,通项为

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\mathfrak{A}p^n z^n \frac{\sin(n+1)\varphi - 2\sin(n+3)\varphi + \sin(n+5)\varphi}{16\sin^5\varphi}$$

$$+ 3\mathfrak{A}p^n z^n \cdot \frac{(n+3)\sin(n+1)\varphi - (n+1)\sin(n+3)\varphi}{16\sin^5\varphi}$$

$$= \frac{\mathfrak{A}p^n z^n}{16\sin^5\varphi}\left\{\frac{(n+4)(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+1)\varphi - \frac{2(n+1)(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+3)\varphi + \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\sin(n+5)\varphi\right\}.$$

§ 222

这样,产生于

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{(1 - 2pz\cos\varphi + p^2 z^2)^3}$$

的级数,其通项为

$$\frac{\mathfrak{A}p^n z^n}{16\sin^5\varphi}\left\{\frac{(n+4)(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+1)\varphi - \frac{2(n+1)(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+3)\varphi + \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\sin(n+5)\varphi\right\}$$

$$+ \frac{\mathfrak{B}p^n z^n}{16\sin^5\varphi}\left\{\frac{(n+3)(n+4)}{1\cdot 2}\sin n\varphi\right.$$

$$-\frac{2n(n+4)}{1\cdot 2}\sin(n+2)\varphi$$
$$+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\sin(n+4)\varphi\Big\}.$$
进一步;让 k 的值加 1,我们有,产生于
$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^4}$$
的级数,其通项为
$$\frac{\mathfrak{A}p^nz^n}{64\sin^7\varphi}\Big\{\frac{(n+7)(n+6)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+1)\varphi$$
$$-\frac{3(n+1)(n+7)(n+6)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+3)\varphi$$
$$+\frac{3(n+1)(n+2)(n+7)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+5)\varphi-$$
$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+7)\varphi\Big\}$$
$$+\frac{\mathfrak{B}p^nz^n}{64\sin^7\varphi}\Big\{\frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin n\varphi-$$
$$\frac{3n(n+6)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+2)\varphi$$
$$+\frac{3n(n+1)(n+6)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+4)\varphi$$
$$-\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+6)\varphi\Big\}.$$
分母幂次更高时,通项的求法,不难从上面的讨论弄清.我们列出下面的等式①,供进一步讨论时使用.
$$\sin\varphi=\sin\varphi$$
$$4\sin^3\varphi=3\sin\varphi-\sin3\varphi$$
$$16\sin^5\varphi=10\sin\varphi-5\sin3\varphi+\sin5\varphi$$
$$64\sin^7\varphi=35\sin\varphi-21\sin3\varphi+7\sin5\varphi-\sin7\varphi$$

① 参见 § 262.——译者

$$256\sin^9\varphi = 126\sin\varphi - 84\sin3\varphi + 36\sin5\varphi - 9\sin7\varphi + \sin9\varphi$$

……

§ 223

部分分式级数的通项,我们会求了.部分分式级数通项之和,就是分式级数的通项.下面举例,具体说明.

从分式

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)} = \frac{1}{1-z-z^2+z^4+z^5-z^6}$$

得递推级数

$$1+z+2z^2+3z^3+4z^4+5z^5+7z^6+8z^7+10z^8+12z^9+\cdots,$$

求通项.

分解分母为因式,得

$$\frac{1}{(1-z)^3(1+z)(1+z+z^2)},$$

分解分式为部分分式,得

$$\frac{1}{6(1-z)^3}+\frac{1}{4(1-z)^2}+\frac{17}{72(1-z)}+\frac{1}{8(1+z)}+\frac{2+z}{9(1+z+z^2)}.$$

第一个部分分式,$\frac{1}{6(1-z)^3}$,给出通项

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot2}\frac{1}{6}z^n = \frac{n^2+3n+2}{12}z^n,$$

第二、三、四个部分分式

$$\frac{1}{4(1-z)^2},\frac{17}{72(1-z)},\frac{1}{8(1+z)}$$

给出的通项依次为

$$\frac{n+1}{4}z^n,\frac{17}{72}z^n,\frac{1}{8}(-1)^nz^n.$$

第五个部分分式,$\frac{2+z}{9(1+z+z^2)}$与

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}(\S 218),$$

相比较,我们有

$$p=-1,\varphi=\frac{\pi}{3}=60^\circ,\mathfrak{A}=\frac{2}{9},\mathfrak{B}=-\frac{1}{9},$$

从而第五个部分分式给出的通项为

$$\frac{2\sin(n+1)\varphi-\sin n\varphi}{9\sin\varphi}(-1)^n z^n$$

$$=\frac{4\sin(n+1)\varphi-2\sin n\varphi}{9\sqrt{3}}(-1)^n z^n$$

$$=\frac{4\sin(n+1)\frac{\pi}{3}-2\sin n\frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}}(-1)^n z^n.$$

这五个通项的和

$$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{47}{72}\right)z^n\pm\frac{1}{8}z^n\pm\frac{4\sin(n+1)\frac{\pi}{3}-2\sin n\frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}}z^n$$

就是我们所求的通项. n 为偶数时取正号, n 为奇数时取负号,我们指出, $n=3m$ 时

$$\frac{4\sin\frac{1}{3}(n+1)\pi-2\sin\frac{1}{3}n\pi}{9\sqrt{3}}=\pm\frac{2}{9};$$

$n=3m+1$ 或 $n=3m+2$ 时,该表达式等于 $\mp\frac{1}{9}$(n 偶取负号, n 奇取正号). 由此我们得到

如果	则通项为
$n=6m+0$	$(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+1)z^n$
$n=6m+1$	$(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{5}{12})z^n$
$n=6m+2$	$(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{2}{3})z^n$
$n=6m+3$	$(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{3}{4})z^n$
$n=6m+4$	$(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{2}{3})z^n$
$n=6m+5$	$(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{5}{12})z^n$

例如 $n=50$,此时 $n=6m+2$,级数的项为 $234z^{50}$.

例 1:从分式

$$\frac{1+z+z^2}{1-z-z^4+z^5}$$

得到递推级数

$$1+2z+3z^2+3z^3+4z^4+5z^5+6z^6+6z^7+7z^8+\cdots,$$

求通项.

该分式可化成

$$\frac{1+z+z^2}{(1-z)^2(1+z)(1+z^2)},$$

从而可分解成

$$\frac{3}{4(1-z)^2}+\frac{3}{8(1-z)}+\frac{1}{8(1+z)}+\frac{-1+z}{4(1+z^2)}.$$

前三个部分分式

$$\frac{3}{4(1-z)^2},\frac{3}{8(1-z)},\frac{1}{8(1+z)}$$

给出的通项依次为

$$\frac{3(n+1)}{4}z^n,\frac{3}{8}z^n,\frac{1}{8}(-1)^nz^n.$$

将第四个部分分式$\frac{-1+z}{4(1+z^2)}$与表达式

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}$$

相比较，我们有

$$p=1,\cos\varphi=0,\varphi=\frac{\pi}{2},\mathfrak{A}=-\frac{1}{4},\mathfrak{B}=+\frac{1}{4}.$$

从而，第四个部分分式对应的通项为

$$\left(-\frac{1}{4}\sin\frac{n+1}{2}\pi+\frac{1}{4}\sin\frac{n}{2}\pi\right)z^n.$$

我们所求的通项就等于这四个通项的和

$$\left(\frac{3}{4}n+\frac{9}{8}\right)z^n\pm\frac{1}{8}z^n-\frac{1}{4}\left(\sin\frac{n+1}{2}\pi-\sin\frac{n}{2}\pi\right)z^n.$$

由此我们得到

如果	则通项为
$n=4m+0$	$\left(\frac{3}{4}n+1\right)z^n$
$n=4m+1$	$\left(\frac{3}{4}n+\frac{5}{4}\right)z^n$
$n=4m+2$	$\left(\frac{3}{4}n+\frac{3}{2}\right)z^n$
$n=4m+3$	$\left(\frac{3}{4}n+\frac{3}{4}\right)z^n.$

例如，$n=50$，此时 $n=4m+2$，级数的项为 $39z^{50}$.

§ 224

由递推级数，易于得到产生它的分式，有了这分式，就可以按刚讨论过的规则求出级数的通项. 从递推级数的递推性，即每一项都可由它的前几项推出，我们可直接写出产生它的分式的分母. 这分母的因式决定通项的形状，分子决定通项的系数. 设递推级数为

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \cdots,$$

假定递推规律为

$$D = \alpha C + \beta B + \gamma A, E = \alpha D + \beta C + \gamma B, F = \alpha E + \beta D + \gamma C, \cdots$$

则分母为

$$1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3,$$

棣莫弗称 $+\alpha, +\beta, +\gamma$ 为递推尺度,递推尺度决定递推规律,并给出递推级数所由产生的分式的分母.

§ 225

为了求出通项,也即求出任何幂 z^n 的系数,我们先求出 $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3$ 的线性因式,或者有时为避免虚数,求出它的二次因式.如果因式都是实的,且相异,为

$$(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz),$$

那么产生级数的分式可分解为

$$\frac{\mathfrak{A}}{1 - pz} + \frac{\mathfrak{B}}{1 - qz} + \frac{\mathfrak{C}}{1 - rz},$$

因而级数的通项为

$$(\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n)z^n;$$

如果因式中有两个相等,例如 $q = p$,则通项为

$$[(\mathfrak{A}(n+1) + \mathfrak{B})p^n + \mathfrak{C}r^n]z^n;$$

如果 $p = q = r$,则通项为

$$(\mathfrak{A}\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} + \mathfrak{B}(n+1) + \mathfrak{C})p^n z^n;$$

如果分母 $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3$ 有二次因式,即它等于

$$(1 - pz)(1 - 2qz\cos\varphi + q^2z^2),$$

则通项为

$$(\mathfrak{A}p^n + \frac{\mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi + \mathfrak{C}\sin n\varphi}{\sin\varphi}q^n)z^n.$$

令 n 等于 1,2,3,我们就应该得到 A, Bz, Cz^2,由此即可求出 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ 的值.

§ 226

如果递推尺度只有两个数,即级数的每一项都可由其前两项推出,关系式为

$$C = \alpha B - \beta A, D = \alpha C - \beta B, E = \alpha D - \beta C, \cdots,$$

则产生级数

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + \cdots$$

的分式的分母为

$$1 - \alpha z + \beta z^2.$$

如果这分母的因式为

$$(1 - pz)(1 - qz),$$

则

$$p + q = \alpha, pq = \beta,$$

且级数的通项为

$$(\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n)z^n.$$

由此,$n = 0$,得

$$A = \mathfrak{A} + \mathfrak{B},$$

$n = 1$ 得

$$B = \mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q,$$

从而

$$Aq - B = \mathfrak{A}(q - p),$$

$$\mathfrak{A} = \frac{Aq - B}{q - p}, \mathfrak{B} = \frac{Ap - B}{p - q}.$$

有了 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$,就可以得到

$$P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n, Q = \mathfrak{A}p^{n+1} + \mathfrak{B}q^{n+1},$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\frac{B^2-\alpha AB+\beta A^2}{4\beta-\alpha^2}.$$

§ 227

有了上节的准备,我们可以找到方法,使得每项都可以由它的前一项,而不是前两项推出,由

$$P=\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n, Q=\mathfrak{A}p\cdot p^n+\mathfrak{B}q\cdot q^n$$

得

$$Pq-Q=\mathfrak{A}(q-p)p^n, Pp-Q=\mathfrak{B}(p-q)q^n,$$

两式相乘,得

$$P^2pq-(p+q)PQ+Q^2+\mathfrak{A}\mathfrak{B}(p-q)^2p^nq^n=0.$$

但

$$p+q=\alpha; pq=\beta; (p-q)^2=(p+q)^2-4pq=\alpha^2-4\beta; p^nq^n=\beta^n.$$

代入前式,得

$$\beta P^2-\alpha PQ+Q^2=(\beta A^2-\alpha AB+B^2)\beta^n$$

或

$$\frac{\beta P^2-\alpha PQ+Q^2}{\beta A^2-\alpha AB+B^2}=\beta^n.$$

这是每项都由前两项推出的,这种递推级数的一条重要性质.根据这条性质,从任何一项 P 都可推出其下一项 Q,

$$Q=\frac{1}{2}\alpha P+\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha^2-\beta)P^2+(B^2-\alpha AB+\beta A^2)\beta^n},$$

虽然式中有根号,但不会得到无理数,因为递推级数的项都是有理的.

§ 228

进一步,从任给的相邻两项 Pz^n 和 Qz^{n+1},我们可以求出远离它们的项 Xz^{2n}. 令

$$X = fP^2 + gPQ - h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n,$$

由

$$\begin{aligned} P &= \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n \\ Q &= \mathfrak{A}p^{n+1} + \mathfrak{B}q^{n+1} \\ X &= \mathfrak{A}p^{2n} + \mathfrak{B}q^{2n} \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} fP^2 &= f\mathfrak{A}^2p^{2n} + f\mathfrak{B}^2q^{2n} + 2f\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n \\ gPQ &= g\mathfrak{A}^2p\cdot p^{2n} + g\mathfrak{B}^2q\cdot q^{2n} + g\mathfrak{A}\mathfrak{B}\alpha\beta^n \\ -h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n, \\ X &= \mathfrak{A}P^{2n} + \mathfrak{B}Q^{2n} \end{aligned}$$

比较右端,得

$$\begin{aligned} f + gp &= \frac{1}{\mathfrak{A}} \\ f + gq &= \frac{1}{\mathfrak{B}} \\ h &= 2f + g\alpha. \end{aligned}$$

从而

$$g = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(p-q)}, f = \frac{\mathfrak{A}p - \mathfrak{B}q}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(p-q)}.$$

但

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \frac{\alpha A - 2B}{p-q}, \mathfrak{A}p - \mathfrak{B}q = \frac{\alpha B - 2\beta A}{p-q},$$

代入上式,得

$$f = \frac{\alpha B - 2\beta A}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha^2 - 4\beta)}, g = \frac{\alpha A - 2B}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha^2 - 4\beta)},$$

或者

$$f=\frac{2\beta A-\alpha B}{B^2-\alpha AB+\beta A^2}$$

$$g=\frac{2B-\alpha A}{B^2-\alpha AB+\beta A^2}$$

$$h=\frac{(4\beta-\alpha^2)A}{B^2-\alpha AB+\beta A^2}.$$

最后得到

$$X=\frac{(2\beta A-\alpha B)P^2+(2B-\alpha A)PQ}{B^2-\alpha AB+\beta A^2}-A\beta^n.$$

用类似的方法我们得到

$$X=\frac{(\alpha\beta A-(\alpha^2-2\beta)B)P^2+(2B-\alpha A)Q^2}{\alpha(B^2-\alpha AB+\beta A^2)}-\frac{2B\beta^n}{\alpha},$$

从 X 的两个表达式中消去含 β^n 的项,得

$$X=\frac{(\beta A-\alpha B)P^2+2BPQ-AQ^2}{B^2-\alpha AB+\beta A^2}.$$

§ 229

用上节方法,我们来确定更远的项,记级数为

$$A+Bz+Cz^2+\cdots+Pz^n+Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+\cdots+Xz^{2n}+Yz^{2n+1}+Zz^{2n+2}+\cdots,$$

那么由上节结果我们有

$$Z=\frac{(\beta A-\alpha B)Q^2+2BQR-AR^2}{B^2-\alpha AB+\beta A^2},$$

将

$$R=\alpha Q-\beta P$$

代入,得

$$Z=\frac{-\beta^2AP^2+2\beta(\alpha A-B)PQ+(\alpha B-(\alpha^2-\beta)A)Q^2}{B^2-\alpha AB+\beta A^2}.$$

$$Z=\alpha Y-\beta X\text{，从而 }Y=\frac{Z+\beta X}{\alpha};$$

由此得

$$Y=\frac{-\beta BP^2+2\beta APQ+(B-\alpha A)Q^2}{B^2-\alpha AB+\beta A^2}.$$

这样，用上节方法从 X,Y 我们可以确定 z^{4n} 和 z^{4n+1} 的系数，再进一步，可以确定 z^{8n} 和 z^{8n+1} 的系数，类推.

例：递推级数

$$1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+\cdots+Pz^n+Qz^{n+1}+\cdots$$

每一项的系数都等于其前两项系数的和，从而产生这个级数的分式的分母为

$$1-z-z^2,$$

继而

$$\alpha=1,\beta=-1,\text{又 }A=1,B=3,$$

进而

$$B^2-\alpha AB+\beta A^2=5.$$

这样我们得到

$$Q=\frac{P+\sqrt{5P^2+20(-1)^n}}{2}=\frac{P+\sqrt{5P^2\pm20}}{2},$$

其中的双重符号，n 为偶数时取正，n 为奇数时取负，取 $n=4$，此时 $P=11$，计算得

$$Q=\frac{11+\sqrt{5\cdot121+20}}{2}=\frac{11+25}{2}=18.$$

记 z^{2n} 的系数为 X，则

$$X=\frac{-4P^2+6PQ-Q^2}{5},$$

由此得到 z^8 的系数为

$$\frac{-4\cdot121+6\cdot198-324}{5}=76.$$

由

$$Q=\frac{P+\sqrt{5P^2\pm 20}}{2}$$

得

$$Q^2=\frac{3P^2\pm 10+P\sqrt{5P^2\pm 20}}{2},$$

从而

$$X=\frac{-P^2\mp 2+P\sqrt{5P^2\pm 20}}{2}.$$

我们看到,在本例中,对任何的 n,由 Pz^n 我们都得到

$$\frac{P+\sqrt{5P^2\pm 20}}{2}z^{n+1},\frac{-P^2\mp 2+P\sqrt{5P^2\pm 20}}{2}z^{2n}.$$

§ 230

类似地,对每项都由其前三项推出的递推级数,也可求出每项只由其前两项推出的公式.设级数

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots+Pz^n+Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+\cdots$$

每项都由其前三项推出,递推尺度为 $\alpha,-\beta,+\gamma$,也即产生该级数的那个分式,其分母为

$$1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3.$$

借助分母的因式

$$(1-pz)(1-qz)(1-rz)$$

表示 P,Q,R 时,我们有

$$P=\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n+\mathfrak{C}r^n$$
$$Q=\mathfrak{A}pp^n+\mathfrak{B}qq^n+\mathfrak{C}rr^n$$
$$R=\mathfrak{A}p^2p^n+\mathfrak{B}q^2q^n+\mathfrak{C}r^2r^n.$$

由于

$$p+q+r=\alpha,pq+pr+qr=\beta,pqr=\gamma$$

我们得到方程

$$R^3-(2\alpha Q-\beta P)R^2+((\alpha^2+\beta)Q^2-(\alpha\beta+3\gamma)PQ+\alpha\gamma P^2)R$$
$$-((\alpha\beta-\gamma)Q^3-(\alpha\gamma+\beta^2)Q^2P+2\beta\gamma P^2Q-\gamma^2P^3)$$
$$=\{C^3-(2\alpha B-\beta A)C^2+((\alpha^2+\beta)B^2-(\alpha\beta+3\gamma)AB+\alpha\gamma A^2)C$$
$$-((\alpha\beta-\gamma)B^3-(\alpha\gamma+\beta^2)AB^2+2\beta\gamma A^2B-\gamma^2A^3)\}\cdot\gamma^n.$$

这是 R 的三次方程,这个方程的解,就是由前两项 P,Q 推出 R 的公式.

§ 231

上面讨论了递推级数的通项.现在我们来考察它的和.先指出一点,递推级数的和等于产生它的那个分式.这分式的分母可根据递推规律写出.所以就只剩下求分子了.设级数为

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+Gz^6+\cdots,$$

递推规律给出分母为

$$1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4,$$

记级数的和,也即产生级数的分式为

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}.$$

相比较,我们得到

$$a=A$$
$$b=B-\alpha A$$
$$c=C-\alpha B+\beta A$$
$$d=D-\alpha C+\beta B-\gamma A.$$

代入上式,得级数的和为

$$\frac{A+(B-\alpha A)z+(C-\alpha B+\beta A)z^2+(D-\alpha C+\beta B-\gamma A)z^3}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}.$$

§ 232

有了级数和,求出到某项为止的部分和就不难了.记部分和为

$$s = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots + Pz^n.$$

级数和已知,现在求 Pz^n 后面那一部分的和,记它为

$$t = Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + Tz^{n+4} + \cdots.$$

用 z^{n+1}除这个 t,我们得到一个类似于整个级数的级数,因而它的和为

$$t = \frac{Qz^{n+1} + (R - \alpha Q)z^{n+2} + (S - \alpha R + \beta Q)z^{n+3} + (T - \alpha S + \beta R - \gamma Q)z^{n+4}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}.$$

从整个级数的和减去后面那一部分的和,就得到我们所要的部分和

$$s = \frac{A + (B - \alpha A)z + (C - \alpha B + \beta A)z^2 + (D - \alpha C + \beta B - \gamma A)z^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}$$
$$- \frac{Qz^{n+1} + (R - \alpha Q)z^{n+2} + (S - \alpha R + \beta Q)z^{n+3} + (T - \alpha S + \beta R - \gamma Q)z^{n+4}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}.$$

§ 233

如果递推尺度为两个数:$\alpha, -\beta$,那么从分式

$$\frac{A + (B - \alpha A)z}{1 - \alpha z + \beta z^2}$$

得到的

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots + Pz^n$$

的和为

$$\frac{A + (B - \alpha A)z - Qz^{n+1} - (R - \alpha Q)z^{n+2}}{1 - \alpha z + \beta z^2}.$$

由级数的性质我们有

$$R = \alpha Q - \beta P,$$

代入上式,得

$$\frac{A+(B-\alpha A)z-Qz^{n+1}+\beta Pz^{n+2}}{1-\alpha z+\beta z^2}.$$

例:设级数的截止到 Pz^n 的这一部分为

$$1+3z+4z^2+7z^3+\cdots+Pz^n,$$

这里

$$\alpha=1,\beta=-1,A=1,B=3.$$

则这一部分的和为

$$\frac{1+2z-Qz^{n+1}-Pz^{n+2}}{1-z-z^2}.$$

令 $z=1$,则这和等于

$$1+3+4+7+11+\cdots+P=P+Q-3.$$

将

$$Q=\frac{P+\sqrt{5P^2\pm 20}}{2}$$

代入,得

$$1+3+4+7+11+\cdots+P=\frac{3P-6+\sqrt{5P^2\pm 20}}{2},$$

也即这时的部分和可从最后一项求出.

第十四章

多倍角和等分角

§ 234

设 z 为单位圆的一个角或一段弧,其正弦为 x,余弦为 y,正切为 t,则

$$x^2+y^2=1,t=\frac{x}{y}$$

前面我们讲了,角序列 $z,2z,3z,4z,5z,\cdots$对应的正弦序列和余弦序列,都构成递推尺度①为 $2y,-1$ 的递推级数,我们先看正弦序列

$$\sin 0z=0$$
$$\sin 1z=x$$
$$\sin 2z=2xy$$
$$\sin 3z=4xy^2-x$$
$$\sin 4z=8xy^3-4xy$$
$$\sin 5z=16xy^4-12xy^2+x$$

① 递推尺度的定义见§224—译者

$$\sin 6z = 32xy^5 - 32xy^3 + 6xy$$
$$\sin 7z = 64xy^6 - 80xy^4 + 24xy^2 - x$$
$$\sin 8z = 128xy^7 - 192xy^5 + 80xy^3 - 8xy,$$

由此得

$$\begin{aligned}
&\sin nz \\
&= x\Big(2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)2^{n-3}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}2^{n-5}y^{n-5} \\
&\quad - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}2^{n-7}y^{n-7} + \\
&\quad \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2^{n-9}y^{n-9} - \cdots\Big).
\end{aligned}$$

§ 235

令弧 $nz = s$,则

$$\sin nz = \sin s = \sin(\pi - s) = \sin(2\pi + s) = \sin(3\pi - s) = \cdots,$$

这些正弦都相等.由此我们得到 x 的值

$$\sin\frac{s}{n}, \sin\frac{\pi - s}{n}, \sin\frac{2\pi + s}{n}, \sin\frac{3\pi - s}{n}, \sin\frac{4\pi + s}{n}, \cdots,$$

总共 n 个,它们都满足上节最后的方程.也即这 n 个值都是上节最后那个方程的根.这里要注意的一点是,不能取相同的值做我们方程的根,即所得表达式只能取用一次.取定,则方程的根已知,比较方程的根与系数,我们可以得到一些有价值的结果,这种比较须在方程只含未知数 x 时才能进行,因而我们将 y 换成$\sqrt{1 - x^2}$.这代换因 n 的奇偶而结果不同.

§ 236

我们先考虑 n 为奇数的情形.弦序列 $-z, +z, +3z, +5z, \cdots$

公差为 $2z$,而 $2z$ 的余弦为 $1-2x^2$,所以对应正弦序列的递推尺度为 $2-4x^2,-1$,由此得

$$\sin(-z)=-x$$
$$\sin z=x$$
$$\sin 3z=3x-4x^3$$
$$\sin 5z=5x-20x^3+16x^5$$
$$\sin 7z=7x-56x^3+112x^5-64x^7$$
$$\sin 9z=9x-120x^3+432x^5-576x^7+256x^9,$$

从而,n 为奇数时

$$\sin nz=nx-\frac{n(n^2-1)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5-\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}x^7+\cdots$$

该方程的根为

$$\sin z,\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right),\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right),\sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right),\sin\left(\frac{8\pi}{n}+z\right),\cdots.$$

§ 237

从上节方程得

$$0=1-\frac{nx}{\sin nz}+\frac{n(n^2-1)}{1\cdot2\cdot3}\frac{x^3}{\sin nz}-\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\frac{x^5}{\sin nz}+\cdots\pm2^{n-1}\frac{x^n}{\sin nz},$$

(双重符号处,n 为 4 的倍数减 1 时取正,否则取负),其右端的因式形式为

$$\left(1-\frac{x}{\sin z}\right)\left(1-\frac{x}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)}\right)\left(1-\frac{x}{\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)}\right)\cdots$$

由此得

$$\frac{n}{\sin nz}=\frac{1}{\sin z}+\frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{n}+z)}+\frac{1}{\sin(\frac{4\pi}{n}+z)}+\frac{1}{\sin(\frac{6\pi}{n}+z)}+$$

$\cdots$

共 n 项.由根的积得

$$\mp\frac{2^{n-1}}{\sin nz}=\frac{1}{\sin z\cdot\sin(\frac{2\pi}{n}+z)\sin(\frac{4\pi}{n}+z)\sin(\frac{6\pi}{n}+z)\cdots}$$

或

$$\sin nz=\mp 2^{n-1}\sin z\sin(\frac{2\pi}{n}+z)\sin(\frac{4\pi}{n}+z)\sin(\frac{6\pi}{n}+z)\cdots.$$

由方程的倒数第二项为零得

$$0=\sin z+\sin(\frac{2\pi}{n}+z)+\sin(\frac{4\pi}{n}+z)+\sin(\frac{6\pi}{n}+z)+\cdots.$$

例 1:$n=3$ 时,得

$0=\sin z+\sin(120^\circ+z)+\sin(240^\circ+z)=\sin z+\sin(60^\circ-z)$
$-\sin(60^\circ+z)$.

$$\frac{3}{\sin 3z}=\frac{1}{\sin z}+\frac{1}{\sin(120^\circ+z)}+\frac{1}{\sin(240^\circ+z)}=\frac{1}{\sin z}+\frac{1}{\sin(60^\circ-z)}-\frac{1}{\sin(60^\circ+z)}.$$

$\sin 3z=-4\sin z\sin(120^\circ+z)\sin(240^\circ+z)=4\sin z\sin(60^\circ-z)$
$\cdot\sin(60^\circ+z)$.

跟前面我们注意到的一样,这里也有

$$\sin(60^\circ+z)=\sin z+\sin(60^\circ-z),$$

$$3\csc 3z=\csc z+\csc(60^\circ-z)-\csc(60^\circ+z).$$

例 2:$n=5$ 时,有

$$0=\sin z+\sin(\frac{2}{5}\pi+z)+\sin(\frac{4}{5}\pi+z)+\sin(\frac{6}{5}\pi+z)$$
$$+\sin(\frac{8}{5}\pi+z),$$

或

$$0=\sin z+\sin\left(\frac{2}{5}\pi+z\right)+\sin\left(\frac{1}{5}\pi-z\right)-\sin\left(\frac{1}{5}\pi+z\right)$$

$$-\sin\left(\frac{2}{5}\pi-z\right),$$

或

$$0=\sin z+\sin\left(\frac{1}{5}\pi-z\right)-\sin\left(\frac{1}{5}\pi+z\right)-\sin\left(\frac{2}{5}\pi-z\right)$$

$$+\sin\left(\frac{2}{5}\pi+z\right).$$

还有

$$\frac{5}{\sin 5z}=\frac{1}{\sin z}+\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{5}\pi-z\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{5}\pi+z\right)}$$

$$-\frac{1}{\sin\left(\frac{2}{5}\pi-z\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{2}{5}\pi+z\right)}.$$

和

$$\sin 5z=16\sin z\sin\left(\frac{1}{5}\pi-z\right)\sin\left(\frac{1}{5}\pi+z\right)\sin\left(\frac{2}{5}\pi-z\right)\sin\left(\frac{2}{5}\pi+z\right).$$

例 3：$n=2m+1$ 时，则

$$0=\sin z+\sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)-\sin\left(\frac{\pi}{n}+z\right)$$

$$-\sin\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)$$

$$+\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{n}+z\right)]$$

$$\cdots\cdots$$

$$\pm\sin\left(\frac{m}{n}\pi-z\right)\mp\sin\left(\frac{m}{n}\pi+z\right),$$

双重符号处，m 奇取上，m 偶取下.

另一个方程是

$$\frac{n}{\sin nz}=\frac{1}{\sin z}+\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{n}-z)}-\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{n}+z)}$$

$$-\frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{n}-z)}+\frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{n}+z)}$$

$$+\frac{1}{\sin(\frac{3\pi}{n}-z)}-\frac{1}{\sin(\frac{3\pi}{n}+z)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\pm\frac{1}{\sin(\frac{m\pi}{n}-z)}\mp\frac{1}{\sin(\frac{m\pi}{n}+z)}.$$

该方程不难用余割写出.

再一个是由乘积得到的

$$\sin nz=2^{2m}\sin z\sin(\frac{\pi}{n}-z)\sin(\frac{\pi}{n}+z)\times$$

$$\sin(\frac{2\pi}{n}-z)\sin(\frac{2\pi}{n}+z)\times$$

$$\sin(\frac{3\pi}{n}-z)\sin(\frac{3\pi}{n}+z)\times$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sin(\frac{m\pi}{n}-z)\sin(\frac{m\pi}{n}+z).$$

§ 238

现在考虑 n 为偶数的情形. 由

$$y=\sqrt{1-x^2}\text{和}\cos 2z=1-2x^2$$

知此时递推尺度为 $2-4x^2,-1$,从而

$$\sin 0z=0$$

$$\sin 2z=2x\sqrt{1-x^2}$$

$$\sin 4z = (4x - 8x^3)\sqrt{1-x^2}$$

$$\sin 6z = (6x - 32x^3 + 32x^5)\sqrt{1-x^2}$$

$$\sin 8z = (8x - 80x^3 + 192x^5 - 128x^7)\sqrt{1-x^2},$$

一般地,我们有

$$\sin nz = \left(nx - \frac{n(n^2-4)}{1\cdot2\cdot3}x^3 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5 - \frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}x^7 + \cdots \pm 2^{n-1}x^{n-1}\right)\cdot$$

$\sqrt{1-x^2}$,

n 为任何偶数.

§ 239

为脱去上节方程中的根号,两边平方,得

$$\sin^2 nz = n^2x^2 + Px^4 + Qx^6 + \cdots - 2^{2n-2}x^{2n}$$

或

$$x^{2n} - \cdots - \frac{n^2}{2^{2n-2}}x^2 + \frac{1}{2^{2n-2}}\sin^2 nz = 0.$$

该方程的根为

$$\pm\sin z,\ \pm\sin\left(\frac{\pi}{n} - z\right),\ \pm\sin\left(\frac{2\pi}{n} + z\right),\ \pm\sin\left(\frac{3\pi}{n} - z\right),$$

$\pm\sin\left(\frac{4\pi}{n} + z\right)\cdots$,

共计 n 个,每个都具有双重符号.由最后一项等于全体根的积,开方得

$$\sin nz = \pm 2^{n-1}\sin z\sin\left(\frac{\pi}{n} - z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n} + z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{n} - z\right)\cdots$$

利用该公式时,每次都应该考虑双重符号取正或取负.

例:n 依次取 2,4,6,…,我们得到

$$\sin 2z = 2\sin z\sin(\frac{\pi}{2} - z)$$

$$\sin 4z = 8\sin z\sin(\frac{\pi}{4} - z)\sin(\frac{\pi}{4} + z)\sin(\frac{\pi}{2} - z)$$

$$\sin 6z = 32\sin z\sin(\frac{\pi}{6} - z)\sin(\frac{\pi}{6} + z)\sin(\frac{2\pi}{6} - z)\sin(\frac{2\pi}{6} + z)\sin(\frac{3\pi}{6} - z)$$

$$\sin 8z = 128\sin z\sin(\frac{\pi}{8} - z)\sin(\frac{\pi}{8} + z)\sin(\frac{2\pi}{8} - z)\sin(\frac{2\pi}{8} + z)\cdot\sin(\frac{3\pi}{8} - z)\sin(\frac{3\pi}{8} + z)\sin(\frac{4\pi}{8} - z).$$

§ 240

从刚才的例子可以看出,一般地,n 为偶数时,我们有

$$\begin{aligned}\sin nz = 2^{n-1}\sin z\sin(\frac{\pi}{n} - z)\sin(\frac{\pi}{n} + z) \times \\ \sin(\frac{2\pi}{n} - z)\sin(\frac{2\pi}{n} + z) \times \\ \sin(\frac{3\pi}{n} - z)\sin(\frac{3\pi}{n} + z) \times \\ \cdots\cdots\sin(\frac{\pi}{2} - z).\end{aligned}$$

与前面得到的 n 为奇数时的公式相比较,我们看到,这两种情况可用同一个公式表示.即 n 为奇数和 n 为偶数我们都有

$$\begin{aligned}\sin nz = 2^{n-1}\sin z\sin(\frac{\pi}{n} - z)\sin(\frac{\pi}{n} + z) \times \\ \sin(\frac{2\pi}{n} - z)\sin(\frac{2\pi}{n} + z) \times \\ \sin(\frac{3\pi}{n} - z)\sin(\frac{3\pi}{n} + z) \times \\ \cdots\cdots\end{aligned}$$

因式的个数为 n.

§ 241

多倍角正弦的这种乘积公式,不仅可以用于求多倍角正弦的对数,并且可用于求正弦的类似于 § 184 那样的乘积公式.现在我们有

$$\sin z = 1\sin z$$

$$\sin 2z = 2\sin z\sin(\frac{\pi}{2} - z)$$

$$\sin 3z = 4\sin z\sin(\frac{\pi}{3} - z)\sin(\frac{\pi}{3} + z)$$

$$\sin 4z = 8\sin z\sin(\frac{\pi}{4} - z)\sin(\frac{\pi}{4} + z)\sin(\frac{2\pi}{4} - z)$$

$$\sin 5z = 16\sin z\sin(\frac{\pi}{5} - z)\sin(\frac{\pi}{5} + z)\sin(\frac{2\pi}{5} - z)\sin(\frac{2\pi}{5} + z)$$

$$\sin 6z = 32\sin z\sin(\frac{\pi}{6} - z)\sin(\frac{\pi}{6} + z)\sin(\frac{2\pi}{6} - z)\sin(\frac{2\pi}{6} + z)\sin(\frac{3\pi}{6} - z)$$

……

§ 242

利用$\frac{\sin 2nz}{\sin nz} = 2\cos nz$ 可以把多倍角的余弦表示为乘积:

$$\cos z = 1\sin(\frac{\pi}{2} - z)$$

$$\cos 2z = 2\sin(\frac{\pi}{4} - z)\sin(\frac{\pi}{4} + z)$$

$$\cos 3z = 4\sin(\frac{\pi}{6} - z)\sin(\frac{\pi}{6} + z)\sin(\frac{3\pi}{6} - z)$$

$$\cos 4z = 8\sin(\frac{\pi}{8} - z)\sin(\frac{\pi}{8} + z)\sin(\frac{3\pi}{8} - z)\sin(\frac{3\pi}{8} + z)$$

$$\cos 5z = 16\sin(\frac{\pi}{10} - z)\sin(\frac{\pi}{10} + z)\sin(\frac{3\pi}{10} - z)\sin(\frac{3\pi}{10} + z)$$

$$\cdot\sin(\frac{5\pi}{10} - z),$$

一般地

$$\begin{aligned}\cos nz = 2^{n-1}&\sin(\frac{\pi}{2n} - z)\sin(\frac{\pi}{2n} + z)\times\\ &\sin(\frac{3\pi}{2n} - z)\sin(\frac{3\pi}{2n} + z)\times\\ &\sin(\frac{5\pi}{2n} - z)\sin(\frac{5\pi}{2n} + z)\times\\ &\cdots\cdots\end{aligned}$$

因式个数为 n.

§ 243

从多倍角余弦本身也可以推出上节的公式. 事实上, 令 $\cos z = y$, 则

$$\cos 0z = 1$$
$$\cos 1z = y$$
$$\cos 2z = 2y^2 - 1$$
$$\cos 3z = 4y^3 - 3y$$
$$\cos 4z = 8y^4 - 8y^2 + 1$$
$$\cos 5z = 16y^2 - 20y^3 + 5y$$
$$\cos 6z = 32y^6 - 48y^4 + 18y^2 - 1$$
$$\cos 7z = 64y^7 - 112y^5 + 56y^3 - 7y,$$

一般地

$$\cos nz = 2^{n-1}y^n - \frac{n}{1}2^{n-3}y^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}2^{n-5}y^{n-4}$$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}2^{n-7}y^{n-6}$$
$$+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2^{n-9}y^{n-8}-\cdots.$$

由

$$\cos nz=\cos(2\pi-nz)=\cos(2\pi+nz)=\cos(4\pi\pm nz)$$
$$=\cos(6\pi\pm nz)=\cdots$$

知表达式

$$\cos z,\cos\left(\frac{2\pi}{n}\pm z\right),\cos\left(\frac{4\pi}{n}\pm z\right),\cos\left(\frac{6\pi}{n}\pm z\right),\cdots,$$

都是上面方程的根，这里不同表达式的个数，等于方程根的个数 n.

§ 244

首先我们指出，由于缺少第二项，所以只要 $n\neq 1$，全体根的和就应该等于零，即

$$0=\cos z+\cos\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{n}-z\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)+\cdots$$

右端共 n 项. n 为偶数时，这等号的成立可直接看出，每一个正项都与一个等于它的负项对消. 下面我们考虑 n 为奇数但不等于 1 的情形. 由于

$$\cos v=-\cos(\pi-v)$$

我们得到

$$0=\cos z-\cos\left(\frac{\pi}{3}-z\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+z\right)$$

$$0=\cos z-\cos\left(\frac{\pi}{5}-z\right)-\cos\left(\frac{\pi}{5}+z\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}-z\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}+z\right)$$

$$0=\cos z-\cos\left(\frac{\pi}{7}-z\right)-\cos\left(\frac{\pi}{7}+z\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}-z\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}+z\right)$$
$$-\cos\left(\frac{3\pi}{7}-z\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{7}+z\right),$$

一般地，当 n 为任何一个大于 1 的奇数时，我们有

$$\begin{aligned}0 &= \cos z-\cos\left(\frac{\pi}{n}-z\right)-\cos\left(\frac{\pi}{n}+z\right)\\ &+\cos\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\\ &-\cos\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{n}+z\right)\\ &+\cos\left(\frac{4\pi}{n}-z\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)\\ &\cdots\cdots\end{aligned}$$

右端项数为 n.

§ 245

关于所有项的积的公式，它们将因 n 为奇数，奇偶数①和偶偶数②而不同．但都包含在 § 242 的公式之中，只需将那里的正弦化为余弦，即

$$\cos z=1\cos z$$
$$\cos 2z=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+z\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-z\right)$$
$$\cos 3z=4\cos\left(\frac{2\pi}{6}+z\right)\cos\left(\frac{2\pi}{6}-z\right)\cos z$$
$$\cos 4z=8\cos\left(\frac{3\pi}{8}+z\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}-z\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+z\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-z\right)$$
$$\cos 5z=16\cos\left(\frac{4\pi}{10}+z\right)\cos\left(\frac{4\pi}{10}-z\right)\cos\left(\frac{2\pi}{10}+z\right)$$

---

① 4除不尽的偶数——译者．
② 4除得尽的偶数——译者．

$\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{10}-z\right)\cos z$,

一般地,我们有

$$\cos nz=2^{n-1}\cos\left(\frac{n-1}{2n}\pi+z\right)\cos\left(\frac{n-1}{2n}\pi-z\right)\times$$
$$\cos\left(\frac{n-3}{2n}\pi+z\right)\cos\left(\frac{n-3}{2n}\pi-z\right)\times$$
$$\cos\left(\frac{n-5}{2n}\pi+z\right)\cos\left(\frac{n-5}{2n}\pi-z\right)\times$$
$$\cos\left(\frac{n-7}{2n}\pi+z\right)\cdots\cdots,$$

右端因式的个数为 n.

§ 246

当 n 为奇数,使方程的第一项为 1,则

$$0=1\mp\frac{n\gamma}{\cos nz}+\cdots,$$

双重符号处,$n=4m+1$ 时取上,$n=4m-1$ 时取下. 由此我们得到

$$\frac{1}{\cos z}=\frac{1}{\cos z},$$

$$-\frac{3}{\cos 3z}=\frac{1}{\cos z}-\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-z\right)}-\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}+z\right)},$$

$$+\frac{5}{\cos 5z}=\frac{1}{\cos z}-\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5}-z\right)}-\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5}+z\right)}$$
$$+\frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{5}-z\right)}+\frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{5}+z\right)},$$

一般地,当 $n=2m+1$ 时,我们有

$$\frac{n}{\cos nz}=\frac{2m+1}{\cos(2m+1)z}=\frac{1}{\cos\left(\frac{m}{n}\pi+z\right)}+\frac{1}{\cos\left(\frac{m}{n}\pi-z\right)}$$

$$-\frac{1}{\cos(\frac{m-1}{n}\pi+z)}-\frac{1}{\cos(\frac{m-1}{n}\pi-z)}$$
$$+\frac{1}{\cos(\frac{m-2}{n}\pi+z)}+\frac{1}{\cos(\frac{m-2}{n}\pi-z)}$$
$$-\frac{1}{\cos(\frac{m-3}{n}\pi+z)}\cdots\cdots,$$

右端项数为 n.

§ 247

利用$\frac{1}{\cos v}=\sec v$,我们可以推出下面这些有关正割的性质

$$\sec z=\sec z$$

$$3\sec 3z=\sec(\frac{\pi}{3}+z)+\sec(\frac{\pi}{3}-z)-\sec(\frac{0\pi}{3}+z)$$

$$5\sec 5z=\sec(\frac{2\pi}{5}+z)+\sec(\frac{2\pi}{5}-z)-\sec(\frac{\pi}{5}+z)-\sec(\frac{\pi}{5}-z)+\sec(\frac{0\pi}{5}+z)$$

$$7\sec 7z=\sec(\frac{3\pi}{7}+z)+\sec(\frac{3\pi}{7}-z)-\sec(\frac{2\pi}{7}+z)-\sec(\frac{2\pi}{7}-z)+\sec(\frac{\pi}{7}+z)+\sec(\frac{\pi}{7}-z)-\sec(\frac{0\pi}{7}+z),$$

一般地,$n=2m+1$,则

$$n\sec nz=\sec(\frac{m}{n}\pi+z)+\sec(\frac{m}{n}\pi-z)$$
$$-\sec(\frac{m-1}{n}\pi+z)-\sec(\frac{m-1}{n}\pi-z)$$
$$+\sec(\frac{m-2}{n}\pi+z)+\sec(\frac{m-2}{n}\pi-z)$$
$$-\sec(\frac{m-3}{n}\pi+z)-\sec(\frac{m-3}{n}\pi-z)$$

$$+\sec\left(\frac{m-4}{n}\pi+z\right)+\cdots\cdots\pm\sec z.$$

§ 248

关于余割,从 § 237 我们得到

$$\csc z=\csc z$$

$$3\csc 3z=\csc z+\csc\left(\frac{\pi}{3}-z\right)-\csc\left(\frac{\pi}{3}+z\right)$$

$$5\csc 5z=\csc z+\csc\left(\frac{\pi}{5}-z\right)-\csc\left(\frac{\pi}{5}+z\right)-\csc\left(\frac{2\pi}{5}-z\right)+\csc\left(\frac{2\pi}{5}+z\right)$$

$$7\csc 7z=\csc z+\csc\left(\frac{\pi}{7}-z\right)-\csc\left(\frac{\pi}{7}+z\right)-\csc\left(\frac{2\pi}{7}-z\right)+\csc\left(\frac{2\pi}{7}+z\right)+\csc\left(\frac{3\pi}{7}-z\right)-\csc\left(\frac{3\pi}{7}+z\right),$$

一般地,$n=2m+1$ 时我们有

$$\begin{aligned}n\csc nz=&\csc z+\csc\left(\frac{\pi}{n}-z\right)-\csc\left(\frac{\pi}{n}+z\right)\\&-\csc\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)+\csc\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\\&+\csc\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)-\csc\left(\frac{3\pi}{n}+z\right)\\&\cdots\cdots\\&\mp\csc\left(\frac{m\pi}{n}-z\right)\pm\csc\left(\frac{m\pi}{n}+z\right),\end{aligned}$$

双重符号处,m 为偶数取上,m 为奇数取下.

§ 249

§ 133 我们看到

$$\cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz = (\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n,$$

从而

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}},$$

进而

$$\operatorname{tg} nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n\sqrt{-1} + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n\sqrt{-1}}.$$

令

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = t,$$

则

$$\operatorname{tg} nz = \frac{(1 + t\sqrt{-1})^n - (1 - t\sqrt{-1})^n}{(1 + t\sqrt{-1})^n\sqrt{-1} + (1 - t\sqrt{-1})^n\sqrt{-1}},$$

由此我们得到下列多倍角的正切

$$\operatorname{tg} z = t$$

$$\operatorname{tg} 2z = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\operatorname{tg} 3z = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

$$\operatorname{tg} 4z = \frac{4t - 4t^3}{1 - 6t^2 + t^4}$$

$$\operatorname{tg} 5z = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10t^2 + 5t^4},$$

一般地

$$\operatorname{tg} nz = \frac{nt - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}t^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}t^5 - \cdots}{1 - \frac{n(n-1)}{1\cdot2}t^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}t^4 - \cdots}$$

由

$$\operatorname{tg}(nz)=\operatorname{tg}(\pi+nz)=\operatorname{tg}(2\pi+nz)=\operatorname{tg}(3\pi+nz)=\cdots$$

知

$$\operatorname{tg}z,\operatorname{tg}(\frac{\pi}{n}+z),\operatorname{tg}(\frac{2\pi}{n}+z),\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{n}+z),\cdots$$

为 t 的值或方程的根,个数为 n.

§ 250

使方程的第一项为1,我们得到

$$0=1-\frac{n}{\operatorname{tg}nz}t-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}t^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \operatorname{tg}nz}t^3+\cdots.$$

将该方程的系数与根比较,得

$$n\operatorname{ctg}nz=\operatorname{ctg}z+\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{n}+z)+\operatorname{ctg}(\frac{2\pi}{n}+z)+\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{n}+z)$$

$$+\operatorname{ctg}(\frac{4\pi}{n}+z)+\cdots+\operatorname{ctg}(\frac{n-1}{n}\pi+Z).$$

由此得这些余切的平方和等于

$$\frac{n^2}{\sin^2 nz}-n,$$

更高次幂也可用类似的方法确定.将 n 换为确定的数,得

$$\operatorname{ctg}z=\operatorname{ctg}z$$

$$2\operatorname{ctg}2z=\operatorname{ctg}z+\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}+z)$$

$$3\operatorname{ctg}3z=\operatorname{ctg}z+\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{3}+z)+\operatorname{ctg}(\frac{2\pi}{3}+z)$$

$$4\operatorname{ctg}4z=\operatorname{ctg}z+\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4}+z)+\operatorname{ctg}(\frac{2\pi}{4}+z)+\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{4}+z)$$

$$5\operatorname{ctg}5z=\operatorname{ctg}z+\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{5}+z)+\operatorname{ctg}(\frac{2\pi}{5}+z)+\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{5}+z)$$

$$+\operatorname{ctg}(\frac{4\pi}{5}+z).$$

§ 251

由 $\operatorname{ctg} v = -\operatorname{ctg}(\pi - v)$得

$$\operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg} z$$

$$2\operatorname{ctg} 2z = \operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

$$3\operatorname{ctg} 3z = \operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + z\right)$$

$$4\operatorname{ctg} 4z = \operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + z\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{4} - z\right)$$

$$5\operatorname{ctg} 5z = \operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5} - z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{5} + z\right),$$

一般地

$$\begin{aligned} n\operatorname{ctg} nz &= \operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n} - z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n} + z\right) \\ &\quad - \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \\ &\quad - \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) \\ &\quad \cdots\cdots \end{aligned}$$

取够 n 项为止.

§ 252

考虑高次方程,先看奇数,即 $n = 2m + 1$ 的情形.从 § 249 得

$$t - \operatorname{tg} z = 0$$

$$t^3 - 3t^2 \operatorname{tg} 2z - 3t + \operatorname{tg} 3z = 0$$

$$t^5 - 5t^4 \operatorname{tg} 2z - 10t^3 + 10t^2 \operatorname{tg} 5z + 5t - \operatorname{tg} 2z = 0,$$

一般地

$$t^n - nt^{n-1}\mathrm{tg}nz - \cdots \mp \mathrm{tg}nz = 0,$$

双重符号处，m 偶取负，m 奇取正．从第二项系数得

$$\mathrm{tg}z = \mathrm{tg}z$$

$$3\mathrm{tg}3z = \mathrm{tg}z + \mathrm{tg}(\frac{\pi}{3} + z) + \mathrm{tg}(\frac{2\pi}{3} + z)$$

$$5\mathrm{tg}5z = \mathrm{tg}z + \mathrm{tg}(\frac{\pi}{5} + z) + \mathrm{tg}(\frac{2\pi}{5} + z) + \mathrm{tg}(\frac{3\pi}{5} + z)$$
$$+ \mathrm{tg}(\frac{4\pi}{5} + z)$$

……

§ 253

利用 $\mathrm{tg}v = -\mathrm{tg}(\pi - v)$ 可将大于直角的角的正切化为小于直角的角的正切，有

$$\mathrm{tg}z = \mathrm{tg}z$$

$$3\mathrm{tg}3z = \mathrm{tg}z - \mathrm{tg}(\frac{\pi}{3} - z) + \mathrm{tg}(\frac{\pi}{3} + z)$$

$$5\mathrm{tg}5z = \mathrm{tg}z - \mathrm{tg}(\frac{\pi}{5} - z) + \mathrm{tg}(\frac{\pi}{5} + z) - \mathrm{tg}(\frac{2\pi}{5} - z)$$
$$+ \mathrm{tg}(\frac{2\pi}{5} + z)$$

$$7\mathrm{tg}7z = \mathrm{tg}z - \mathrm{tg}(\frac{\pi}{7} - z) + \mathrm{tg}(\frac{\pi}{7} + z) - \mathrm{tg}(\frac{2\pi}{7} - z)$$
$$+ \mathrm{tg}(\frac{2\pi}{7} + z) - \mathrm{tg}(\frac{3\pi}{7} - z) + \mathrm{tg}(\frac{3\pi}{7} + z),$$

一般地，$n = 2m + 1$ 时，有

$$n\mathrm{tg}nz = \mathrm{tg}z - \mathrm{tg}(\frac{\pi}{n} - z) + \mathrm{tg}(\frac{\pi}{n} + z)$$
$$- \mathrm{tg}(\frac{2\pi}{n} - z) + \mathrm{tg}(\frac{2\pi}{n} + z)$$

$$-\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)+\cdots\cdots$$

$\cdots\cdots$

$$-\operatorname{tg}\left(\frac{m\pi}{n}-z\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{m\pi}{n}+z\right).$$

§ 254

由于上节各式,其右端负号个数依次偶奇交替,所以这些正切的积就等于 $\operatorname{tg}nz$,不带双重符号.即

$$\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}z$$

$$\operatorname{tg}3z=\operatorname{tg}z\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-z\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+z\right)$$

$$\operatorname{tg}5z=\operatorname{tg}z\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}-z\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}+z\right)\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5}-z\right)\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5}+z\right),$$

一般地,$n=2m+1$ 时,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}nz=\operatorname{tg}z&\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}-z\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}+z\right)\times\\&\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\times\\&\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)\cdots\cdots\\&\cdots\cdots\\&\operatorname{tg}\left(\frac{m\pi}{n}-z\right)\operatorname{tg}\left(\frac{m\pi}{n}+z\right).\end{aligned}$$

§ 255

现在讨论 n 为偶数的情形,考虑高次方程,得

$$t^2+2t\operatorname{ctg}2z-1=0$$

$$t^4+4t^3\operatorname{ctg}4z-6t^2-4t\operatorname{ctg}4z+1=0,$$

一般地，$n=2m$ 时

$$t^n+nt^{n-1}\text{ctg}nz-\cdots\mp 1=0,$$

双重符号处，m 奇取负，m 偶取正，将第二项的系数与根比较，得

$$-2\text{ctg}2z=\text{tg}z+\text{tg}(\frac{\pi}{2}+z)$$

$$-4\text{ctg}4z=\text{tg}z+\text{tg}(\frac{\pi}{4}+z)+\text{tg}(\frac{2\pi}{4}+z)+\text{tg}(\frac{3\pi}{4}+z)$$

$$-6\text{ctg}6z=\text{tg}z+\text{tg}(\frac{\pi}{6}+z)+\text{tg}(\frac{2\pi}{6}+z)+\text{tg}(\frac{3\pi}{6}+z)$$

$$+\text{tg}(\frac{4\pi}{6}+z)+\text{tg}(\frac{5\pi}{6}+z)$$

……

§ 256

利用 $\text{tg}v=-\text{tg}(\pi-v)$，得

$$2\text{ctg}2z=-\text{tg}z+\text{tg}(\frac{\pi}{2}-z)$$

$$4\text{ctg}4z=-\text{tg}z+\text{tg}(\frac{\pi}{4}-z)-\text{tg}(\frac{\pi}{4}+z)+\text{tg}(\frac{2\pi}{4}-z)$$

$$6\text{ctg}6z=-\text{tg}z+\text{tg}(\frac{\pi}{6}-z)-\text{tg}(\frac{\pi}{6}+z)+\text{tg}(\frac{2\pi}{6}-z)$$

$$-\text{tg}(\frac{2\pi}{6}+z)+\text{tg}(\frac{3\pi}{6}-z),$$

一般地，$n=2m$ 时

$$n\text{ctg}nz=-\text{tg}z+\text{tg}(\frac{\pi}{n}-z)-\text{tg}(\frac{\pi}{n}+z)$$

$$+\text{tg}(\frac{2\pi}{n}-z)-\text{tg}(\frac{2\pi}{n}+z)$$

$$+\text{tg}(\frac{3\pi}{n}-z)-\text{tg}(\frac{3\pi}{n}+z)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots+\text{tg}(\frac{m\pi}{n}-z).$$

§ 257

类似§ 254,从上节表达式我们也得到全体根的不带双重符号的积:

$$1=\operatorname{tg}z\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-z)$$

$$1=\operatorname{tg}z\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-z)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+z)\operatorname{tg}(\frac{2\pi}{4}-z)$$

$$1=\operatorname{tg}z\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6}-z)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6}+z)\operatorname{tg}(\frac{2\pi}{6}-z)\operatorname{tg}(\frac{2\pi}{6}+z)\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{6}-z)$$

容易看出,各式中角度都成对出现,每对互余,互余角正切的积为 1,因而全体的乘积也为 1.

§ 258

成等差序列的角,其正弦和余弦都成递推级数.利用前一章的结果,不管这种正弦和余弦的个数是多少,它们的和我们都会求.设成等差序列的角为

$$a,a+b,a+2b,a+3b,a+4b,a+5b,\cdots,$$

我们先求这种角正弦所成级数之和

$$s=\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\sin(a+3b)+\cdots$$

该递推级数的递推尺度为 $2\cos b,-1$,因而其和等于一个以

$$1-2z\cos b+z^2$$

为分母的分式在 $z=1$ 时的值.这个分式为

$$\frac{\sin a+z(\sin(a+b)-2\sin a\cos b)}{1-2z\cos b+z^2},$$

令 $z=1$,得

$$s=\frac{\sin a+\sin(a+b)-2\sin a\cos b}{2-2\cos b}=\frac{\sin a-\sin(a-b)}{2(1-\cos b)}$$

这里应用了

$$2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b).$$

由

$$\sin f-\sin g=2\cos\frac{f+g}{2}\sin\frac{f-g}{2}$$

得

$$\sin a-\sin(a-b)=2\cos\left(a-\frac{1}{2}b\right)\sin\frac{b}{2};$$

又

$$1-\cos b=2\sin^2\frac{b}{2};$$

这样我们得到

$$s=\frac{\cos\left(a-\frac{1}{2}b\right)}{2\sin\frac{b}{2}}.$$

§ 259

利用上节结果我们可求出成等差序列的随便多少个角的正弦之和.例如我们求下面这个和

$$\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\sin(a+3b)+\cdots+\sin(a+nb)$$

将这个级数延长到无穷,那么它的和为$\frac{\cos\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}}$,我们考虑延长出来的部分

$$\sin[a+(n+1)b]+\sin[a+(n+2)b]+\sin[a+(n+3)b]+\cdots,$$

这延长出来的部分,其和为$\dfrac{\cos\left(a+\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right)}{2\sin\frac{1}{2}b}$.前一个和减去后一个和,得到的就是我们所求的和.

也即,记

$$s=\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\sin(a+3b)+\cdots+\sin(a+nb)$$

则

$$s=\frac{\cos\left(a-\frac{1}{2}b\right)-\cos\left(a+\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right)}{2\sin\frac{1}{2}b}=\frac{\sin\left(a+\frac{1}{2}nb\right)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

§ 260

余弦的这样的和,求法类似.记

$$s=\cos a+\cos(a+b)+\cos(a+2b)+\cos(a+3b)+\cdots$$

则 s 等于

$$\frac{\cos a+z[\cos(a+b)-2\cos a\cos b]}{1-2z\cos b+z^2}$$

在 $z=1$ 时的值.由

$$2\cos a\cos b=\cos(a-b)+\cos(a+b)$$

得

$$s=\frac{\cos a-\cos(a-b)}{2(1-\cos b)}.$$

由

$$\cos f - \cos g = 2\sin\frac{f+g}{2}\sin\frac{g-f}{2}$$

得

$$\cos a - \cos(a-b) = -2\sin(a - \frac{1}{2}b)\sin\frac{1}{2}b$$

又

$$1 - \cos b = 2\sin^2\frac{b}{2};$$

这样我们得到

$$s = -\frac{\sin(a - \frac{1}{2}b)}{2\sin\frac{1}{2}b}.$$

类似地,我们得到,级数

$$\cos[a+(n+1)b] + \cos[a+(n+2)b] + \cos[a+(n+3)b] + \cdots,$$

的和为

$$-\frac{\sin[a+(n+\frac{1}{2})b]}{2\sin\frac{1}{2}b}.$$

从第一个和减第二个和,我们得到级数

$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cos(a+3b) + \cdots + \cos(a+nb)$$

的和为

$$\frac{-\sin(a-\frac{1}{2}b) + \sin[a+(n+\frac{1}{2})b]}{2\sin\frac{1}{2}b}$$

$$= \frac{\cos(a+\frac{1}{2}nb)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

§ 261

利用前面指出的原理,可以解决很多有关正弦和正切的问题.例如求正弦和正切的二次和更高次幂的和就是其中的一类.所有这些和都可以由前面方程其余的系数,用类似的方法推出,所以我们不再讲.但关于提到的问题我们指出一点:正弦和余弦的任何次幂都可以用正弦和余弦表示.为清楚起见,我们稍做说明.

§ 262

为此我们列出几个引理:

$$2\sin a\sin z = \cos(a-z) - \cos(a+z)$$
$$2\cos a\sin z = \sin(a+z) - \sin(a-z)$$
$$2\sin a\cos z = \sin(a+z) + \sin(a-z)$$
$$2\cos a\cos z = \cos(a-z) + \cos(a+z).$$

先求正弦的幂

$$\sin z = \sin z$$
$$2\sin^2 z = 1 - \cos 2z$$
$$4\sin^3 z = 3\sin z - \sin 3z$$
$$8\sin^4 z = 3 - 4\cos 2z + \cos 4z$$
$$16\sin^5 z = 10\sin z - 5\sin 3z + \sin 5z$$
$$32\sin^6 z = 10 - 15\cos 2z + 6\cos 4z - \cos 6z$$
$$64\sin^7 z = 35\sin z - 21\sin 3z + 7\sin 5z - \sin 7z$$
$$128\sin^8 z = 35 - 56\cos 2z + 28\cos 4z - 8\cos 6z + \cos 8z$$
$$256\sin^9 z = 126\sin z - 84\sin 3z + 36\sin 5z - 9\sin 7z + \sin 9z$$
$$\cdots\cdots$$

这里的系数,是二项式对应幂展开式的右半,只是偶次幂时自由项

等于二项式幂展开式对应系数的一半.

§ 263

余弦幂类似

$$\cos z = \cos z$$

$$2\cos^2 z = 1 + \cos 2z$$

$$4\cos^3 z = 3\cos z + \cos 3z$$

$$8\cos^4 z = 3 + 4\cos 2z + \cos 4z$$

$$16\cos^5 z = 10\cos z + 5\cos 3z + \cos 5z$$

$$32\cos^6 z = 10 + 15\cos 2z + 6\cos 4z + \cos 6z$$

$$64\cos^7 z = 35\cos z + 21\cos 3z + 7\cos 5z + \cos 7z$$

……

系数规律同于正弦.

第十五章

源于乘积的级数

§ 264

考虑状如

$$(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)(1+\varepsilon z)(1+\zeta z)\cdots$$

的乘积，因式个数可以有限，也可以无穷．记展开式所成级数为

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+Fz^6+\cdots,$$

显然，系数 $A,B,C,D,E\cdots$ 都由数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\zeta\cdots$ 构成，方式是

$A=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\cdots=$ 所有单个数的和．

$B=$ 每两个之积的和，

$C=$ 每三个之积的和，

$D=$ 每四个之积的和，

$E=$ 每五个之积的和，

等等，直至全体 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\cdots$ 之积．

§ 265

令 $z=1$，则乘积

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\varepsilon)$$

等于 1 加上 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\cdots$全体所构成的总和,这总和依次包含:单个数的和、每两个之积的和、每三个之积的和,直至 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\cdots$全体的积.总和中可以包含相同的数,同一个数由不同方式得到几次就包含几次.

§ 266

令 $z=-1$,同于上一节,乘积

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1-\varepsilon)\cdots$$

也等于 1 加上由 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\cdots$全体所构成的总和,这总和也依次包含:单个数的和、每两个之积的和、每三个之积的和,直至 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\cdots$全体的积.不同的只是,这里单个,每三个,每五个,一般地每奇数个之积都取负号.每两个,每四个,一般地,每偶数个之积,同于前节,仍取正号.

§ 267

取所有的质数

$2,3,5,7,11,13,\cdots$

作 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\cdots$,则乘积为

$$(1+2)(1+3)(1+5)(1+7)(1+11)(1+13)\cdots=P.$$

源于这个 P 的级数,包含 1,包含所有的质数,还包含不同质数的乘积.即

$$P=1+2+3+5+6+7+10+11+13+14+15+17+\cdots,$$

它包含幂和幂的倍数以外的所有自然数.它不包含 4,8,9,12,16,18,…,因为它们或者是幂,如 4,8,9,16,…,或者是幂的倍数,如 12,18,….

§ 268

取质数的幂的倒数作 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon\cdots$，结果类似.

令

$$P=(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{5^n})(1+\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n})\cdots,$$

展开得

$$P=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots.$$

分母中含有幂和幂的倍数以外的所有数.整数中除了质数和不同质数的积，剩下的都是质数的幂或这种幂的倍数.

§ 269

如果照 § 266 那样，取上节倒数的负数作 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$，那么，令

$$P=(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\cdots,$$

则展开得

$$P=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}-\frac{1}{13^n}+\frac{1}{14^n}$$

$$+\frac{1}{15^n}-\cdots,$$

跟前节一样，幂和幂的倍数以外的数都包含在这里的分母中.质数本身，三个，五个，一般地，奇数个质数的积，前面的符号是负的；两个，四个，六个，一般地，偶数个质数的积，前面的符号是正的.例如 $30=2\cdot3\cdot5$，不含幂，所以 $\frac{1}{30^n}$ 是我们级数的一项，又由于 30 是三个

不同质数的积，所以$\frac{1}{30^n}$前面是负号.

§ 270

考虑表达式

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)(1-\varepsilon z)\cdots},$$

进行除法，得级数

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+Fz^6+\cdots$$

系数 $A,B,C,D,E\cdots$，显然由 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\cdots$组成，方式是

$A=$全体单个数的和，

$B=$每两个之积的和，

$C=$每三个之积的和，

$D=$每四个之积的和，

等等. 这里的积，因子可相同.

§ 271

$z=1$ 时表达式

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1-\varepsilon)\cdots}$$

等于 1 加上 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\cdots$产生的数，产生的数包含它们自身，以及两个和更多个的积，跟 § 265 不同；那里积的因子不许相同，这里积的因子中可以有两个或多个是相同的；那里不包含 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\cdots$的幂和幂的倍数，这里包含.

§ 272

不管上节表达式因式个数有限还是无穷,它产生的级数,其项数都是无穷的.例如

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots,$$

分母是 2 的所有的幂.再如

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\cdots,$$

这里分母不含 2 和 3 以外的因数.

§ 273

取所有质数的倒数作 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\cdots$.记

$$P=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\cdots},$$

展开,得

$$P=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots.$$

这里分母既包含质数本身,也包含质数的乘积.因为自然数无例外地,都或者是质数,或者是质数的乘积.所以全体自然数都必定在这里的分母中出现.

§ 274

将质数换成质数的幂，结果类似．记

$$P=\frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\cdots},$$

展开，得

$$P=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\cdots,$$

自然数无例外地都在这里出现．如果将因式中的负号都换为正号，即

$$P=\frac{1}{(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{3^n})(1+\frac{1}{5^n})(1+\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n})\cdots},$$

那么我们有

$$P=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}-\cdots.$$

分母为单个质数的项为负，分母为两个质数（相同或相异）积的项为正．一般地，分母为偶数个质数积的项为正，分母为奇数个质数积的项为负．例如 $240=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5$，是六个质数的积，所以项 $\frac{1}{240^n}$ 为正．在 § 270 中置 $z=1$，可以看出这一规律．

§ 275

将上节与 § 269 相比较，我们有两个积为 1 的级数．记

$$P=\frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\cdots},$$

$$Q=(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\cdots,$$

则

$$P=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\cdots,$$

$$Q=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}+\cdots,$$

显然,这两个级数的积 $PQ=1$.

§ 276

记

$$P=\frac{1}{(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{3^n})(1+\frac{1}{5^n})(1+\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n})\cdots},$$

$$Q=(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{3^n})(1+\frac{1}{5^n})(1+\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n})\cdots,$$

则

$$P=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\cdots,$$

$$Q=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots,$$

我们也有 $PQ=1$.这样,知道这两个级数中一个的和,就可以求出另一个的和.

§ 277

反之,从这些级数的和也可求出一些无穷乘积的值.例如

$$M=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\cdots,$$

$$N=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\cdots,$$

时我们有

$$M=\frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\cdots},$$

$$N=\frac{1}{(1-\frac{1}{2^{2n}})(1-\frac{1}{3^{2n}})(1-\frac{1}{5^{2n}})(1-\frac{1}{7^{2n}})(1-\frac{1}{11^{2n}})\cdots},$$

相除得

$$\frac{M}{N}=(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{3^n})(1+\frac{1}{5^n})(1+\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n})\cdots$$

进一步得

$$\frac{M^2}{N}=\frac{2^n+1}{2^n-1}\cdot\frac{3^n+1}{3^n-1}\cdot\frac{5^n+1}{5^n-1}\cdot\frac{7^n+1}{7^n-1}\cdot\frac{11^n+1}{11^n-1}\cdots$$

从 M,N 得到了上面无穷乘积的值,也可得到下列级数的和

$$\frac{1}{M}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}-\cdots,$$

$$\frac{1}{N}=1-\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}-\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{10^{2n}}-\frac{1}{11^{2n}}-\cdots,$$

$$\frac{M}{N}=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots,$$

$$\frac{N}{M}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}-\cdots.$$

进行组合,还可得到很多另外的级数之和.

例 1:令 $n=1$,前面我们看到

$$\log\frac{1}{1-x}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\cdots,$$

从面令 $x=1$,则

$$\log\frac{1}{1-1}=\log\infty=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots,$$

由无穷大的对数也是无穷大,我们得到

$$M=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots=\infty.$$

从而由$\frac{1}{M}=\frac{1}{\infty}=0$得

$$0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}-\cdots$$

继而,对乘积我们有

$$M=\infty=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\cdots},$$

由此得

$$\infty=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}\cdots$$

$$0=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdots$$

§ 167 我们看到

$$N=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

由此得

$$\frac{6}{\pi^2}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}-\frac{1}{11^2}-\cdots$$

$$\infty=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots$$

$$0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\cdots$$

取乘积,得

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdots,$$

或

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{49}{48}\cdot\frac{121}{120}\cdot\frac{169}{168}\cdots.$$

由$\frac{M}{N}=\infty$或$\frac{N}{M}=0$得

$$\infty=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{20}{19}\cdots,$$

或

$$0=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{20}\cdots.$$

也得到

$$\infty=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{14}{12}\cdot\frac{18}{16}\cdot\frac{20}{18}\cdots,$$

或

$$0=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdots.$$

最后一个乘积中,从第二个分数开始,分子都比分母小 1,且分子分母的和构成质数序列 3,5,7,11,13,17,19,….

例 2:令 $n=2$,那么根据§167 的证明,我们有

$$M=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$N=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

由此首先得到下列级数的和

$$\frac{6}{\pi^2}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}-\frac{1}{11^2}-\cdots$$

$$\frac{90}{\pi^4}=1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}-\frac{1}{7^4}+\frac{1}{10^4}-\frac{1}{11^4}-\cdots$$

$$\frac{15}{\pi^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{15}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}-\cdots$$

继而得到下列乘积的值

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdots$$

$$\frac{\pi^4}{90}=\frac{2^4}{2^4-1}\cdot\frac{3^4}{3^4-1}\cdot\frac{5^4}{5^4-1}\cdot\frac{7^4}{7^4-1}\cdot\frac{11^4}{11^4-1}\cdots$$

$$\frac{15}{\pi^2}=\frac{2^2+1}{2^2}\cdot\frac{3^2+1}{3^2}\cdot\frac{5^2+1}{5^2}\cdot\frac{7^2+1}{7^2}\cdot\frac{11^2+1}{11^2}\cdots$$

或

$$\frac{\pi^2}{15}=\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{25}{26}\cdot\frac{49}{50}\cdot\frac{121}{122}\cdot\frac{169}{170}\cdots$$

和

$$\frac{5}{2}=\frac{2^2+1}{2^2-1}\cdot\frac{3^2+1}{3^2-1}\cdot\frac{5^2+1}{5^2-1}\cdot\frac{7^2+1}{7^2-1}\cdot\frac{11^2+1}{11^2-1}\cdots$$

或

$$\frac{5}{2}=\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{61}{60}\cdot\frac{85}{84}\cdots$$

或

$$\frac{3}{2}=\frac{5}{4}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{61}{60}\cdot\frac{85}{84}\cdots$$

最后一个乘积中分子都比分母大 1,且分子分母的和构成质数平方序列 $3^2,5^2,7^2,11^2,\cdots$.

例 3: § 167 求出了 n 为偶数时 M 的值,取 $n=4$,我们有

$$M=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

$$N=1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+\cdots=\frac{\pi^8}{9450}.$$

由此首先我们得到下列级数的和

$$\frac{90}{\pi^4}=1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}-\frac{1}{7^4}+\frac{1}{10^4}-\frac{1}{11^4}-\cdots$$

$$\frac{9450}{\pi^8}=1-\frac{1}{2^8}-\frac{1}{3^8}-\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}-\frac{1}{7^8}+\frac{1}{10^8}-\frac{1}{11^8}-\cdots$$

$$\frac{105}{\pi^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{11^4}+\cdots$$

$$\frac{\pi^4}{105}=1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}-\frac{1}{7^4}-\frac{1}{8^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots$$

接下去我们得到下列乘积的值

$$\frac{\pi^4}{90}=\frac{2^4}{2^4-1}\cdot\frac{3^4}{3^4-1}\cdot\frac{5^4}{5^4-1}\cdot\frac{7^4}{7^4-1}\cdot\frac{11^4}{11^4-1}\cdots$$

$$\frac{\pi^8}{9450}=\frac{2^8}{2^8-1}\cdot\frac{3^8}{3^8-1}\cdot\frac{5^8}{5^8-1}\cdot\frac{7^8}{7^8-1}\cdot\frac{11^8}{11^8-1}\cdots$$

$$\frac{105}{\pi^4}=\frac{2^4+1}{2^4}\cdot\frac{3^4+1}{3^4}\cdot\frac{5^4+1}{5^4}\cdot\frac{7^4+1}{7^4}\cdot\frac{11^4+1}{11^4}\cdots$$

和

$$\frac{7}{6}=\frac{2^4+1}{2^4-1}\cdot\frac{3^4+1}{3^4-1}\cdot\frac{5^4+1}{5^4-1}\cdot\frac{7^4+1}{7^4-1}\cdot\frac{11^4+1}{11^4-1}\cdots$$

或

$$\frac{35}{34}=\frac{41}{40}\cdot\frac{313}{312}\cdot\frac{1201}{1200}\cdot\frac{7321}{7320}\cdots$$

最后这个表达式右端的分数,分子都比分母大 1,且分子分母的和依次是质数 3,5,7,11,…的四次方.

§ 278

我们可以将级数

$$M=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\cdots$$

的和表示为乘积,这给利用对数带来方便.由

$$M=\frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\cdots}$$

我们得到

$$\log M=-\log(1-\frac{1}{2^n})-\log(1-\frac{1}{3^n})-\log(1-\frac{1}{5^n})-\log(1-\frac{1}{7^n})-\cdots,$$

取自然对数,得

$$\log M=+1(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots)$$
$$+\frac{1}{2}(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\cdots)$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}}+\frac{1}{3^{3n}}+\frac{1}{5^{3n}}+\frac{1}{7^{3n}}+\frac{1}{11^{3n}}+\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\frac{1}{5^{4n}}+\frac{1}{7^{4n}}+\frac{1}{11^{4n}}+\cdots\right)$$

$$+\cdots\cdots.$$

此外,令

$$N=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\cdots,$$

则

$$N=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{11^{2n}}\right)\cdots}$$

取自然对数,得

$$\log N=+1\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\frac{1}{5^{4n}}+\frac{1}{7^{4n}}+\frac{1}{11^{4n}}+\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{6n}}+\frac{1}{3^{6n}}+\frac{1}{5^{6n}}+\frac{1}{7^{6n}}+\frac{1}{11^{6n}}+\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{8n}}+\frac{1}{3^{8n}}+\frac{1}{5^{8n}}+\frac{1}{7^{8n}}+\frac{1}{11^{8n}}+\cdots\right)$$

$$+\cdots\cdots$$

由这两个结果我们得到

$$\log M-\frac{1}{2}\log N=+1\left(\frac{1}{2^{n}}+\frac{1}{3^{n}}+\frac{1}{5^{n}}+\frac{1}{7^{n}}+\frac{1}{11^{n}}+\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}}+\frac{1}{3^{3n}}+\frac{1}{5^{3n}}+\frac{1}{7^{3n}}+\frac{1}{11^{3n}}+\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{5n}}+\frac{1}{3^{5n}}+\frac{1}{5^{5n}}+\frac{1}{7^{5n}}+\frac{1}{11^{5n}}+\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^{7n}}+\frac{1}{3^{7n}}+\frac{1}{5^{7n}}+\frac{1}{7^{7n}}+\frac{1}{11^{7n}}+\cdots\right)$$

$$+\cdots\cdots.$$

§ 279

如果 $n=1$,我们有

$$M=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\log\infty$$

和

$$N=\frac{\pi^2}{6},$$

由此得

$$\begin{aligned}\log(\log\infty)-\frac{1}{2}\log\frac{\pi^2}{6}=&+1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots\right)\\&+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{11^3}+\cdots\right)\\&+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{11^5}+\cdots\right)\\&+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{7^7}+\frac{1}{11^7}+\cdots\right)\\&+\cdots\cdots.\end{aligned}$$

右端括号中的级数,从第二个开始,和都是有限数;而且加起来,和仍然是有限数,还相当小.由此我们得到,第一个级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$$

的和应该为无穷大,也即与级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$$

的自然对数之差应该是一个足够小的量.

§ 280

令 $n=2$,则

$$M=\frac{\pi^2}{6},N=\frac{\pi^4}{90}.$$

由此得

$$\begin{aligned}2\log\pi-\log6=&1\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots\right)\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{11^4}+\cdots\right)\\&+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{11^6}+\cdots\right)\\&+\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\log\pi-\log90=&+1\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{11^4}+\cdots\right)\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{11^8}+\cdots\right)\\&+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\frac{1}{7^{12}}+\frac{1}{11^{12}}+\cdots\right)\\&+\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log\frac{5}{2}=&+1\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots\right)\\&+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{11^6}+\cdots\right)\\&+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{7^{10}}+\frac{1}{11^{10}}+\cdots\right)\\&+\cdots\cdots.\end{aligned}$$

§ 281

虽然写出质数序列本身,这规律未知,但有办法指出质数高次幂倒数所成级数和的近似值.设

$$M=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\cdots$$

$$S=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\cdots,$$

则

$$S=M-1-\frac{1}{4^n}-\frac{1}{6^n}-\frac{1}{8^n}-\frac{1}{9^n}-\frac{1}{10^n}-\cdots,$$

由

$$\frac{M}{2^n}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{12^n}+\cdots$$

得

$$\begin{aligned}S&=M-\frac{M}{2^n}-1+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{9^n}-\frac{1}{15^n}-\frac{1}{21^n}-\cdots\\&=(M-1)(1-\frac{1}{2^n})-\frac{1}{9^n}-\frac{1}{15^n}-\frac{1}{21^n}-\frac{1}{25^n}-\frac{1}{27^n}-\cdots,\end{aligned}$$

又由

$$M(1-\frac{1}{2^n})\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{15^n}+\frac{1}{21^n}+\cdots$$

得

$$S=(M-1)(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{25^n}-\frac{1}{35^n}-\frac{1}{45^n}-\cdots$$

M 的值已知,所以只要 n 适当地大,就可以方便地求出 S.

§ 282

求出了高次幂时的和,用导出的公式就可以求出低次幂时的和、级数

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}+\cdots$$

的下面的和就是用这种方法求出的

n 为	级数的和为
$n=2$	0.452247420041222
$n=4$	0.076993139764252

$n=6$	0.017070086850639
$n=8$	0.004061405366515
$n=10$	0.000993603573633
$n=12$	0.000246026470033
$n=14$	0.000061244396725
$n=16$	0.000015282026219
$n=18$	0.000003817278702
$n=20$	0.000000953961123
$n=22$	0.000000238450446
$n=24$	0.000000059608184
$n=26$	0.000000014901555
$n=28$	0.000000003725333
$n=30$	0.000000000931323
$n=32$	0.000000000232830
$n=34$	0.000000000058207
$n=36$	0.000000000014551

次数更高的偶次幂的和,是下降的,每前进一步约下降四分之三,即后步约为前步的四分之一.

§ 283

级数

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots$$

可以直接变为乘积,方法是:记

$$A=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\cdots,$$

从 A 减去

$$\frac{1}{2^n}A=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}+\cdots,$$

得

$$(1-\frac{1}{2^n})A=1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{11^n}+\cdots=B.$$

消去了分母中被 2 除得尽的项.从 B 减去

$$\frac{1}{3^n}B=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{15^n}+\frac{1}{21^n}+\cdots,$$

得

$$(1-\frac{1}{3^n})B=1+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\cdots\cdots=C$$

消去了分母被 3 除得尽的项,从 C 减去

$$\frac{1}{5^n}C=\frac{1}{5^n}+\frac{1}{25^n}+\frac{1}{35^n}+\frac{1}{55^n}+\cdots,$$

得

$$(1-\frac{1}{5^n})C=1+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}+\cdots,$$

消去了分母被 5 除得尽项.类似地,可依次再消去分母被 7,11,…直至被所有质数除得尽的项,显然那时得到的是 1.对 B,C,D,E,…进行反向回代,得

$$A(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\cdots=1,$$

从而

$$A=\frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\cdots}$$

或

$$A=\frac{2^n}{2^n-1}\cdot\frac{3^n}{3^n-1}\cdot\frac{5^n}{5^n-1}\cdot\frac{7^n}{7^n-1}\cdot\frac{11^n}{11^n-1}\cdots.$$

§ 284

这种方法也可用于化另外一些和已知的级数为无穷乘积.例如§ 175 我们求出了级数

$$1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\cdots,$$

的和,n 为奇数时和为 $N\pi^n$,那里给出了 N 的一些值.我们指出,该级数分母中只出现奇数,且奇数为 $4m+1$ 时,所在项为正,奇数为 $4m-1$ 时,所在项为负.记

$$A=1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\cdots,$$

加上

$$\frac{1}{3^n}A=\frac{1}{3^n}-\frac{1}{9^n}+\frac{1}{15^n}-\frac{1}{21^n}+\frac{1}{27^n}-\cdots,$$

得

$$\left(1+\frac{1}{3^n}\right)A=1+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\cdots=B.$$

减去

$$\frac{1}{5^n}B=\frac{1}{5^n}+\frac{1}{25^n}-\frac{1}{35^n}-\frac{1}{55^n}+\cdots,$$

得

$$\left(1-\frac{1}{5^n}\right)B=1-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\cdots=C,$$

消去了分母被 3 和被 5 除得尽的项.加上

$$\frac{1}{7^n}C=\frac{1}{7^n}-\frac{1}{49^n}-\frac{1}{77^n}+\cdots,$$

得

$$\left(1+\frac{1}{7^n}\right)C=1-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\cdots=D,$$

消去了分母被 7 除得尽的项,加上

$$\frac{1}{11^n}D=\frac{1}{11^n}-\frac{1}{121^n}+\cdots,$$

得

$$(1+\frac{1}{11^n})D=1+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\cdots=E$$

消去了分母被 11 除得尽的项.用这样的方法消去分母被一切质数除得尽的项,最后得

$$A(1+\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1+\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n})(1-\frac{1}{13^n})\cdots=1$$

或

$$A=\frac{3^n}{3^n+1}\cdot\frac{5^n}{5^n-1}\cdot\frac{7^n}{7^n+1}\cdot\frac{11^n}{11^n+1}\cdot\frac{13^n}{13^n-1}\cdot\frac{17^n}{17^n-1}\cdots$$

质数都在分子中出现.质数形状为 $4m-1$ 时,分母比分子大 1,为 $4m+1$ 时,分母比分子小 1.

§ 285

令 $n=1$,那么由 $A=\frac{\pi}{4}$,我们得到

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{24}\cdots$$

§ 277 我们得到

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot6}\cdot\frac{7^2}{6\cdot8}\cdot\frac{11^2}{10\cdot12}\cdot\frac{13^2}{12\cdot14}\cdot\frac{17^2}{16\cdot18}\cdot\frac{19^2}{18\cdot20}\cdots$$

用第一式除第二式,得

$$\frac{2\pi}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{22}\cdots,$$

或

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{22}\cdots$$

分子是质数,分母是比分子大 1 或小 1 的奇偶数.用第一式除最后

这一式,得

$$2=\frac{4}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{16}{18}\cdot\frac{20}{18}\cdot\frac{24}{22}\cdots$$

或

$$2=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdots$$

这里的分数由质数 2,3,5,7,…产生,方式是把每一个都分成一奇一偶相差为 1 的两个数,偶数作分子,奇数作分母.

§ 286

Wallis 公式为

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdots}$$

或

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{9\cdot9}{8\cdot10}\cdot\frac{11\cdot11}{10\cdot12}\cdot\frac{13\cdot13}{12\cdot14}\cdots,$$

由上节得

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{11\cdot11}{10\cdot12}\cdot\frac{13\cdot13}{12\cdot14}\cdots$$

用第三式除第二式,得

$$\frac{32}{\pi^3}=\frac{9\cdot9}{8\cdot10}\cdot\frac{15\cdot15}{14\cdot16}\cdot\frac{21\cdot21}{20\cdot22}\cdot\frac{25\cdot25}{24\cdot26}\cdots$$

奇的合数都在分子中出现.

§ 287

令 $n=3$,由 § 175 知,此时 $A=\frac{\pi^3}{32}$,即

$$\frac{\pi^3}{32}=\frac{3^3}{3^3+1}\cdot\frac{5^3}{5^3-1}\cdot\frac{7^3}{7^3+1}\cdot\frac{11^3}{11^3+1}\cdot\frac{13^3}{13^3-1}\cdot\frac{17^3}{17^3-1}\cdots$$

由 § 167 级数

$$\frac{\pi^6}{945}=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\cdots$$

得

$$\frac{\pi^6}{945}=\frac{2^6}{2^6-1}\cdot\frac{3^6}{3^6-1}\cdot\frac{5^6}{5^6-1}\cdot\frac{7^6}{7^6-1}\cdot\frac{11^6}{11^6-1}\cdot\frac{13^6}{13^6-1}\cdots$$

或

$$\frac{\pi^6}{960}=\frac{3^6}{3^6-1}\cdot\frac{5^6}{5^6-1}\cdot\frac{7^6}{7^6-1}\cdot\frac{11^6}{11^6-1}\cdot\frac{13^6}{13^6-1}\cdots$$

用第一式除最后一式,得

$$\frac{\pi^3}{30}=\frac{3^3}{3^3-1}\cdot\frac{5^3}{5^3+1}\cdot\frac{7^3}{7^3-1}\cdot\frac{11^3}{11^3-1}\cdot\frac{13^3}{13^3+1}\cdot\frac{17^3}{17^3+1}\cdots,$$

再用第一式除,得

$$\frac{16}{15}=\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\frac{5^3-1}{5^3+1}\cdot\frac{7^3+1}{7^3-1}\cdot\frac{11^3+1}{11^3-1}\cdot\frac{13^3-1}{13^3+1}\cdot\frac{17^3-1}{17^3+1}\cdots$$

或

$$\frac{16}{15}=\frac{14}{13}\cdot\frac{62}{63}\cdot\frac{172}{171}\cdot\frac{666}{665}\cdot\frac{1098}{1099}\cdots$$

这里的分数由奇质数的立方构成,方式是分它成相差为 1 的奇偶两数,偶数作分子,奇数作分母.

§ 288

利用得到的表达式可推出新的、分母包含一切自然数的级数.从 § 285 得

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{3+1}\cdot\frac{5}{5-1}\cdot\frac{7}{7+1}\cdot\frac{11}{11+1}\cdot\frac{13}{13-1}\cdots$$

或

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\cdots},$$

展开得

$$\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\cdots.$$

这里的符号规律是:2 的符号为负;状如 $4m-1$ 的质数,符号为负;状如 $4m+1$ 的质数,符号为正;合数的符号,等于其质因数符号的积.例如,分数$\frac{1}{60}$的符号为负,因为 $-60=(-2)(-2)(-3)(+5)$.

类似地,我们有

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\cdots},$$

展开得

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\cdots$$

这里 2 的符号为正;状如 $4m-1$ 的质数,符号为负;状如 $4m+1$ 的质数,符号为正;合数的符号等于其质因数符号的积.

§ 289

从 § 285 得

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots}$$

展开得

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\cdots,$$

这里只出现奇数,符号规律是:状如 $4m-1$ 的质数,符号为正;状如 $4m+1$ 的质数,符号为负;合数的符号等于其质因数符号的积.

由此可以得到自然数都出现的两个级数.先由

$$\pi=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots}$$

展开得

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots,$$

这里 2 的符号为正；状如 $4m-1$ 的质数，符号为正；状如 $4m+1$ 的质数，符号为负.

再由

$$\frac{\pi}{3} = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots},$$

得

$$\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots,$$

这里 2 的符号为负；状如 $4m-1$ 的质数，符号为正；状如 $4m+1$ 的质数，符号为负.

§290

可以推出无数个以

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \cdots$$

为项，但符号取法不同的级数. 例如，用 $\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$ 乘

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})\cdots}$$

得

$$\pi = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})\cdots},$$

展开，得

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \cdots$$

2 的符号为正,3 的符号为正;3 以外的状如 $4m-1$ 的质数,符号为负;状如 $4m+1$ 的质数,符号为正;合数的符号由其质因数的符号决定.

又例如,用 $\dfrac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \dfrac{3}{2}$ 乘

$$\pi = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\cdots},$$

得

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})(1+\frac{1}{17})\cdots},$$

展开,得

$$\frac{3\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13}\cdots,$$

这里,2 的符号为正;状如 $4m-1$ 的质数,符号为正;5 以外的状如 $4m+1$ 的质数,符号为负.

§ 291

也可以构造无数个和等于零的级数.例如,§ 277 的

$$0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdots$$

可写成

$$0=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots},$$

从而

$$0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\cdots,$$

这里,质数的符号都为负,合数的符号等于其质因数符号的积.又

例如,用$\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$乘上面的乘积表达式,得

$$0=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots}$$

展开,得

$$0=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\cdots,$$

这里,2 的符号为正,其余的质数,符号都为负.

再例如

$$0=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\cdots}$$

从而

$$0=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\cdots,$$

这里,3 和 5 以外的质数,符号都为负.

一般地,符号为正的质数,个数有限;其余的质数,符号都为负,这种级数的和为零.反之,符号为负的质数,个数有限;其余的质数,符号都为正,这种级数的和为无穷大.

§ 292

§ 176 对奇数 n 我们得到了级数

$$A=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\cdots$$

的和,加上

$$\frac{1}{2^n}A=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{8^n}-\frac{1}{10^n}+\frac{1}{14^n}-\cdots,$$

得

$$B=(1+\frac{1}{2^n})A=1-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\frac{1}{17^n}+\frac{1}{19^n}-\frac{1}{23^n}+\frac{1}{25^n}-\cdots,$$

再加上

$$\frac{1}{5^n}B=\frac{1}{5^n}-\frac{1}{25^n}+\frac{1}{35^n}-\frac{1}{55^n}+\cdots$$

得

$$C=(1+\frac{1}{5^n})B=1+\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\frac{1}{17^n}+\frac{1}{19^n}-\frac{1}{23^n}+\cdots$$

减去

$$\frac{1}{7^n}C=\frac{1}{7^n}+\frac{1}{49^n}-\frac{1}{77^n}+\cdots,$$

得

$$D=(1-\frac{1}{7^n})C=1-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\frac{1}{17^n}+\frac{1}{19^n}-\cdots$$

继续下去,最后我们得到

$$A(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n})(1-\frac{1}{13^n})\cdots=1,$$

这里,比 6 的倍数大 1 的质数,符号为负;比 6 的倍数小 1 的质数,符号为正.

从结果得

$$A=\frac{2^n}{2^n+1}\cdot\frac{5^n}{5^n+1}\cdot\frac{7^n}{7^n-1}\cdot\frac{11^n}{11^n+1}\cdot\frac{13^n}{13^n-1}\cdots$$

§ 293

考虑 $n=1$ 的情形,此时 $A=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$,我们得到

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdots,$$

这里,3 以外的质数都在分子中出现,分子与分母都相差为 1,3 以外的分母都是 6 的倍数. 用此式除 § 277 的

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{11\cdot11}{10\cdot12}\cdot\frac{13\cdot13}{12\cdot14}\cdots$$

得

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdots,$$

分母都不是 6 的倍数. 第一、三两式可化为

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{24}\cdots$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{22}\cdots$$

用前式除后式,得

$$\frac{4}{3}=\frac{6}{4}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{18}{16}\cdot\frac{18}{20}\cdot\frac{24}{22}\cdots,$$

或

$$\frac{4}{3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{12}{11}\cdots,$$

其中分数都由质数 5,7,11,…构成,分质数为相差为 1 的两个数,被 3 除得尽的数做分子.

§ 294

§ 285 中我们看到

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdots,$$

或

$$\frac{\pi}{3}=\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdots$$

用该式去除上节中$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$和$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$的表达式，得

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}\cdots$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{24}{23}\cdot\frac{30}{29}\cdots$$

这两式的分数分别由状如 $12m+6\pm1$ 和 $12m\pm1$ 的质数构成，方式是分质数成相差为 1 的两部分，偶数作分子，奇数作分母.

§ 295

考察 § 179 得到的级数

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots=A,$$

减去

$$\frac{1}{3}A=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\frac{1}{33}-\cdots$$

得

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)A=1-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\cdots=B.$$

加上

$$\frac{1}{5}B=\frac{1}{5}-\frac{1}{25}-\frac{1}{35}+\frac{1}{55}-\cdots,$$

得

$$(1+\frac{1}{5})B=1-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots=C,$$

继续这一过程,最后得等式

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})(1-\frac{1}{17})(1-\frac{1}{19})\cdots=1,$$

这里,状如 $8m+3$ 和 $8m+1$ 的质数前是负号,状如 $8m+5$ 和 $8m+7$ 的质数前是正号.由此式得

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{24}\cdots,$$

分母为 8 的倍数或奇偶数.将 § 285 的

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{24}\cdots$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{22}\cdots$$

相乘,得

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{11\cdot11}{10\cdot12}\cdot\frac{13\cdot13}{12\cdot14}\cdots$$

用前面$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$的乘积表达式除该式,得

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{22}\cdots,$$

分母含 4 的倍数,不含 8 的倍数,分子分母相差为 1.用$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$的后式除前式,得

$$1=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{11}{12}\cdots,$$

这里的分数由质数构成.方法是,分质数成相差为 1 的两个数,4 除得尽的偶数作分母,4 除不尽的偶数作分子.

§ 296

§ 179 及后面的 π 的级数表达式,都可以用类似的方法化为质数的乘积.这可以导出无穷乘积和无穷级数的许多重要性质,但对其中主要之点,本章已经进行了讨论,所以不再继续.本章我们讨论相乘积产生的数,下章我们讨论相加和产生的数.

第十六章

拆数为和

§ 297

给定表达式

$$(1+x^{\alpha}z)(1+x^{\beta}z)(1+x^{\gamma}z)(1+x^{\delta}z)(1+x^{\varepsilon}z)\cdots$$

我们来考察它的展开式.记展开式为

$$1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\cdots$$

显然

$P=$原有幂的和 $x^{\alpha}+x^{\beta}+x^{\gamma}+x^{\delta}+x^{\varepsilon}+\cdots$;

$Q=x$ 的每两个幂之积的和

$=x$ 的以 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta\cdots$相异两成员之和为指数的一切幂之和;

$R=x$ 的以不同三成员之和为指数的一切幂之和;

$S=x$ 的以 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\cdots$中不同四成员之和为指数的一切幂之和;

类推.

§ 298

$P,Q,R,S\cdots$各表达式里,x的每一个幂,其指数都由$\alpha,\beta,\gamma,\delta\cdots$构成,其系数都等于这构成方式的种数.例如,$Q$里的$Nx^n$表示$\alpha,\beta,\gamma,\delta\cdots$中两个之和等于$n$的共有$N$组.一般地,展开式中的$Nx^nz^m$表示:$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\cdots$中,每组$m$个,和等于$n$的组,共有$N$个.

§ 299

从乘积

$$(1+x^\alpha z)(1+x^\beta z)(1+x^\gamma z)(1+x^\delta z)\cdots$$

的展开式可直接说出:$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\cdots$中$m$个一组,和等于$n$的组,共有多少个.只需找到含$x^nz^m$的项,它的系数就是我们所要的组数.

§ 300

为进一步说明,我们考虑无穷乘积

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)\cdots$$

其展开式为

$$\begin{aligned}1 &+ z(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+\cdots)\\ &+ z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}+5x^{11}+\cdots)\\ &+ z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+\cdots)\\ &+ z^4(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+15x^{18}+\cdots)\end{aligned}$$

$$+z^5(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+13x^{22}+18x^{23}+\cdots)$$
$$+z^6(x^{21}+x^{22}+2x^{23}+3x^{24}+5x^{25}+7x^{26}+11x^{27}+14x^{28}+20x^{29}+\cdots)$$
$$+z^7(x^{28}+x^{29}+2x^{30}+3x^{31}+5x^{32}+7x^{33}+11x^{34}+15x^{35}+21x^{36}+\cdots)$$
$$+z^8(x^{36}+x^{37}+2x^{38}+3x^{39}+5x^{40}+7x^{41}+11x^{42}+15x^{43}+22x^{44}+\cdots)$$
$$+\cdots\cdots$$

从这个级数我们立即就可以说出,1,2,3,4,5,6,7,8,…中 m 个一组,和等于 n 的组有多少个.例如 m 为 7,n 为 35 时,我们找到含 z^7 和 x^{35}的项,系数 15 就是 1,2,3,4,5,6,7,8,…中 7 个一组,和等于 35 的组的组数.

§ 301

令上节中 $z=1$,乘积变为

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\cdots$$

展开,整理,得

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+\cdots,$$

则项 Nx^n 的指数 n 和系数 N 告诉我们 1,2,3,4,5,6,7,8…中和等于 n 的组有 N 个.例如 $6x^8$ 告诉我们 1,2,3,4,5,6,7…中和等于 8 的组有 6 个.我们指出,它们是

$8=8$

$8=7+1$

$8=6+2$

$8=5+3$

$8=5+2+1$

$$8=4+3+1.$$

请注意,这里 8 本身也是一组,即一组可以只是一个数.

§ 302

将一个给定的数,拆成不同数的和,这拆法有多少种,我们已经知道了.如果把前面的乘积改作分母,就可以去掉这句话中“不同”两字.考虑表达式

$$\frac{1}{(1-x^{\alpha}z)(1-x^{\beta}z)(1-x^{\gamma}z)(1-x^{\delta}z)(1-x^{\varepsilon}z)\cdots},$$

进行除法,记所得无穷级数为

$$1+Pz+Qz^{2}+Rz^{3}+Sz^{4}+\cdots$$

则

$P=x$ 的以序列 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\cdots$ 各成员为指数之幂的和;

$Q=x$ 的以 P 中序列两成员(可以相同)的和为指数之幂的和;

$R=x$ 的以 P 中序列三成员(可以相同)的和为指数之幂的和;

$S=x$ 的以 P 中序列四成员(可以相同)的和为指数之幂的和;

类推.

§ 303

写出无穷级数,归并同类项之后,我们就可以说出将 n 拆成序列 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\cdots$ 中 m 个成员(可相同)之和的拆法共有多少种.只要从级中找出项 $Nx^{n}z^{m}$,这系数 N 就是我们所要的种数.我们看

到这一问题与前一问题解决方法类似.

§ 304

考虑一个重要的特殊情形:给定的表达式为

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\cdots}.$$

完成除法,得

$$\begin{aligned}
1 &+ z(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+\cdots)\\
&+ z^2(x^2+x^3+2x^4+2x^5+3x^6+3x^7+4x^8+4x^9+5x^{10}+\cdots)\\
&+ z^3(x^3+x^4+2x^5+3x^6+4x^7+5x^8+7x^9+8x^{10}+10^{11}+\cdots)\\
&+ z^4(x^4+x^5+2x^6+3x^7+5x^8+6x^9+9x^{10}+11x^{11}+15x^{12}\\
&+\cdots)\\
&+ z^3(x^5+x^6+2x^7+3x^8+5x^9+7x^{10}+10x^{11}+13x^{12}+18x^{13}\\
&+\cdots)\\
&+ z^6(x^6+x^7+2x^8+3x^9+5x^{10}+7x^{11}+11x^{12}+14x^{13}+20x^{14}\\
&+\cdots)\\
&+ z^7(x^7+x^8+2x^9+3x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+11x^{13}+15x^{14}+21x^{15}\\
&+\cdots)\\
&+ z^8(x^8+x^9+2x^{10}+3x^{11}+5x^{12}+7x^{13}+11x^{14}+15x^{15}\\
&\quad +22x^{16}+\cdots)\\
&+\cdots\cdots.
\end{aligned}$$

有了这个展开式,我们就可以说出,将 n 拆成序列

$$1,2,3,4,5,6,7,\cdots$$

中 m 个数的和,拆法有多少种.例如,将 13 拆成该序列中 5 个数的和.我们从表达式中找到 $x^{13}z^5$ 所在的项,它的系数 18 就是我们所要的种数.也即,将 13 拆成 5 个正整数的和,拆法有 18 种.

§ 305

如果 $z=1$,则上节分式成

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\cdots}$$

其展开式,整理后为

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+\cdots,$$

式中每一项,系数都是指数能够拆成整数和的种数.和中整数可以相等,也可以不等.例如项 $11x^6$ 表示:将 6 拆成整数和,拆法有 11 种.我们指出,它们是

$$6=6$$
$$6=5+1$$
$$6=4+2$$
$$6=4+1+1$$
$$6=3+3$$
$$6=3+2+1$$
$$6=3+1+1+1$$
$$6=2+2+2$$
$$6=2+2+1+1$$
$$6=2+1+1+1+1$$
$$6=1+1+1+1+1+1.$$

我们再指出,6 是 1,2,3,4,5,6…的成员,它也是等于 6 的和中的一种.

§ 306

上面的讨论告诉我们从展开式所能得到的结果.下面我们探

讨展开式的求法. 先求拆数成不同数之和时所用的展开式. 为此，我们将

$$Z=(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)\cdots$$

的展开式按 z 的升幂排列为

$$Z=1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+Tz^5+\cdots.$$

我们要讨论的是：x 的函数 $P,Q,R,S,T\cdots$ 的求法，有了它们，也就有了展开式.

§ 307

换 z 为 xz，得

$$(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)\cdots=\frac{Z}{1+xz}.$$

也即，将 z 换为 xz 时，乘积的值由 Z 变成 $\frac{Z}{1+xz}$. 由

$$Z=1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\cdots$$

得

$$\frac{Z}{1+xz}=1+Pxz+Qx^2z^2+Rx^3z^3+Sx^4z^4+\cdots$$

两边乘 $1+xz$，得

$$\begin{aligned}Z=1&+Pxz+Qx^2z^2+Rx^3z^3+Sx^4z^4+\cdots\\&+xz+Px^2z^2+Qx^3z^3+Rx^4z^4+\cdots,\end{aligned}$$

两 Z 比较，得

$$P=\frac{x}{1-x},Q=\frac{Px^2}{1-x^2},R=\frac{Qx^3}{1-x^3},S=\frac{Rx^4}{1-x^4},\cdots$$

由前向后依次代入，我们得到

$$P=\frac{x}{1-x}$$

$$Q=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$R=\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$S=\frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$T=\frac{x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

……

§ 308

展所得分数函数为级数,插一句,这级数都是递推的,从展成的级数我们就能说出,一数拆成若干个数之和的种数.例如,第一个表达式

$$P=\frac{x}{1-x}$$

展成的是几何级数

$$x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+\cdots,$$

它告诉我们每个数拆成单个数之和的种数都为1.事实上,整数都在这里出现,但只一次.

§ 309

第二个表达式

$$\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

给出的级数为

$$x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}+\cdots,$$

该级数的每一项,系数都是指数可以拆成两个不同数之和的种数.例如,$4x^9$ 告诉我们,9 拆成两个不同数的和,拆法有 4 种,用 x^3 除

我们的级数,得到的是由分式

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

产生的级数

$$1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7+\cdots,$$

记它的通项为 Nx^n,那么从这个级数的产生我们知道,系数 N 是指数 n 可以拆成数 1 与 2 之和的种数. 由前一个级数的通项为 Nx^{n+3},我们得到下面的定理:

数 n 拆成数 1 与 2 之和的种数,等于数 $n+3$ 拆成两个不同数之和的种数.

§ 310

第三个表达式

$$\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

展成的级数为

$$x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+\cdots,$$

它的每一项,系数都是指数能够拆成三个不同数之和的种数. 将分式

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

展成级数,得

$$1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+7x^6+8x^7+\cdots,$$

记它的通项为 Nx^n,则系数 N 是指数 n 拆成数 1,2,3 之和的种数. 由前一个级数之通项为 Nx^{n+6}我们得到下面的定理:

数 n 拆成数 1,2,3 之和的种数,等于数 $n+3$ 拆成三个不同数之和的种数.

§ 311

第四个表达式

$$\frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

展成的级数为

$$x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+\cdots,$$

它的每一项,系数都是指数能够拆成 4 个不同数之和的种数.表达式

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

展成的级数为

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+6x^5+9x^6+11x^7+\cdots$$

等于前一个级数除上 x^{10}.记这个级数的通项为 Nx^n,则系数 N 是指数 n 能够拆成数 1,2,3,4 之和的种数.由前一个级数的通项为 Nx^{n+10},我们得到下面的定理:

数 n 拆成 1,2,3,4 之和的种数,等于数 $n+10$ 拆成 4 个不同数之和的种数.

§ 312

一般地,如果表达式

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\cdots(1-x^m)}$$

展成的级数,其通项为 Nx^n,则系数 N 是指数 n 能够拆成数 1,2,3,4…m 之和的种数.另一方面,如果表达式

$$\frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots\cdots(1-x^m)}$$

展成的级数，其通项为 $Nx^{n+\frac{m(m+1)}{2}}$，则系数 N 是指数 $n+\frac{m(m+1)}{2}$ 拆成 m 个不同数之和的种数. 从而我们得到下面的定理：

数 n 拆成数 $1,2,3,4\cdots m$ 之和的种数，等于数 $n+\frac{m(m+1)}{2}$ 拆成 m 个不同数之和的种数.

§ 313

前而我们讨论了将一个数拆成若干份的种数，份与份不相等. 现在我们讨论份与份可以相等的情形. 这种拆法的种数，从表达式

$$Z=\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\cdots}$$

得到. 记该式展成的级数为

$$Z=1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+Tz^5+\cdots$$

将表达式中的 z 换成 xz，得

$$\frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\cdots}=(1-xz)Z,$$

对级数作同样的替换，得

$$(1-xz)Z=1+Pxz+Qx^2z^2+Rx^3z^3+Sx^4z^4+\cdots$$

乘原级数以 $1-xz$，得

$$\begin{aligned}(1-xz)Z=1&+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\cdots\\&-xz-Pxz^2-Qxz^3-Rxz^4-\cdots\end{aligned}$$

将这两个表达式相比较，我们得到

$$P=\frac{x}{1-x},Q=\frac{Px}{1-x^2},R=\frac{Qx}{1-x^3},S=\frac{Rx}{1-x^4}\cdots,$$

由左向右逐个代入，我们得到

$$P=\frac{x}{1-x}$$

$$Q=\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$R=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$S=\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

……

§ 314

$P,Q,R,S\cdots$的前后两种表达式，不同的只是分子的指数，前高于后. 因此后面表达式的展开级数及其系数的含义都与前面完全类似. 由此我们得到与前面类似的下列定理：

数 n 拆成数 1,2 之和的种数，等于数 $n+2$ 拆成两个数之和的种数.

数 n 拆成数 1,2,3 之和的种数，等于数 $n+3$ 拆成三个数之和的种数.

数 n 拆成数 1,2,3,4 之和的种数，等于数 $n+4$ 拆成四个数之和的种数.

一般地，数 n 拆成 $1,2,3,\cdots,m$ 之和的种数，等于数 $n+m$ 拆成 m 个数之和的种数.

§ 315

拆数 n 成 m 个相异或不一定相异数之和的种数，这两个问题都可用拆成数 $1,2,3,4\cdots m$ 之和的种数，根据从前面定理推出来的下面两个定理来回答：

数 n 拆成 m 个相异数之和的种数，等于数 $n-\frac{m(m+1)}{2}$ 拆成

数 1,2,3,4,…m 之和的种数.

数 n 拆成不一定相异的 m 个数之和的种数,等于数 $n-m$ 拆成 1,2,3,4,…m 之和的种数.

从这两个定理进而得到下面两个定理:

n 拆成 m 个相异数之和的种数,等于 $n-\frac{m(m+1)}{2}$ 拆成 m 个不一定相异数之和的种数.

n 拆成 m 个不一定相异的数之和的种数,等于 $n+\frac{m(m+1)}{2}$ 拆成 m 个相异数之和的种数.

§ 316

我们可以利用构成递推级的办法,得到数 n 拆成数 1,2,3,…,m 之和的种数,作法是将分式

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^m)}$$

展成递推级数到项 Nx^n. 这系数 N 就是数 n 拆成数 1,2,3,4,…,m 之和的种数. 但是当 m 和 n 比较大时,这个求 N 的方法不好用. 这时分母给出的递推尺度,其项数多,求级数的高次项很麻烦.

§ 317

我们先弄清几种简单情形,由此出发再去考虑更复杂的情形,这样事情会容易一些. 记分式

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^m)}$$

产生的级数的通项为 Nx^n. 记分式

$$\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^m)}$$

产生的级数的通项为 Mx^n. 这里的数 M 是数 $n-m$ 拆成数 1,2,3,$\cdots$,m 之和的种数. 从前一个分式减去后一个,得

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^{m-1})},$$

显然,它产生的级数,其通项为 $(N-M)x^n$. 这里的 $N-M$ 是 n 拆成 1,2,3,$\cdots m-1$ 之和的种数.

§ 318

由此我们得到下面的规则

记 n 拆成 1,2,3,$\cdots$,$m-1$ 之和的种数为 L;

记 $n-m$ 拆成 1,2,3,$\cdots m$ 之和的种数为 M.

记 n 拆成 1,2,3,$\cdots m$ 之和的种数为 N.

在这样的记号之下我们有

$L=N-M$

从而

$$N=L+M.$$

这样,知道了 n 拆成 1,2,3,$\cdots$,$m-1$ 之和的种数,和 $n-m$ 拆成 1,2,3,$\cdots$,m 之和的种数,进行加法就可得到 n 拆成 1,2,3,$\cdots$,n 之和的种数. 借助这条规则,可以从比较简单情况下的结果,推出更复杂情况下的结果. 附表就是用这种方法计算出来的.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5
5	1	3	5	6	7	7	7	7	7	7	7
6	1	4	7	9	10	11	11	11	11	11	11
7	1	4	8	11	13	14	15	15	15	15	15
8	1	5	10	15	18	20	21	22	22	22	22
9	1	5	12	18	23	26	28	29	30	30	30
10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42	42
11	1	6	16	27	37	44	49	52	54	55	56
12	1	7	19	34	47	58	65	70	73	75	76
13	1	7	21	39	57	71	82	89	94	97	99
14	1	8	24	47	70	90	105	116	123	128	131
15	1	8	27	54	84	110	131	146	157	164	169
16	1	9	30	64	101	136	164	186	201	212	219
17	1	9	33	72	119	163	201	230	252	267	278
18	1	10	37	84	141	199	248	288	318	340	355
19	1	10	40	94	164	235	300	352	393	423	445
20	1	11	44	108	192	282	364	434	488	530	560
21	1	11	48	120	221	331	436	525	598	653	695
22	1	12	52	136	255	391	522	638	732	807	863
23	1	12	56	150	291	454	618	764	887	984	1060
24	1	13	61	169	333	532	733	919	1076	1204	1303
25	1	13	65	185	377	612	860	1090	1291	1455	1586
26	1	14	70	206	427	709	1009	1297	1549	1761	1930
27	1	14	75	225	480	811	1175	1527	1845	2112	2331
28	1	15	80	249	540	931	1367	1801	2194	2534	2812
29	1	15	85	270	603	1057	1579	2104	2592	3015	3370
30	1	16	91	297	674	1206	1824	2462	3060	3590	4035
31	1	16	96	321	748	1360	2093	2857	3589	4242	4802
32	1	17	102	351	831	1540	2400	3319	4206	5013	5788
33	1	17	108	378	918	1729	2738	3828	4904	5888	6751
34	1	18	114	411	1014	1945	3120	4417	5708	6912	7972
35	1	18	120	441	1115	2172	3539	5066	6615	8070	9373
36	1	19	127	478	1226	2432	4011	5812	7657	9418	11004
37	1	19	133	511	1342	2702	4526	6630	8824	10936	12866
38	1	20	140	551	1469	3009	5102	7564	10156	12690	15021
39	1	20	147	588	1602	3331	5731	8588	11648	14663	17475
40	1	21	154	632	1747	3692	6430	9749	13338	16928	20298

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
41	1	21	161	672	1898	4070	7190	11018	15224	19466	23501
42	1	22	169	720	2062	4494	8033	12450	17354	22367	27169
43	1	22	176	764	2233	4935	8946	14012	19720	25608	31316
44	1	23	184	816	2418	5427	9953	15765	22380	29292	36043
45	1	23	192	864	2611	5942	11044	17674	25331	33401	41373
46	1	24	200	920	2818	6510	12241	19805	28629	38047	47420
47	1	24	208	972	3034	7104	13534	22122	32278	43214	54218
48	1	25	217	1033	3266	7760	14950	24699	36347	49037	61903
49	1	25	225	1089	3507	8442	16475	27493	40831	55494	70515
50	1	26	234	1154	3765	9192	18138	30588	45812	62740	80215
51	1	26	243	1215	4033	9975	19928	33940	51294	70760	91058
52	1	27	252	1285	4319	10829	21873	37638	57358	79725	103226
53	1	27	261	1350	4616	11720	23961	41635	64015	89623	116792
54	1	28	271	1425	4932	12692	26226	46031	71362	100654	131970
55	1	28	280	1495	5260	13702	28652	50774	79403	112804	148847
56	1	29	290	1575	5608	14800	31275	55974	88252	126299	167672
57	1	29	300	1650	5969	15944	34082	61575	97922	141136	188556
58	1	30	310	1735	6351	17180	37108	67696	108527	157564	211782
59	1	30	320	1815	6747	18467	40340	74280	120092	175586	237489
60	1	31	331	1906	7166	19858	43819	81457	132751	195491	266006
61	1	31	341	1991	7599	21301	47527	89162	146520	217280	297495
62	1	32	352	2087	8056	22856	51508	97539	161554	241279	332337
63	1	32	363	2178	8529	24473	55748	106522	177884	267507	370733
64	1	33	374	2280	9027	26207	60289	116263	195666	296320	413112
65	1	33	385	2376	9542	28009	65117	126692	214944	327748	459718
66	1	34	397	2484	10083	29941	70281	137977	235899	362198	511045
67	1	34	408	2586	10642	31943	75762	150042	258569	399705	567377
68	1	35	420	2700	11229	34085	81612	163069	283161	440725	629281
69	1	35	432	2808	11835	36308	87816	176978	309729	485315	697097

例如,査50拆成7个相异数之和的种数.从最左竖列中查到 $50-\frac{7\cdot8}{2}=22$,从最上横行中查到Ⅶ,22所属横行与Ⅶ所属竖列交点处的522就是答案.

再例如,查50拆成7个不一定相异数之和的种数.从最竖列中查到 $50-7=43$,从最上横行中查到Ⅶ,43所属横行与Ⅶ所属竖列交点处的8946就是答案.

§ 319

附表的每一竖列都是一个级数的系数.虽然这里的级数是递推的,但其系数却与自然数、三角形数、四面体数等有着密切的关系.对这种关系我们做些说明.分式

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

产生的级数为

$$1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+\cdots,$$

从面

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$$

产生的级数为

$$x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+3x^6+\cdots$$

这两个级数相加,得级数

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+\cdots,$$

实际上它是分式

$$\frac{1+x}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

产生的级数.最后这个级数的系数就是自然数.令第一个级数中的 $x=1$,得到的就是表中列 II 所成的级数.取它的每项与前一项相加,用和作新级数的项.这新级数的项为自然数.

$$1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+\cdots$$

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+\cdots.$$

反之,从以自然数为项的级数,也可以得到以表中列 II 为项的级数.方法是:从前者的对应项减去后者的前一项,用结果作后者的项.

§ 320

表中列Ⅲ所成级数由分式

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

产生.但从

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\frac{(1+x)(1+x+x^2)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

我们看到,先让列Ⅲ所成级数每项与前两项相加,再让得到的级数每项与前一项相加,最后得到的就是三角形数所成级数,下面列的就是这三个级数.

$$1+1+2+3+4+5+7+8+10+12+14+16+19+\cdots$$

$$1+2+4+6+9+12+16+20+25+30+36+42+49+\cdots$$

$$1+3+6+10+15+21+28+36+45+55+66+78+91+\cdots$$

反之,如何从三角形数所成级数得到列Ⅲ所成级数,这也是明显的.

§ 321

类似地,列Ⅳ所成级数,由分式

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

产生,且

$$\frac{(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}=\frac{1}{(1-x)^4}.$$

这里,对列Ⅳ所成级数,使每项与前三项相加,得第二个级数,使第二个级数每项与前两项相加,得第三个级数,最后使第三个级数每项与前一项相加,得到的就是四面体数所成级数.下面是逐次得到

的结果

1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 11 + 15 + 18 + 23 + 27 + ⋯

1 + 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + 23 + 31 + 41 + 53 + 67 + 83 + ⋯

1 + 3 + 7 + 13 + 22 + 34 + 50 + 70 + + 95 + 125 + 161 + 203 + ⋯

1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + 165 + 220 + 286 + 264 + ⋯

类似地,从列Ⅴ所成级数推出二阶四面体数所成级数,从列Ⅵ所成级数推出三阶四面体数所成级数.

§ 322

反之,从自然数,三角形数等也可算出表中各列,下面是计算列Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ的中间和最后结果.

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + ⋯

1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + ⋯列Ⅱ

1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + ⋯

1 + 2 + 4 + 6 + 9 + 12 + 16 + 20 + 25 + 30 + ⋯

1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 12 + ⋯列Ⅲ

1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + 165 + 220 + ⋯

1 + 3 + 7 + 13 + 22 + 34 + 50 + 70 + 95 + 125 + ⋯

1 + 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + 23 + 31 + 41 + 53 + ⋯

1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 11 + 15 + 18 + ⋯列Ⅳ

1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 + 210 + 330 + 495 + 715 + ⋯

1 + 4 + 11 + 24 + 46 + 80 + 130 + 200 + 295 + 420 + ⋯

1 + 3 + 7 + 14 + 25 + 41 + 64 + 95 + 136 + 189 + ⋯

1 + 2 + 4 + 7 + 12 + 18 + 27 + 38 + 53 + 71 + ⋯

1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 10 + 13 + 18 + 23 + ⋯列Ⅴ

……

这是四组级数,其第一行的项,依次是自然数,三角形数,四面体

数,二阶四面体数.第二行的项都等于第一行的对应项减去第二行的前一项.第三行的项都等于第二行的对应项减去第三行前两项的和.类推下去,从前一行的对应项减去本行前三项的和,第四项的和等等以得到本行,直至得到我们所求的开头几项为 $1+1+2+\cdots$ 的级数,即表中的各列.

§ 323

表中各列开头几项都相同,并且越向右相同的项越多,可见当列无穷时,各列会完全相同,那时的级数是由分式

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\cdots}$$

产生的.这个级数是递推的.为得到递推尺度,展开分母,得

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+\cdots$$

仔细观察我们发现,指数为 $\frac{3n^2\pm n}{2}$, n 奇的项为负, n 偶的项为正.

§ 324

递推尺度为

$$+1,+1,0,0,-1,0,-1,0,0,0,0,+1,0,0,+1,0,0\cdots,$$

因而分式

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\cdots}$$

产生的递推级数为

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9$$

$+42x^{10}+56x^{11}+77x^{12}+101x^{13}+135x^{14}+176x^{15}+231x^{16}+297x^{17}$
$+385x^{18}+490x^{19}+627x^{20}+792x^{21}+1002x^{22}+1250x^{23}+1570x^{24}+$
$\cdots$

这个级数的每一项,系数都等于指数拆为整数之和的种数.例如,7拆成整数之和的种数是15,具体拆法为

$$7=7$$
$$7=6+1$$
$$7=5+2$$
$$7=5+1+1$$
$$7=4+3$$
$$7=4+2+1$$
$$7=4+1+1+1$$
$$7=3+3+1$$
$$7=3+2+2$$
$$7=3+2+1+1$$
$$7=3+1+1+1+1$$
$$7=2+2+2+1$$
$$7=2+2+1+1+1$$
$$7=2+1+1+1+1+1$$
$$7=1+1+1+1+1+1+1.$$

§ 325

乘积

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\cdots$$

展开,得级数

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+10x^{10}+\cdots,$$

这里系数等于指数拆成相异数之和的种数.例如,9拆成相异数之和的种数是8,这8种拆法是

$$9=9$$
$$9=8+1$$
$$9=7+2$$
$$9=6+3$$
$$9=6+2+1$$
$$9=5+4$$
$$9=5+3+1$$
$$9=4+3+2.$$

§ 326

为对这两个表达式进行比较,记

$$P=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\cdots$$
$$Q=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\cdots$$

从而

$$PQ=(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{10})(1-x^{12})\cdots$$

PQ 的因式都含于 P 中,用 PQ 除 P,得

$$\frac{1}{Q}=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)\cdots,$$

从而

$$Q=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)\cdots}.$$

将该分式展成无穷级数,则所得级数的每一项,系数都等于指数拆成奇数和的种数.Q 是我们上节考察过了的,因此我们得到定理:

一数拆成相异整数之和的种数,等于拆成奇数之和的种数,奇数可以相等.

§ 327

我们已经看到了

$$P=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\cdots$$

将 x 换成 x^2,得

$$PQ=1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+x^{44}+x^{52}-\cdots$$

用 P 除 PQ,得

$$Q=\frac{1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+\cdots}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\cdots}.$$

可见 Q 也可展成递推级数,而且这个级数可以由 $\frac{1}{P}$ 乘上

$$1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-\cdots$$

得到.从§ 324 我们知道

$$\frac{1}{P}=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+\cdots$$

乘它以

$$1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-\cdots$$

得

$$\begin{aligned}&1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+\cdots\\&-x^2-x^3-2x^4-3x^5-5x^6-7x^7-11x^8-15x^9-\cdots\\&-x^4-x^5-2x^6-3x^7-5x^8-7x^9-\cdots\\&\cdots\cdots\end{aligned}$$

或

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+\cdots=Q.$$

从一个数拆成可以相同的数之和的种数,可以推出拆成相异数之和的种数,进而又可推出拆成奇数之和的种数.

§ 328

还有几种情形应该注意，它们也对了解数的性质有帮助．考虑表达式

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{22})\cdots,$$

其中每个指数都是前一个的两倍．展开式为级数

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+\cdots$$

可能会问，这个级数是按几何级数一直延续下去吗？我们来回答这个问题．记

$$P=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots$$

设其展开式为

$$P=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\epsilon x^5+\zeta x^6+\eta x^7+\theta x^8+\cdots$$

将 x 换为 x^2，得乘积

$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots=\frac{P}{1+x}.$$

对展开式做同样的代换，得

$$\frac{P}{1+x}=1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6+\delta x^8+\epsilon x^{10}+\zeta x^{12}+\cdots,$$

两边乘 $1+x$，得

$$P=1+x+\alpha x^2+\alpha x^3+\beta x^4+\beta x^5+\gamma x^6+\gamma x^7+\delta x^8+\delta x^9+\cdots$$

两个 P 相比较，得

$$\alpha=1,\beta=\alpha,\gamma=\alpha,\delta=\beta,\epsilon=\beta,\zeta=\gamma,\eta=\gamma,\cdots$$

结果是系数都为 1，即展开式确实是按几何级数一直延续下去，是几何级数

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+\cdots$$

§ 329

x 的各次幂都在上节几何级数中出现,并且只出现一次. 从这几何级数等于乘积

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots,$$

我们得到:每个数都可表示成以 2 为公比的几何级数

$$1,2,4,8,16,32\cdots,$$

的项的和,并且表示法是唯一的.

这一性质也可从天平的使用中得到证实. 设砝码的克数为 1,2,4,8,16,32…,用这样的砝码我们可以称重量为任何克数的物体. 注意,不足 1 克的重量,这里不计. 用重量为 1,2,4,8,16,32,64,128,256,512 克的这 10 个砝码,我们可以称 1 克到 1024 克的所有重量. 如果再加上一个 1024 克的砝码,我们就可以称 1 克到 2048 克的所有重量.

§ 330

用更少的砝码,即用以 3 为公比的几何级数

$$1,3,9,27,81,\cdots$$

的项做砝码的克数,也可以称任何重量. 这里不足一克的重量也不计. 但这里有一点与前节不同. 前节物体、砝码分置两个托盘,这里放物体的托盘中,有时也要放砝码. 这是因为用以 3 为公比的几何级数的不同项形成所有的数时,需要加减法并用. 例如

$$1=1$$

$$2=3-1$$

$$3=3$$

$$4=3+1$$

$5 = 9 - 3 - 1$

$6 = 9 - 3$

$7 = 9 - 3 + 1$

$8 = 9 - 1$

$9 = 9$

$10 = 9 + 1$

$11 = 9 + 3 - 1$

$12 = 9 + 3$

……

§ 331

为证明上节结论,我们考虑无穷乘积

$$(x^{-1} + 1 + x)(x^{-3} + 1 + x^3)(x^{-9} + 1 + x^9)(x^{-27} + 1 + x^{27})\cdots = P,$$

其展开式中的指数,全都由数 1,3,9,27,81…经过加减两种运算形成.我们问:是不是每一个数都在展开式的指数中出现.为回答这个问题,我们令

$$P = \cdots + cx^{-3} + bx^{-2} + ax^{-1} + 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \cdots,$$

替 x 以 x^3,得

$$\frac{P}{x^{-1} + 1 + x^1} = \cdots + bx^{-6} + ax^{-3} + 1 + \alpha x^3 + \beta x^6 + \gamma x^9 + \cdots$$

由此得

$$P = \cdots + ax^{-4} + ax^{-3} + ax^{-2} + x^{-1} + 1 + x + \alpha x^2 + \alpha x^3 + \alpha x^4 + \beta x^5 + \beta x^6 + \beta x^7 + \cdots$$

两 P 相较,得

$$\alpha = 1, \beta = \alpha, \gamma = \alpha, \delta = \alpha, \varepsilon = \beta, \zeta = \beta, \cdots$$

$$a=1, b=a, c=a, d=a, e=b, \cdots.$$

这样一来,我们得到

$$P = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \cdots$$
$$+ x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-7} + \cdots$$

我们看到,正的、负的每一个数都在展开式的指数中出现,也即,每一个数都能够由公比为 3 的几何级数的项通过加减两种运算得到,并且得到的方式只有一种.

第十七章

应用递推级数求根

§ 332

著名数学家丹尼尔·贝努里有一篇研究任意次方程求根的文章,发表在彼得堡科学院通报第三卷上.这篇文章给出了一种用递推级数求代数方程根的近似值的方法,近似程度很高.本章我们详细介绍这一方法,它常常很有用,但对有的方程,这个方法无效,用它求不出根.我们先考虑递推级数与这个方法有密切关系的一些性质,以便能有效地应用这一方法.

§ 333

递推级数都由有理分式产生.设分式

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \cdots}$$

产生的递推级数为

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \cdots,$$

则系数

$$A=a$$
$$B=\alpha A+b$$
$$C=\alpha B+\beta A+c$$
$$D=\alpha C+\beta B+\gamma A+d$$
$$E=\alpha D+\beta C+\gamma B+\delta A+e$$
$$\cdots\cdots$$

第八章我们讲了,通项,也即 z^n 的系数的求法是:先把有理分式表示成部分分式,部分分式是以分母

$$1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\cdots$$

的因式为分母的分式.

§ 334

通项主要决定于分母线性因式的性质,决定于线性因式中有无虚的,有无相同的.我们对不同情形分别进行讨论,先考虑分母的线性因式都是实的,且都不相同的情形.记此时分母的线性因式为

$$(1-pz)(1-qz)(1-rz)(1-sz)\cdots,$$

记所给分数分解成的部分分式为

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-pz}+\frac{\mathfrak{B}}{1-qz}+\frac{\mathfrak{C}}{1-rz}+\frac{\mathfrak{D}}{1-sz}+\cdots,$$

则递推级数的通项为

$$z^n(\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n+\mathfrak{C}r^n+\mathfrak{D}s^n+\cdots),$$

记它为 Pz^n,也即记 z^n 的系数为 P.记 Pz^n 后继项的系数为 Q、R …,则递推级数为

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots+Pz^n+Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+\cdots.$$

§ 335

我们继续写这递推级数的项到很多，也即让 n 很大．两数，一大一小，大数的幂比小数的幂更大．设不相等的 $p,q,r\cdots$ 中 p 最大，那么 n 很大时，与 $\mathfrak{A}p^n$ 相比较，$\mathfrak{B}q^n,\mathfrak{C}r^n,\cdots$ 都可忽略不计．因而，n 很大时，我们可以取，或者至少近似地可以取

$$P=\mathfrak{A}p^n,$$

类似地，可以取

$$Q=\mathfrak{A}p^{n+1},$$

从而

$$\frac{Q}{P}=p.$$

由此可见，级数继续到很多项时，这第很多项与其前一项的比，就是 $p,q,r\cdots$ 中最大的 p 的近似值．

§ 336

这样，如果分式

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+\cdots}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\cdots}$$

分母的线性因式都是实的，且不相同，又如果分母的线性因式中 z 的最大系数为 p，那么，从分式的递推级数，我们就可以求出线性因式 $1-pz$．在求该因式的过程中，分子的系数 $a,b,c,d,\cdots$ 不起作用．事实上，不管分子的系数取什么值，求出的最大数 p 的值都是相同的．n 很大时，我们得到 p 的近似值，n 越大近似程度越好，p 比 $q,r,s\cdots$ 它们大得越多，近似程度也越好，n 越向无穷时，我们得到 p 的真值．最后，p 为正为负，我们的方法是一样的，因为 p 为正为负，其幂都是增加的．

§ 337

以上我们讲了应用递推级数求代数方程根的方法.知道了分母

$$1-\alpha z-\beta z^{2}-\gamma z^{3}-\delta z^{4}-\cdots$$

的因式,也就知道了方程

$$1-\alpha z-\beta z^{2}-\gamma z^{3}-\delta z^{4}-\cdots=0.$$

的根.$1-pz$ 为因式,则 $z=\dfrac{1}{p}$为根.用递推级数求得的是最大的数 p,因而得到的是方程

$$1-\alpha z-\beta z^{2}-\gamma z^{3}-\cdots=0.$$

的最小的根.令 $z=\dfrac{1}{x}$,方程化为

$$x^{m}-\alpha x^{m-1}-\beta x^{m-2}-\gamma x^{m-3}-\cdots=0$$

那么,我们得到的就是这个方程最大的根 $x=p$.

§ 338

这样一来,如果给了方程

$$x^{m}-\alpha x^{m-1}-\beta x^{m-2}-\gamma x^{m-3}-\cdots=0,$$

并已知其根都为实数,且不相同,那么最大根的求法是:先根据所给方程的系数写出分式

$$\frac{a+bz+cz^{2}+dz^{3}+\cdots}{1-\alpha z-\beta z^{2}-\gamma z^{3}-\cdots},$$

再列出这个分式的递推级数,分子或者级数前若干项的系数任意。记列出的递推级数为

$$A+Bz+Cz^{2}+Dz^{3}+\cdots+Pz^{n}+Qz^{n+1}+\cdots,$$

则分数$\dfrac{Q}{P}$就是所给方程的最大根,n 越大,近似程度越高.

例 1:求方程

$$x^2-3x-1=0$$

的最大根.

先写出分式

$$\frac{a+bz}{1-3z-z^2},$$

取该分式递推级数前两项的系数为 1 和 2,则级数的系数为

$$1,2,7,23,76,251,829,2738,\cdots$$

从而分数

$$\frac{2738}{829}$$

就是所给方程最大根的近似值.化成小数,为

$$3.3027744,$$

最大真根为

$$\frac{3+\sqrt{13}}{2}=3.3027756$$

比我们求得的近似值只大百万分之一.我们指出,随 n 依次增大,分数$\frac{Q}{P}$比真根大比真根小交替.

例 2:方程

$$3x-4x^3=\frac{1}{2}$$

的根是角的正弦,这每个角的三倍的正弦都为$\frac{1}{2}$.

改写方程为

$$1-6x+8x^3=0,$$

我们求它的最小根,因而不需换 x 为$\frac{1}{z}$.写出分式

$$\frac{a+bx+cx^2}{1-6x+8x^3},$$

为使于递推级数后继系数的列出,我们取开给三系数为 0,0,1.这

样,递推级数的系数为

$$0,0,1,6,36,208,1200,6912,39808,229248\cdots$$

最小根的近似值为

$$\frac{39808}{229248}=\frac{311}{1791}=0.1736460,$$

真值为 $\sin 10^\circ$,从三角函数表中查得 $\sin 10^\circ=0.1736482$,比我们算出的值大$\frac{22}{10000000}$.

令 $x=\frac{1}{2}y$,所给方程化为

$$1-3y+y^3=0$$

该方程的根求起来更容易.类似地,我们得到系数

$$0,0,1,3,9,26,75,216,622,1791,5157\cdots,$$

最小根的近似值为

$$y=\frac{1791}{5157}=\frac{199}{573}=0.3472949,$$

从而

$$x=\frac{y}{2}=0.1736475.$$

这后一个近似值与真值的差是前一个的约三分之一.

例 3:求例 2 中方程

$$0=1-6x+8x^3$$

的最大根.置 $x=\frac{y}{2}$,得

$$y^3-3y+1=0$$

由该方程产生的递推级数,其递推尺度为 $0,3,-1$,任意取定开始三个系数,得到的级数的系数为

$$1,1,1,2,2,5,4,13,7,35,8,98,-11,\cdots$$

这系数中有负值,表明最大根是负的,实际上,最大根为

$$x=-\sin 70^\circ=-0.9396926.$$

我们让任意的开始三系数中也包含负值，例如

$$1-2+4-7+14-25+49-89+172-316+605-\cdots$$

由此得

$$y=\frac{-605}{316}\qquad x=-\frac{605}{632}=-0.957$$

偏离真值太大.

§ 339

例 3 所得偏离真值太大，其主要原因是方程的三个真根

$$-\sin 70^\circ,\ +\sin 50^\circ,\ +\sin 10^\circ$$

里面，$\sin 50^\circ$比最大根 $-\sin 70^\circ$小得太少. 在我们的计算中，$\sin 50^\circ$的幂与 $-\sin 70^\circ$的幂相比较，还没有达到可以忽略的程度. 偏离真值太大的另一个原因是，求到的偏随项的推移而太大太小交替. 退一步取

$$y=\frac{-316}{172}$$

则

$$x=\frac{-158}{172}=\frac{-79}{86}=-0.918.$$

这是因为最大根的幂正负交替，因而第二个根的幂交替地与它相加相减. 要第二个根的影响可以忽略，就需求出级数的很多项.

§ 340

再一种补救的方法是，作适当的变换，把根的距离拉开. 例如，方程

$$0=1-6x+8x^3$$

以 $-\sin 70^\circ,\sin 50^\circ,\sin 10^\circ$为根，作代换 $x=y-1$，则所得方程

$$0=8y^3-24y^2+18y-1$$

以 $1-\sin 70^\circ$, $1+\sin 50^\circ$, $1+\sin 10^\circ$ 为根. 对应于原方程最大根 $-\sin 70^\circ$,新方程中 $1-\sin 70^\circ$ 是最小根. 原方程中的中间根 $\sin 50^\circ$,对应于新方程的最大根 $1+\sin 50^\circ$. 用变换的方法,可以把任何一个根变成最大根或最小根. 从而就可以用前面的方法求出它. 由于 $1-\sin 70^\circ$ 远小于另外两个根,用递推级数可以很容易地算出它.

例 4:求方程

$$0=8y^3-24y^2+18y-1$$

的最小根. 1 减去这个最小根得 $\sin 70^\circ$.

令 $y=\frac{1}{2}z$,得

$$0=z^3-6z^2+9z-1.$$

求最小根的递推级数,其递推尺度为 9, −6, 1;求最大根的递推级数,其递推尺度为 6, −9, 1. 求最小根的递推级数,其系数为

$$1,1,1,4,31,256,2122,17593,145861,\cdots,$$

z 的近似值为

$$z=\frac{17593}{145861}=0.12061483$$

从而

$$y=0.06030741,$$

由此得

$$\sin 70^\circ=1-y=0.93969258,$$

甚至最后一位也与真值相同. 从这个例子中我们看到,求根时变量替换的作用是很大的. 配合上变量替换,用递推级数法,就不仅可以求出最大和最小根,而且可以求出任何一个根.

§ 341

给定一个方程,已知它的一个根很靠近数 k. 这时令 $x-K=y$

或 $x=y+K$,我们得到一个新方程. $x-K$ 是新方程的最小根.因为它比别的根小很多,所以可从递推级数很容易地求得.把 K 加到求得的根上去,就得到原方程的根.这一技巧甚至在方程有复根时也可以使用.

§ 342

特别地,符号相反数值相等的两个根,不用上节技巧,它们中任何一个都不能从递推级数求出.比如方程有根 p 和 $-p$,p 为最大根.此时即使把级数继续到无穷,也求不出 p 来.我们来看一个具体例子.方程

$$x^3-x^2-5x+5=0$$

有根$\sqrt{5}$和 $-\sqrt{5}$,且$\sqrt{5}$为最大根.用来求最大根的级数,其递推尺度为 $1,5,-5$,其系数为

$$1,2,3,8,13,38,63,188,313,938,1563,\cdots$$

邻项比不趋向任何常数.请注意,隔项比趋向最大根的平方,即近似地有

$$5=\frac{1563}{313}=\frac{938}{188}=\frac{313}{63}.$$

实际上,只要隔项比趋向常数,这常数必为所求根的平方.为了求出根 $x=\sqrt{5}$,我们作替换 $x=y+2$,得方程

$$1-3y-5y^2-y^3=0,$$

产生该方程最小根的级数,其系数为

$$1,1,1,9,33,145,609,2585,10945,\cdots$$

最小根的近似值为

$$\frac{2585}{10945}=0.2361,$$

2.2361 近似地等于原方程的最大根$\sqrt{5}$.

§ 343

产生递推级数的分式，其分子的选取完全随意，但选取当否，对计算的难易影响很大．照 § 334 的假定，我们的递推级数，其通项为

$$z^n(\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n+\mathfrak{C}r^n+\cdots)$$

其中的 $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}\cdots$决定于分式的分子．$\mathfrak{A}$ 的大小决定着计算最大根 p 的速度的快慢．$\mathfrak{A}$ 完全不出现时，即使把级数延长得再远，也求不出最大根．分子中含有因式 $1-pz$ 时，就是这种不出现的情形．此时 $1-pz$ 将从计算中消失．例如，方程

$$x^3-6x^2+10x-3=0$$

的最大根是 3．取分式

$$\frac{1-3z}{1-6z+10z^2-3z^3},$$

则递推级数的递推尺度为 6，－10，3，系数为

$$1,3,8,21,55,144,377,\cdots$$

邻项比不趋向$\frac{1}{3}$．实际上，这个级数是由分式

$$\frac{1}{1-3z+z^2}$$

展成的，邻项比趋向的是方程

$$x^2-3x+1=0$$

的最大根．

§ 344

可以选取分子，使得通过递推级数，能够求出方程的任何一个根．从分母中分出所求根对应的因式，取其余因式的乘积作分子，

就能达到我们的目的.以刚才讨论过的方程为例,如果取 $1-3z+z^2$ 作分子,那么分式

$$\frac{1-3z+z^2}{1-6z+10z^2-3z^3}$$

产生的递推级数,是一个几何级数,其系数为

$$1,3,9,27,81,243,\cdots,$$

由此立即得到根 $x=3$.实际上这分式是

$$\frac{1}{1-3z}.$$

可见,如果取允许任选的开始几项成几何级数,且等于方程的根的幂,那么整个递推级数将成为几何级数.这个级数就给出方程的根.这个根可以既不是最大根也不是最小根.

§ 345

为保证从递推级数求得的根一定是最大的或最小的,选取的分子应该与分母没有公因式.取 1 作分子就可以保证这一点.这样,级数的第一项为 1,后续项就完全由递推尺度决定.这样做我们一定可以得到方程的最大根或最小根.

例如,给定方程

$$y^3-3y+1=0.$$

我们求它的最大根.递推尺度为 0,3,-1,取第一项为 1,我们得到递推级数的系数为

$$1-0+3-1+9-6+28-27+90-109+297-517+1000-1848+3517-6544+\cdots,$$

邻项比为负,收敛于常数,表明最大根是负的.近似地有

$$y=\frac{-6544}{3517}=-1.651741$$

这个根应该等于 -1.86793852.这里收敛如此之慢的原因,前面讨

论过，是因为有另一个数值比最大根小得不多的正根存在.

§ 346

关于递推级数求根法，我们讲了一般道理，讨论了会引起困难的特殊情况，介绍了提高计算速度的技巧，还举了一些例子，大家已经看清楚了这一方法的作用，剩下要讲的还有两点，即方程有重根和虚根的情形. 假定分式

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+\cdots}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\cdots}$$

的分母含有因式$(1-pz)^2$，其余的因式$1-qz$，$1-rz$，…都是单重的. 该分式递推级数的通项为

$$z^n((n+1)\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}p^n+\mathfrak{C}q^n+\cdots).$$

n增大，我们看看这通项在p是和不是最大根时的情形. p是最大根，由于系数$n+1$的存在，$\mathfrak{B}p^n+\mathfrak{C}q^n+\cdots$消失得不如单根时快；$p$不是最大根，比如$q>p$，此时$(n+1)\mathfrak{A}p^n$的消失，与$\mathfrak{C}q^n$相比也不快. 总之，有重根时，求最大根的计算量要更大.

例 1：方程

$$x^3-3x^2+4=0,$$

重根z为最大根.

我们用前面的方法来求它的最大根. 考虑分式

$$\frac{1}{1-3z+4z^3}.$$

其递推级数的系数为

$$1,3,9,23,57,135,313,711,1593,\cdots,$$

我们看到用前项除后项，商都大于2. 这原因可从通项中找. 从z^n的系数中去掉$\mathfrak{C}q^n\cdots$，剩下的为

$$(n+1)\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}p^n,$$

从 z^{n+1}的系数去掉相应部分,剩下的为

$$(n+2)\mathfrak{A}p^{n+1}+\mathfrak{B}p^{n+1},$$

后被前除,得

$$\frac{(n+2)\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{(n+1)\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}p,$$

只要 n 不增加到无穷,该式恒大于 p.

例 2:方程

$$x^3-x^2-5x-3=0$$

-1 为重根,最大根为 3.

我们用递推级数求最大根,递推尺度为 1,5,3,系数为

1,1,6,14,47,135,412,1228,⋯

这个级数很快地就给出 3.这是因为 -1 的幂即使乘上 $n+1$,与 3 的幂相比,变小的速度也是快的.

例 3:方程

$$x^3+x^2-8x-12=0,$$

根为 3, -2, -2.

对该方程使用递推级数求根法,最大根的出现要慢得多.递推级数的系数为

1, -1,9, -5,65,3,457,347,3345,4915,⋯,

要得到根 3,需将这系数继续到很远.

§ 347

类似地,如果有三个因式相同,即分母的一个因式为$(1-pz)^3$,其余的因式为 $1-qz$,$1-rz$,⋯,则递推级数的通项为

$$z^n\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\mathfrak{A}p^n+(n+1)\mathfrak{B}p^n+\mathfrak{C}p^n+\mathfrak{D}q^n+\mathfrak{E}r^n+\cdots\right).$$

如果 p 是最大根 ,又如果 n 够大,使得幂 q^n,r^n⋯与 p^n 相比可以

忽略.那么从递推级数,我们得到根的近似值为

$$\frac{\frac{1}{2}(n+2)(1+3)\mathfrak{A}+(n+2)\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\mathfrak{A}+(n+1)\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}p,$$

除非 n 极大,即除非 n 为无穷大,这个分数将恒大于 p,事实上,它等于

$$p+\frac{(n+2)\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\mathfrak{A}+(n+1)\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}p.$$

如果 p 不是最大根,那么它的计算更难.可见,用递推级数求根,含重根的方程比不含重根的方程要难得多.

§ 348

现在我们来看看分式分母有虚因式时,递推级数的情形.设分式

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+\cdots}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\cdots}$$

在实因式 $1-qz$, $1-rz$, $\cdots$之外,还有一个三项因式 $1-2pz\cos\varphi+p^2z^2$,它含有两个线性虚因式.记分式的递推级数为

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots+Pz^n+Qz^{n+1}+\cdots,$$

从§218我们知道,系数

$$P=\frac{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi+\mathfrak{B}\sin n\varphi}{\sin\varphi}p^n+\mathfrak{C}q^n+\mathfrak{D}r^n+\cdots$$

如果 p 小于 q, r, $\cdots$中的一个,则方程

$$x^m-\alpha x^{m-1}-\beta x^{m-2}-\gamma x^{m-3}-\cdots=0$$

的最大极是实的.用递推级数求这个最大根时,跟方程不含虚根没有什么不同.

§ 349

只要共轭虚根的积小于最大实根的平方，虚根的存在对最大实根的求法就不产生干扰.如果共轭虚根的积等于或大于最大实根的平方，那么从递推级数就得不到最大实根，原因最，在这种情况下，即使级数继续到无穷，幂 p^n 与最大实根的同次幂相比较也不消失.下面举几个例子，证实这里所讲.

例 1:求方程

$$x^3-2x-4=0$$

的最大实根.

该方程的因式是

$$(x-2)(x^2+2x+2)$$

我们看到实根为 2，虚根积为 2，小于实根平方，实根可用递推级数求出.从递推尺度 0,2,4 得递推级数的系数为

$$1,0,2,4,4,16,24,48,112,192,416,832,\cdots$$

由此得实根为 2.

例 2:方程

$$x^3-4x^2+8x-8=0$$

实根为 2，两虚根的积为 4，等于实根的平方.

我们用递推级数来求这个实根，看结果怎样.为简化结果，令 $x=2y$，得

$$y^3-2y^2+2y-1=0$$

由此得递推级数的系数为

$$1,2,2,1,0,0,1,2,2,1,0,0,1,2,2,1,\cdots$$

是循环的.我们的结论只能是:或者最大根不是实的，或者最大实根的平方不大于虚根的积.

例 3:方程

$$x^3-3x^2+4x-2=0,$$

实根为 1,虚根的积为 2.

从递推尺度 3, -4,2 得递推级数的系数

$$1,3,5,5,1,-7,-15,-15,+1,33,65,65,1\cdots,$$

有正有负,从它我们得不到实根 1.

§ 350

假定两个虚根的积 p^2 大于任何实根的平方,那么 n 趋向无穷时,与幂 p^n 相比,幂 q^n, r^n,…都可以忽略.这样我们有

$$P=\frac{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi+\mathfrak{B}\sin n\varphi}{\sin\varphi}p^n,$$

$$Q=\frac{\mathfrak{A}\sin(n+2)\varphi+\mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}p^{n+1},$$

从而

$$\frac{Q}{P}=\frac{\mathfrak{A}\sin(n+2)\varphi+\mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi}{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi+\mathfrak{B}\sin n\varphi}p.$$

即使 n 为无穷,这个表达式也不取常值,因为正弦的值时正时负,是摆动的.

§ 351

类似地,可以得到分式$\frac{R}{Q}$和$\frac{S}{R}$,从这两个分式消去 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$,并使数 n 不出现,得

$$Pp^2+R=2Qp\cos\varphi,$$

由此得

$$\cos\varphi=\frac{Pp^2+R}{2Qp}.$$

类似地,得

$$\cos\varphi = \frac{Qp^2 + S}{2Rp}.$$

由这两式得

$$p = \sqrt{\frac{R^2 - QS}{Q^2 - PR}},$$

和

$$\cos\varphi = \frac{QR - PS}{2\sqrt{(Q^2 - PR)(R^2 - QS)}}.$$

因此,如果将递推级数延续到,同幂 p^n 相比其它根的幂都可忽略时,那么用这里的方法就可求出三项式因式 $1 - 2pz\cos\varphi + p^2z^2$.

§ 352

上节结果的推导,经验不够丰富的读者可能感到困难.这里我们详细做一下,从$\frac{Q}{P}$我们得到

$$\mathfrak{A}Pp\sin(n+2)\varphi + \mathfrak{B}Pp\sin(n+1)\varphi = \mathfrak{A}Q\sin(n+1)\varphi + \mathfrak{B}Q\sin n\varphi,$$

从而

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{Q\sin n\varphi - Pp\sin(n+1)\varphi}{Pp\sin(n+2)\varphi - Q\sin(n+1)\varphi}.$$

类似地,得

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{R\sin(n+1)\varphi - Qp\sin(n+2)\varphi}{Qp\sin(n+3)\varphi - R\sin(n+2)\varphi}.$$

由两式右端相等得

$$0 = \begin{cases} Q^2p\sin n\varphi\sin(n+3)\varphi - Q^2p\sin(n+1)\varphi\sin(n+2)\varphi \\ - QR\sin n\varphi\sin(n+2)\varphi + QR\sin(n+1)\varphi\sin(n+1)\varphi \\ - PQp^2\sin(n+1)\varphi\sin(n+3)\varphi + PQp^2\sin(n+2)\varphi\sin(n+2)\varphi \end{cases}$$

利用

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b)$$

得

$$0 = \frac{1}{2}Q^2 p(\cos 3\varphi - \cos\varphi) + \frac{1}{2}QR(1-\cos 2\varphi)$$

$$+\frac{1}{2}PQp^2(1-\cos 2\varphi),$$

除以$\frac{1}{2}Q$,得

$$(Pp^2 + R)(1-\cos 2\varphi) = Qp(\cos\varphi - \cos 3\varphi).$$

由

$$\cos\varphi = \cos 2\varphi\cos\varphi + \sin 2\varphi\sin\varphi$$

和

$$\cos 3\varphi = \cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi,$$

得

$$\cos\varphi - \cos 3\varphi = 2\sin 2\varphi\sin\varphi = 4\sin^2\varphi\cos\varphi.$$

又

$$1-\cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi,$$

从而

$$Pp^2 + R = 2Qp\cos\varphi,$$

进而

$$\cos\varphi = \frac{Pp^2+R}{2Qp}.$$

类似地,得

$$\cos\varphi = \frac{Qp^2+S}{2Rp}.$$

由这两式得到前节结果

$$p = \sqrt{\frac{R^2-QS}{Q^2-PR}}$$

和

$$\cos\varphi=\frac{QR-PS}{2\sqrt{(Q^2-PR)(R^2-QS)}}.$$

§ 353

如果产生递推级数的分式,其分母含有几个不相等的三项式因式,那么看看从§219开始的几节所给出的通项,我们就会明白,这求根会怎样地不准确.我们指出一点,如果求到了比较靠近一个实真根值,那么通过对方程做变换,可以求出更靠近真根的值.事实上,置 x 等于比较靠近真根的值与 y 的和,求新方程的最小根 y,求得的这个 y,加上比较靠近真根的值,就是 x 的更靠近真根的值.

例4:方程

$$x^3-3x^2+5x-4=0$$

有一个靠近1的根,因为 $x=1$ 时

$$x^3-3x^2+5x-4=-1$$

令 $x=1+y$,则

$$1-2y-y^3=0$$

我们求这个方程的最小根,以2,0,1为递推尺度的级数,其系数为

$$1,2,4,9,20,44,97,214,472,1041,2296,\cdots,$$

由此得最小根 y 近似地等于

$$\frac{1041}{2296}=0.453397$$

从而

$$x=1.453397.$$

这个值与真值靠得很近.用别的办法很难这么容易地求得这个值.

§ 354

如果一个级数延续到某项以后，它接近于一个几何级数，这时用一项除后项，商就是对应方程的根.设

$$P, Q, R, S, T, \cdots$$

是递推级数延续到了很远处的项，已经成几何级数，这时

$$T = \alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P,$$

即递推尺度为 $\alpha, +\beta, +\gamma, +\delta$，令 $\frac{Q}{P} = x$，则

$$\frac{R}{P} = x^2, \frac{S}{P} = x^3, \frac{T}{P} = x^4,$$

代它们入上面的方程，得

$$x^4 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

可见 $\frac{Q}{P}$ 确实是方程的一个根，这一点和前面的方法告诉我们，$\frac{Q}{P}$ 是方程的最大根.

§ 355

这种求根方法常常也可以用于项数无穷的方程.作为例子，我们考虑方程

$$\frac{1}{2} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \cdots$$

其最小根是 30°或 $\frac{1}{6}$ 半圆的弧度数，改写方程为

$$1 - 2z + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{60} + \frac{z^7}{2520} - \cdots = 0,$$

递推尺度为

$$2, 0, -\frac{1}{3}, 0, +\frac{1}{60}, 0, -\frac{1}{2520}, 0, \cdots,$$

级数的系数为

$$1,2,4,\frac{23}{3},\frac{44}{3},\frac{1681}{60},\frac{2408}{45},\cdots,$$

从而我们近似地有

$$z=\frac{1681\cdot 45}{2408\cdot 60}=\frac{1681\cdot 3}{2408\cdot 4}=\frac{5043}{9632}=0.52356.$$

圆周与直径的比我们知道，z 的真值应为 0.523598，我们求得的值的误差为$\frac{3}{100000}$. 我们的方法在这里的情况下是有用的，因为根全是实的，且其余的根都离最小根够远. 在无穷方程中这样的情况不多见，所以我们的方法在求解无穷方程时很少使用.

第十八章

连分数

§ 356

我们已经讨论了两类无穷——无穷级数和无穷乘积,现在讨论第三类——连分数．到目前为止,对于连分数的研究还不多,但它将广泛地应用于无穷分析,这是无疑的.我们已经举过使这种应用成为可能的例子.本章所讲,对算术和普通代数都颇为有益.

§ 357

连分数是这样的分数,分母是整数与分数的和,这分数的分母又是整数与分数的和,类推下去,这过程可以无穷地向下延续,也可以在某一点停止.连分数分为两类,一类为

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\cdots}}}}}$$

另一类为

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\cdots}}}}}$$

第一类,分子全是 1,我们要考察的主要是这一类.第二类,分子可以是任何数.

§ 358

前面给出了连分数的形状,接着要做的第一件事,是怎样把连分数化为分数.为了能找出规律,第一步只取一个整数,接下去每步增加一层分数.这样我们得到

$$a=a$$

$$a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{abc+a+c}{bc+1}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}=\frac{abcde+abe+ade+cde+abe+a+c+e}{bcde+be+de+bc+1}$$

……

§ 359

从这些分数本身我们看不出,分子分母是依怎样的规律由字母 $a,b,c,d,\cdots$ 形成.但细心的读者可能已经看出了,一个分数是怎样由前两个分数形成的.方法是:分子等于前一个分子与新字母的积加上再前一个分子.分母依同样的规律由前两个分母和新字母形成.按顺序写出字母 $a,b,c,d,\cdots$,作分数的上标.在字母下面写出相应的分数,成为

$$\begin{array}{cccccc} & a, & b, & c, & d, & e \\ \dfrac{1}{0}, & \dfrac{a}{1}, & \dfrac{ab+1}{b}, & \dfrac{abc+a+c}{bc+1}, & \dfrac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}, & \cdots, \end{array}$$

从第三个分数开始,每一个分子都等于前一个分子与其上标之积加上再前一个分子.分母也依同样的规律由前两个分母和上标形成.为了一开始就能使用我们的规律,我们加上了分数 $\frac{1}{0}$,它不属于连分数.这每一个分数都给出连分数到前个上标字母处为止的值.

§ 360

对第二类连分式

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\epsilon}{f+\cdots}}}}}$$

类似地,我们有

$$a=a$$

$$a+\frac{\alpha}{b}=\frac{ab+\alpha}{b}$$

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}}=\frac{abc+\beta a+\alpha c}{bc+\beta}$$

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d}}}=\frac{abcd+\beta ad+\alpha cd+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b}$$

……

和

$$\begin{array}{cccccc} & a, & b, & c, & d, & e \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+\alpha}{b}, & \frac{abc+\beta a+\alpha c}{bc+\beta}, & \frac{abcd+\beta ad+\alpha cd+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b}, & \cdots \\ & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon. \end{array}$$

§ 361

第二类比第一类,在上标字母 $a,b,c,d,\cdots$之外,添上了下标字母 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$.第一、二两个分数也为$\frac{1}{0}$和$\frac{a}{1}$.之后的每一个分数,分子都等于前一个分子与其上标之积,加上再前一个分子与其下标之积,也即新分子是两个积之和;分母的形成规律与分子相同,等于前一个分母与其上标之积,加上再前一个分母与其下标之积.这样得到的每一个分数,给出的都是连分数到前一个分数上标处(含上标)的值.

§ 362

如果分数继续到用完最后的上下标,那么这最后一个分数给

出的，就是连分数的真值.前面的分数都是连分数的近似值，离最后一个分数越近的近似程度越高.假定连分数

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\varepsilon}{e+\cdots}}}}=x,$$

显然第一个分数$\frac{1}{0}$比 x 大，第二个分数$\frac{a}{1}$比 x 小，第三个分数 $a+\frac{a}{b}$又比 x 大，第四个又比 x 小，等等.也即，这些分数比 x 大比 x 小交替.显然，每一个分数都比前一个更靠近真值.这样一来，即使连分数继续到无穷，只要分子 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$ 不是太大，我们都可以迅速简便地得到 x 的近似值，如果分子都是 1，那就更不成问题.

§ 363

为进一步看清算出的分数对真值的逼近，我们考察算出的分数的差.第一个分数$\frac{1}{0}$不考虑.第三减第二，差为

$$\frac{\alpha}{b},$$

第三减第四，差为

$$\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)},$$

第五减第四，差为

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)},$$

等等.由此得到连分数的值可以用级数

$$x=a+\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}-\cdots$$

表示.如果连分数不继续到无穷,这级数的项数就也是有限的.

§ 364

这样,我们就找到了一种方法,将去掉了字母 a 的连分数展开成符号交错的级数.例如

$$x=\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\cdots}}}}},$$

从上节结果我们有

$$x=\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}$$
$$-\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bc+\beta)(bcde+\beta de+\gamma bc+\delta bc+\beta\delta)}+\cdots$$

如果 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$不是递增的,例如全为1,又如果分母中的 $a,b,c,d,\cdots$全为正整数,则连分数可展成一个收敛很快的级数表示.

§ 365

我们考虑反问题:化交错级数为连分数.设交错级数为

$$x=A-B+C-D+E-F+\cdots$$

将这里的 $A,B,C,\cdots$与连分数化成的级数的项相比较,那么从得到的下列左式推出对应的右式

$$A=\frac{\alpha}{b}\qquad\qquad \alpha=Ab$$

$$\frac{B}{A}=\frac{\beta}{bc+\beta}\qquad\qquad \beta=\frac{Bbc}{A-B}$$

$$\frac{C}{B}=\frac{\gamma b}{bcd+\beta d+\gamma b}\qquad\qquad \gamma=\frac{Cd(bc+\beta)}{b(B-C)}$$

$$\frac{D}{C}=\frac{\delta(bc+\beta)}{bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta}\qquad\qquad \delta=\frac{De(bcd+\beta d+\gamma b)}{(bc+\beta)(C-D)}$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots$$

由

$$\beta=\frac{Bbc}{A-B}$$

得

$$bc+\beta=\frac{Abc}{A-B},$$

从而

$$\gamma=\frac{ACcd}{(A-B)(B-C)};$$

由

$$bcd+\beta d+\gamma b=(bc+\beta)d+\gamma b=\frac{Abcd}{A-B}+\frac{ACbcd}{(A-B)(B-C)}$$

$$=\frac{ABbcd}{(A-B)(B-C)}$$

得

$$\frac{bcd+\beta d+\gamma b}{bc+\beta}=\frac{Bd}{B-C},$$

从而

$$\delta=\frac{BDde}{(B-C)(C-D)}.$$

类似地,我们得到

$$\varepsilon=\frac{CEef}{(C-D)(D-E)}$$

等等.

§ 366

为了更清楚地说明这规律,我们令

$$P = b$$

$$Q = bc + \beta$$

$$R = bcd + \beta d + \gamma b$$

$$S = bcde + \beta de + \gamma be + \delta bc + \beta\delta$$

$$T = bcdef + \beta def + \gamma bef + \delta bcf + \varepsilon bcd + \varepsilon\beta d + \varepsilon\gamma b + \beta\delta f$$

$$V = bcdefg + \beta defg + \gamma befg + \delta bcfg + \varepsilon bcdg + \varepsilon bcde + \varepsilon\beta dg + \varepsilon\beta de + \varepsilon\gamma bg + \varepsilon\gamma be + \beta\delta fg + \varepsilon\delta bc + \varepsilon\beta\delta.$$

……

这些表达式可写成

$$Q = Pc + \beta$$

$$R = Qd + \gamma P$$

$$S = Re + \delta Q$$

$$T = Sf + \varepsilon R$$

$$V = Tg + \zeta S$$

……

利用字母 $P, Q, R, \cdots$ 我们有

$$x = \frac{\alpha}{P} - \frac{\alpha\beta}{PQ} + \frac{\alpha\beta\gamma}{QR} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{RS} + \frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{ST} - \cdots$$

§ 367

由假设

$$x = A - B + C - D + E - F + \cdots$$

得

$$A=\frac{\alpha}{P},\qquad \alpha=AP$$

$$\frac{B}{A}=\frac{\beta}{Q},\qquad \beta=\frac{BQ}{A}$$

$$\frac{C}{B}=\frac{\gamma P}{R},\qquad \gamma=\frac{CR}{BP}$$

$$\frac{D}{C}=\frac{\delta Q}{S},\qquad \delta=\frac{DS}{CQ}$$

$$\frac{E}{D}=\frac{\epsilon R}{T},\qquad \epsilon=\frac{ET}{DR}$$

……

求差,得

$$A-B=\frac{\alpha(Q-\beta)}{PQ}=\frac{\alpha c}{Q}=\frac{APc}{Q}$$

$$B-C=\frac{\alpha\beta(R-\gamma P)}{PQR}=\frac{\alpha\beta d}{PR}=\frac{BQd}{R}$$

$$C-D=\frac{\alpha\beta\gamma(S-\delta Q)}{QRS}=\frac{\alpha\beta\gamma e}{QS}=\frac{CRe}{S}$$

$$D-E=\frac{\alpha\beta\gamma\delta(T-\epsilon R)}{RST}=\frac{\alpha\beta\gamma\delta f}{RT}=\frac{DSf}{T}$$

……

使每个差与它下面的一个相乘,得

$$(A-B)(B-C)=ABcd\cdot\frac{P}{R},\frac{R}{P}=\frac{ABcd}{(A-B)(B-C)}$$

$$(B-C)(C-D)=BCde\cdot\frac{Q}{S},\frac{S}{Q}=\frac{BCde}{(B-C)(C-D)}$$

$$(C-D)(D-E)=CDef\cdot\frac{R}{T},\frac{T}{R}=\frac{CDef}{(C-D)(D-E)}$$

……

由

$$P=b,Q=\frac{ac}{A-B}=\frac{Abc}{A-B}$$

得

$$\alpha = Ab$$

$$\beta = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$\gamma = \frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$$

$$\delta = \frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$$

$$\varepsilon = \frac{CEef}{(C-D)(D-E)}$$

……

§ 368

上节求出了分子 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$. 分母 $b,c,d,e,\cdots$由我们选定,我们选择整数的 $b,c,d,e,\cdots$,要求使得 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$为整数. 当然这以 $A,B,C,D,\cdots$为整数作前提. 假定这前提具备,下面逐行都取左得右

$b=1,\qquad \alpha=A,$

$c=A-B,\qquad \beta=B,$

$d=B-C,\qquad \gamma=AC,$

$e=C-D,\qquad \delta=BD,$

$f=D-E,\qquad \varepsilon=CE,$

……

即交错级数

$$x=A-B+C-D+E-F+\cdots,$$

可表示成连分数

$$x=\cfrac{A}{1+\cfrac{B}{A-B+\cfrac{AC}{B-C+\cfrac{BD}{C-D+\cfrac{CE}{D-E+\cdots}}}}}$$

§ 369

如果交错级数的每一项都是分数,例如

$$x=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{D}+\frac{1}{E}-\cdots$$

则 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\cdots$的值为

$$\alpha=\frac{b}{A}$$

$$\beta=\frac{Abc}{B-A}$$

$$\gamma=\frac{B^2cd}{(B-A)(C-B)}$$

$$\delta=\frac{C^2de}{(C-B)(D-C)}$$

$$\varepsilon=\frac{D^2ef}{(D-C)(E-D)}$$

$$\cdots\cdots$$

下面逐行都取左得右

$$b=A,\qquad \alpha=1$$

$$c=B-A,\qquad \beta=A^2$$

$$d=C-B,\qquad \gamma=B^2$$

$$e=D-C,\qquad \delta=C^2$$

$$\cdots\cdots$$

从而 x 化成的连分数为

$$x=\cfrac{1}{A+\cfrac{A^2}{B-A+\cfrac{B^2}{C-B+\cfrac{C^2}{D-C+\cdots}}}}.$$

例 1:化无穷级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

为连分数.

这里

$$A=1,B=2,C=3,D=4,\cdots$$

所给级数的值为 log2,我们得到

$$\log 2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\cfrac{25}{1+\cdots}}}}}}$$

例 2:化无穷级数

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots,$$

为连分数. π 表示直径为 1 的圆的周长.

依次取 $A,B,C,D,\cdots$ 为 $1,3,5,7,\cdots$ 我们得到

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots}}}}},$$

取倒数,得

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots}}}}$$

这是 *Lord Brouncker* 给出的圆周率，π 的表示式．

例 3:设给定的无穷级数为

$$x=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}-\frac{1}{m+3n}+\cdots$$

那么由

$$A=m,B=m+n,C=m+2n,\cdots$$

我们得到该级数化成的连分数为

$$x=\cfrac{1}{m+\cfrac{m^2}{n+\cfrac{(m+n)^2}{n+\cfrac{(n+2n)^2}{n+\cfrac{(m+3n)^2}{n+\cdots}}}}},$$

取倒数，得

$$\frac{1}{x}-m=\cfrac{m^2}{n+\cfrac{(m+n)^2}{n+\cfrac{(m+2n)^2}{n+\cfrac{(m+3n)^2}{n+\cdots}}}}$$

例 4: § 178 我们得到

$$\frac{\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\cdots$$

这里

$$A=m,B=n-m,C=n+m,D=2n-m,\cdots;$$

从而

$$\frac{\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\cfrac{1}{m+\cfrac{m^2}{n-2m+\cfrac{(n-m)^2}{2m+\cfrac{(n+m)^2}{n-2m+\cfrac{(2n-m)^2}{2m+\cfrac{(2n+m)^2}{n-2m+\cdots}}}}}}$$

§ 370

如果级数的项由逐项添加因式的乘积构成,即

$$x=\frac{1}{A}-\frac{1}{AB}+\frac{1}{ABC}-\frac{1}{ABCD}+\frac{1}{ABCDE}-\cdots,$$

则

$$\alpha=\frac{b}{A}$$

$$\beta=\frac{bc}{B-1}$$

$$\gamma=\frac{Bcd}{(B-1)(C-1)}$$

$$\delta=\frac{Cde}{(C-1)(D-1)}$$

$$\epsilon=\frac{Def}{(D-1)(E-1)}$$

$\cdots\cdots$

令

$b=A$;则 $\alpha=1$

$c=B-1$,则 $\beta=A$

$d=C-1$,则 $\gamma=B$

$e=D-1$,则 $\delta=C$

$f=E-1$,则 $\epsilon=D$

……

我们得到

$$x=\cfrac{1}{A+\cfrac{A}{B-1+\cfrac{B}{C-1+\cfrac{C}{D-1+\cfrac{D}{E-1+\cdots}}}}}$$

例 1:化 § 123 求得的级数

$$\frac{1}{e}=1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots$$

或

$$1-\frac{1}{e}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

为连分数.

这里

$$A=1,B=2,C=3,D=4,\cdots,$$

我们得到

$$1-\frac{1}{e}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\cdots}}}}}},$$

为摆脱开始部分的不规律,我们求得

$$\frac{1}{e-1}=\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\cdots}}}}}$$

例 2: § 134 得到,等于半径的弧,其余弦等于

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 12}-\frac{1}{2\cdot 12\cdot 30}+\frac{1}{2\cdot 12\cdot 30\cdot 56}-\cdots$$

我们化它为连分数.

这里

$$A=1,B=2,C=12,D=30,E=56,\cdots,$$

记所给级数为 x,则

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{11+\cfrac{12}{29+\cfrac{30}{55+\cdots}}}}},$$

或

$$\frac{1}{x}-1=\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{11+\cfrac{12}{29+\cfrac{30}{55+\cdots}}}}$$

§ 371

设级数的形状为

$$x=A-Bz+Cz^2-Dz^3+Ez^4-Fz^5+\cdots,$$

则

$$\alpha=Ab$$

$$\beta=\frac{Bbcz}{A-Bz}$$

$$\gamma=\frac{ACcdz}{(A-Bz)(B-Cz)}$$

$$\delta=\frac{BDdez}{(B-Cz)(C-Dz)}$$

$$\varepsilon=\frac{CEefz}{(C-Dz)(D-Ez)}$$

$$\cdots\cdots$$

令

$$b = 1, \text{则 } \alpha = A$$
$$c = A - Bz, \text{则 } \beta = Bz$$
$$d = B - Cz, \text{则 } \gamma = ACz$$
$$e = C - Dz, \text{则 } \delta = BDz$$
$$\cdots\cdots$$

从而

$$x = \cfrac{A}{1 + \cfrac{Bz}{A - Bz + \cfrac{Acz}{B - Cz + \cfrac{BDz}{C - Dz + \cdots}}}}$$

§ 372

为得到更一般些的结果,我们取

$$x = \frac{A}{L} - \frac{By}{Mz} + \frac{Cy^2}{Nz^2} - \frac{Dy^3}{Oz^3} + \frac{Ey^4}{Pz^4} - \cdots$$

与前面比较,得

$$\alpha = \frac{Ab}{L}$$
$$\beta = \frac{BLbcy}{AMz - BLy}$$
$$\gamma = \frac{ACM^2 cdyz}{(AMz - BLy)(BNz - CMy)}$$
$$\delta = \frac{BDN^2 deyz}{(BNz - CMy)(COz - DNy)}$$
$$\cdots$$

令

$$b = L, \qquad \text{则 } \alpha = A$$

$$c = AMz - BLy, \qquad 则\ \beta = BL^2 y$$
$$d = BNz - CMy, \qquad 则\ \gamma = ACM^2 yz$$
$$e = COz - DNy, \qquad 则\ \delta = BDN^2 yz$$
$$f = DPz - EOy, \qquad 则\ \epsilon = CEO^2 yz$$
……

所给级数化为连分数

$$x = \cfrac{A}{L + \cfrac{BL^2 y}{AMz - BLy + \cfrac{ACM^2 yz}{BNz - CMy + \cfrac{BDN^2 yz}{COz - DNy + \cdots}}}}$$

§ 373

最后取级数的形状为

$$x = \frac{A}{L} - \frac{ABy}{LMz} + \frac{ABCy^2}{LMNz^2} - \frac{ABCDy^3}{LMNOz^3} + \cdots$$

这时我们得到

$$\alpha = \frac{Ab}{L}$$
$$\beta = \frac{Bbcy}{Mz - By}$$
$$\gamma = \frac{CMcdyz}{(Mz - By)(Nz - Cy)}$$
$$\delta = \frac{DNdeyz}{(Nz - Cy)(Oz - Dy)}$$
$$\epsilon = \frac{EOefyz}{(Oz - Dy)(Pz - Ey)}$$
……

为得到整数值，我们取

$b = Lz$，从而 $\alpha = Az$

$c = Mz - By$,从而 $\beta = BLyz$

$d = Nz - Cy$,从而 $\gamma = CMyz$

$e = Oz - Dy$,从而 $\delta = DNyz$

$f = Pz - Ey$,从而 $\varepsilon = EOyz$

……

我们得到连分数

$$x = \cfrac{Az}{Lz + \cfrac{BLyz}{Mz - By + \cfrac{CMyz}{Nz - Cy + \cfrac{DNyz}{Oz - Dy + \cdots}}}},$$

或

$$\frac{Az}{z} - Ay = Lz - Ay + \cfrac{BLyz}{Mz - By + \cfrac{CMyz}{Nz - Cy + \cfrac{DNyz}{Oz - Dy + \cdots}}}$$

§ 374

用化级数为连分数的方法,可以得到无数个连分数,项数无穷,值已知.前几章讨论过的级数,其中一些就可以化为连分数,我们已经举了不少化级数为连分数的例子.反过来,连分数也可化为级数,级数的和,当然就是连分数的值.但我们还是需要一种方法,能直接算出连分数的值.因为很多级数,甚至是简单的级数,它们的和根本求不出,或者虽能求出,但太麻烦.

§ 375

值用别的方法易求,化成的级数,其和根本求不出,连分数

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

就是这样的.这个连分数分母都相等.用前面给出的化连分数为级数的方法,得分数序列

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, \cdots, \\ \frac{1}{0}, & \frac{0}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{5}, & \frac{5}{12}, & \frac{12}{29}, & \frac{29}{70}, \cdots. \end{array}$$

从该序列得级数

$$x=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 12}-\frac{1}{12\cdot 29}+\frac{1}{29\cdot 70}-\cdots,$$

两项两项合并,得

$$x=\frac{2}{1\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 29}+\frac{2}{29\cdot 169}+\cdots,$$

或

$$x=\frac{1}{2}-\frac{2}{2\cdot 12}-\frac{2}{12\cdot 70}-\cdots$$

又由

$$x=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot 2\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 5\cdot 12}-\frac{1}{2\cdot 12\cdot 29}+\cdots$$
$$+\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot 2\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 5\cdot 12}-\frac{1}{2\cdot 12\cdot 29}+\cdots$$

我们有

$$x=\frac{1}{4}+\frac{1}{1\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 12}+\frac{1}{5\cdot 29}-\frac{1}{12\cdot 70}+\cdots$$

虽然这个级数强收敛,但关于它的和,我们一无所知.

§ 376

我们考虑分母都相等或分母循环的连分数.这种连分数,按循

环节去掉开头若干项，其值不变．例如上一节的连分数

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

我们有

$$x=\frac{1}{2+x},$$

或

$$x^2+2x=1,$$

从而

$$x+1=\sqrt{2},$$

我们得到这个连分数的值为

$$\sqrt{2}-1$$

上节化这个连分数为级数的那个序列，它的分数越来越靠近本节得到的这个值，而且速度很快．用有理数逼近这个无理数，恐怕很难找到更快的方法．$\sqrt{2}-1$ 与$\frac{29}{70}$是很靠近的，

$$\sqrt{2}-1=0.41421356236,$$

而

$$\frac{29}{70}=0.41428571428,$$

误差是在十万分位上．

§ 377

连分数逼近 2 的方根$\sqrt{2}$，这速度之快我们看到了．下面我们看看它对另外一些数的方根的逼近，同样是很快的．

令

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cdots}}}}},$$

我们有

$$x=\frac{1}{a+x},$$

或

$$x^2+ax=1,$$

从而

$$x=-\frac{1}{2}a+\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}.$$

根据这一结果,就可以用连分数化成的分数去逼近方根$\sqrt{a^2+4}$,令 a 取 1,2,3,4,…,我们就可以逼近方根$\sqrt{5}$,$\sqrt{2}$,$\sqrt{13}$,$\sqrt{5}$,$\sqrt{29}$,$\sqrt{10}$,$\sqrt{53}$,….即

$$1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad \cdots$$

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \cdots=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$2,\quad 2,\quad 2,\quad 2,\quad 2,\quad 2,\quad \cdots$$

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{12},\ \frac{12}{29},\ \frac{29}{70},\ \cdots=\sqrt{2}-1$$

$$3,\quad 3,\quad 3,\quad 3,\quad 3,\quad 3,\quad \cdots$$

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{10},\ \frac{10}{33},\ \frac{33}{109},\ \frac{109}{360},\ \cdots=\frac{\sqrt{13}-3}{2}$$

$$4,\quad 4,\quad 4,\quad 4,\quad 4,\quad 4,\quad \cdots$$

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{17},\ \frac{17}{72},\ \frac{72}{305},\ \frac{305}{1292},\ \cdots=\sqrt{5}-2$$

……

须指出,a 的值越大逼近的速度越快.例如在我们列出的这最后一

行中

$$\sqrt{5}=2+\frac{305}{1292},$$

误差小于$\frac{1}{1292\cdot 5473}$，5473是下一个分数$\frac{1292}{5473}$的分母.

§ 378

上节方法只能求两平方之和的平方根，为推广到其它数，我们取

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cdots}}}}}}$$

这时

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+x}}=\frac{b+x}{ab+1+ax},$$

或

$$ax^2+abx=b,$$

从而

$$x=-\frac{1}{2}b\pm\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}}=\frac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2a}$$

有了该式，我们就可以求所有数的平方根. 例如，令 $a=2,b=7$，则

$$x=\frac{-14+\sqrt{14\cdot 18}}{4}=\frac{-7+3\sqrt{7}}{2}.$$

逼近这个 x 的分数序列为

2,7,2,7,2,7,…

$$\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{7}{15},\frac{15}{32},\frac{112}{239},\frac{239}{510},\cdots$$

从而近似地有

$$\frac{-7+3\sqrt{7}}{2}=\frac{239}{510},$$

或

$$\sqrt{7}=\frac{2024}{765}=2.6457516,$$

实际上

$$\sqrt{7}=2.64575131$$

误差是$\frac{3}{10000000}$.

§ 379

我们把循环节进一步扩大成三个数,取

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\cdots}}}}}}}$$

则

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+x}}}=\cfrac{1}{a+\cfrac{c+x}{bc+1+bx}}$$

$$=\frac{bx+bc+1}{(ab+1)x+abc+a+c},$$

或

$$(ab+1)x^2+(abc+a-b+c)x=bc+1,$$

从而

$$x=\frac{-abc-a+b-c+\sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ab+1)}.$$

根号下又是两平方之和，同于第一种情形. 类似地，扩大循环节成四字母 a,b,c,d，效果同于含两字母的第二种情形. 类推.

§ 380

连分数既然可以用来求平方根，事实上就是它可以用来解二次方程. 我们进行的几个开平方运算，那里的 x 就都是一个二次方程的根. 反过来，我们也可以把二次方程的根表示成连分数. 设二次方程为

$$x^2=ax+b$$

则

$$x=a+\frac{b}{x}.$$

把分母 x 换成我们求得的 x，得

$$x=a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{x}},$$

再换，继续下去，就得到 x 的无穷连分数表达式

$$x=a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cdots}}},$$

但是这个连分式用起来不方便，因为分子不是 1.

§ 381

连分数在算术中有着应用. 首先分数都可以化成连分数. 设分

数为

$$x=\frac{A}{B}$$

这里 $A>B$.用 B 除 A,记商为 a,记余数为 C;再用余数 C 除除数 B,记商为 b,记余数为 D;接下去,用余数 D 除除数 C;将这用余数除除数的过程继续下去,到余数为零停止.事实上这是计算 A,B 最大公因数的算法,可以写成

$$\begin{aligned}
&B|\underline{A}=a\\
&\quad C|\underline{B}=b\\
&\qquad D|\underline{C}=c\\
&\qquad\quad E|\underline{D}=d\\
&\qquad\qquad F\cdots
\end{aligned}$$

根据除法性质我们有

$$A=aB+C,\text{从而}\frac{A}{B}=a+\frac{C}{B},$$

$$B=bC+D,\text{从而}\frac{B}{C}=b+\frac{D}{C},\frac{C}{B}=\frac{1}{b+\frac{D}{C}},$$

$$C=cD+E,\text{从而}\frac{C}{D}=c+\frac{E}{D},\frac{D}{C}=\frac{1}{c+\frac{E}{D}},$$

$$D=dE+F,\text{从而}\frac{D}{E}=d+\frac{F}{E},\frac{E}{D}=\frac{1}{d+\frac{F}{E}},$$

……

自上而下逐级代入,得

$$x=\frac{A}{B}=a+\frac{C}{B}=a+\frac{1}{b+\frac{D}{C}}=a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{E}{D}}}$$

最后 x 可用求得的商 $a,b,c,d,\cdots$ 表示成

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \cdots}}}}}$$

例 1: 化分数$\frac{1461}{59}$成分子都为 1 的连分数. 先进行求 1461 和 59 的最大公约数的运算

```
59 |1461 = 24
   |118
     281
     236
      45|59 = 1
        |45
         14|45 = 3
           |42
             3|14 = 4
              |12
                2|3 = 1
                 |2
                  1|2 = 2
                   |2
                    0,
```

由此我们得到

$$\frac{1461}{59} = 24 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}.$$

例 2: 小数可以化成分数, 因而也可以化成连分数. 我们化

$$\sqrt{2} = 1.41421356 = \frac{141421356}{100000000}$$

为连分数, 先进行求最大公约数运算

100000000	141421356	1
82842712	100000000	2
17157288	41421356	2
14213560	34314576	2
2943728	7106780	2
2438648	5887456	2
505080	1219324	2
418328	1010160	2
86752	209164	

……

我们看到,化成的连分数,分母将都是 2,即

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}}$$

这是我们已经知道了的.

例 3:数 e 是一个特别值得注意的数,它的自然对数为 1,它的值为

$$e=2.718281828459.$$

我们化

$$\frac{e-1}{2}=0.8591409142295.$$

为连分数.先进行求最大公约数运算

8591409142295	10000000000000	1
8451545146224	8591409142295	6
139863996071	1408590857704	10
139312557916	1398639960710	14
551438155	9950896994	18
550224488	9925886790	22
1213667	25010204	

……

继续下去,我们得到商

$$1,6,10,14,18,22,26,30,34,\cdots,$$

从第二个开始,这商构成算术级数.由此我们得到

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}$$

这一结果可由无穷分析给以证实.

§ 382

小数可写为分数,分数可化为连分数,从连分数我们可以得到一个分数序列,序列中分数近似于这连分数,当然也近似于这小数. *J. Wallis* 讨论过用分子分母更小的分数去近似给定的分数.我们的方法得到的结果最好,最好的含意是,分子分母如不加大,这结果最接近给定分数.

例 1:求直径与圆周之比,求得的比,如果分子分母不加大,应

该是最精确的.从小数 3.1415926535…用辗转相除法得到的商所成序列为

3,7,15,1,292,1,1,…

由该序列构成的分数为

$$\frac{1}{0},\frac{3}{1},\frac{22}{7},\frac{333}{106},\frac{355}{113},\frac{103993}{33102},\cdots$$

第二个分数给出直径与圆之比为 1:3,如果分子分母不加大,这当然是最精确的近似;第三个分数给出阿基米德比 7:22;第五个分数给出的是 *Adrianus Metius* 比,其误差比$\frac{1}{113\cdot 33102}$还小.提一句,序列中的分数比真值大比真值小是交替的.

例 2:用最小的数表示一天与一个平均太阳年的比.一年是 365 天 5 小时 48 分 55 秒.写成分数,一年是

$$365\frac{20935}{86400}$$

天.我们关心的只是这分数.它给出的商序列为

4,7,1,6,1,2,2,4,

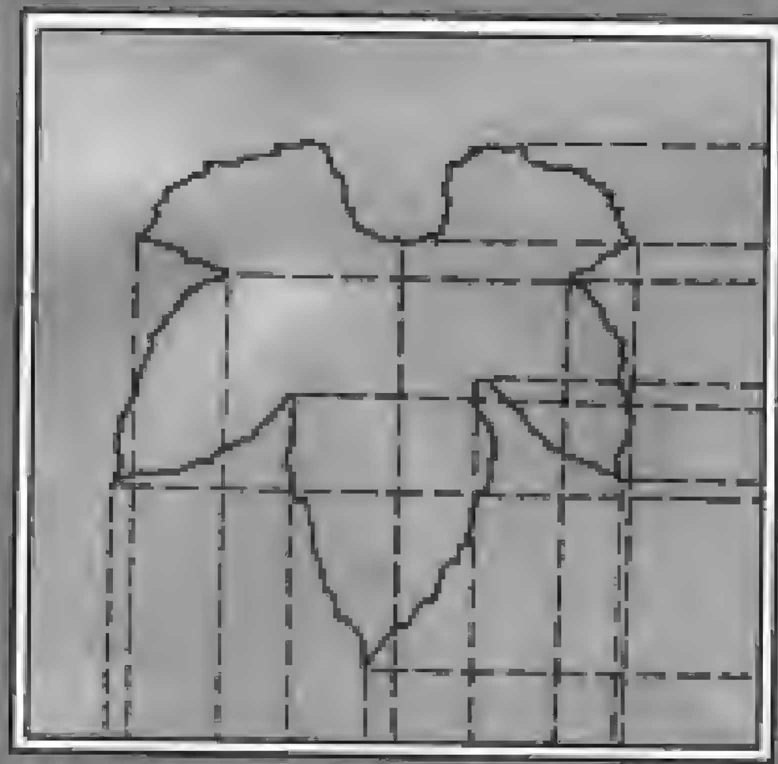
由此得到的分数序列是

$$\frac{0}{1},\frac{1}{4},\frac{7}{29},\frac{8}{33},\frac{55}{227},\frac{63}{260},\frac{181}{747},\cdots$$

每年比 365 天多出 5 小时 48 分 55 秒,第二个分数告诉我们,每 4 年多出约一天,儒略历就是这样的,4 年一闰,400 年 100 闰.精确些取第四个分数,是每 33 年多出 8 天.再精确些,取第七个分数,是每 747 年多出 181 天,照此计算,每 400 年多出 97 天,格列历(即公历)就是这样的,它把儒略历 400 年中的 3 个闰年改成了平年,即 400 年 97 闰.

无穷分析引论

（下）



山西教育出版社

无穷分析引论

（下）

欧拉 著
张延伦 译

山西教育出版社

社　　长　任兆文
总 编 辑　左执中
责任编辑　王玉成
装帧设计　王俊彦

无穷分析引论

欧　拉　著　张延伦　译

*

山西教育出版社出版发行(太原并州北路69号)
太原市新华胶印厂印刷

*

开本:850×1168　1/32　印张:27　字数:671千字
1997年1月第1版　1997年1月山西第1次印刷
印数:1—1000册

*

ISBN　7—5440—0960—2

G·961　定价:(上、下)28.40元

英译者序(摘译)

1748年版时,这套书的序言只印在上册,为方便读者,英译本将原序中与下册有关的部分摘印于下册.

上册英译本受到的欢迎使笔者加紧了下册的翻译,本人很荣幸能够效力于这部著名教科书英译本的出版,希望欧拉的思想在数学界深受喜爱、广为传播.

作 者 序

接触到的学生,他们学习无穷分析之所以遇到困难,往往是由于初等代数准备不足.虽然无穷分析并不要求初等代数的全部知识和技能,但有些必备的东西,初等代数或者完全没讲,或者讲得不够详细.本书力求把这类东西讲得既充分又清楚,求得完全弥补初等代数对无穷分析的不足.书中把相当多的难点化易,使得读者逐步地、不知不觉地掌握到无穷这一思想,有很多通常归无穷分析处理的问题,本书使用了代数方法,这清楚地表明了分析与代数两种方法之间的关系.

本书分上、下两册,上册讲纯分析,下册讲必要的几何知识,这是因为无穷分析的讲解常常伴以对几何的应用.别的书中都讲的一般知识本书上、下册都不讲.本书所讲的是别处不讲,或讲得太粗的,或虽讲但所用方法完全不同的.

……

下册讨论的问题,一般地说都属于高等几何.一般教科书讲这一部分时都从圆锥曲线开始,本书先讲曲线的一般理论,再讲圆锥曲线,为的是能够应用曲线理论去研究任何一种曲线.本书利用描述曲线的方程,而且只用这种方程来研究曲线,曲线的形状和基本性质都从方程推出.我觉得这种处理方法的优越性,在圆锥曲线上表现得最突出.此前人们用几何或分析方法进行处理,都显生硬,不自然.我们先从二阶曲线的通用方程推出了二阶曲线的一般性

质，接下去根据有无伸向无穷的分支，也即是否界于某个有限区域之中，对二阶线进行了分类．对于无穷分支，我们进一步考虑分支的条数，并考虑各条分支有无渐近线．这样我们得到了通常的三种圆锥曲线．第一种是椭圆，它位于一个有限区域之中；第二种是双曲线，它有四条伸向无穷的分支，趋向两条渐近线；第三种是抛物线，有两条伸向无穷的分支，没有渐近线．

接下去，对三阶线用类似的方法，阐述了其一般性质，并将它分为16类，事实上是把牛顿的72种划分成了16类．对这一方法我们的描述是充分的，不难用它对更高阶曲线进行分类．书中用它对四阶曲线进行了分类．

在分阶进行考察之后，我们转向了寻求曲线的共同性质，讲了曲线的切线和法线，也讲了用密切圆半径表示的曲率．这些问题现在一般都用微积分来解决，但本书只在通常代数的基础上对它们进行讨论，为的是使读者能够比较容易地从有穷分析过渡到无穷分析．我们也对曲线的拐点、尖点、二重点和多重点进行了讨论，讲了如何从方程求出这些点，求法都不难，但我不否认用微分学的方法来求更容易．我们也讲到了关于二阶尖点这个有争论的问题．二阶尖点，即有同朝向的两段弧收敛于它的尖点．我们讨论的深入程度不越出看法一致的范围．

我加写了几章，用来讨论具有某些性质的曲线的求法，最后给出了与圆有关的几个问题的解．

作为学习分析的必备知识，我们添上了一个关于曲面的附录，讲了如何用三元方程表达曲面的性质，然后照曲线那样，根据方程的阶将曲面分了类，并证明了只有一阶曲面才是平面．根据伸向无穷的部分将二阶曲面分成了六类，对更高阶的曲面也可以用类似的方法进行分类，我们通过方程对两个曲面的交线进行了讨论，交线多数都不在一个平面上．

这里申明一点，书中很多东西是别人已经得到了的，恕我没有

一一指出.本书力求简短,如果加上关于问题历史的说明,那将突破本书的篇幅限制.作者可聊以自慰的是,本书对别人已经得到了的东西,其中很多是用另一种方法进行讨论的.很希望广大读者从方法新和全新的东西中,特别是从全新的东西中得到益处.

目　　录

附录　关于曲面

第一章

曲线概述

§ 1

通常视变量为可以取一切值的量，因而几何上用无穷直线(这



图 1

里记为 RS，见图 1)表示变量. 在无穷直线 RS 上取定一个点 A，拿 A 作为 RS 上一切量的起始点，则线段 AP 的长度就是变量的一个确定的值，不同的 AP 表示变量的不同的值，整个的 RS 表示变量的一切值.

§ 2

设无穷直线 RS 表示的变量为 x，那么 RS 上的线段就可以表示 x 的每一个确定的值. 例如，取点 A 作 P，则这长度为零的线段 AP 就表示 $x=0$ 这个值，点 P 离点 A 越远，线段 AP 表示的 x 值越

大.

线段 AP 的长为横标,横标表示变量 x 的确定的值.

§ 3

由于无穷直线 RS 从点 A 向左向右都伸向无穷远,所以 x 的正值负值它都可以表示.如果取右侧的 x 为正,那么左侧的线段 AP 就表示负的 x.事实上,点 P 离开 A 右移时线段 AP 增长,它所表示的 x 值增大,反之,点 P 左移,则 x 值减小;当点 P 与 A 重合时,x 值为零;点 P 继续左移时,x 值将小于零,为负,也即,取 A 点右侧的 AP 为正,则左侧的 AP 为负,也可以取左侧为正,那么右侧就为负.

§ 4

我们来看看,用无穷直线表示变量 x 的时候,几何上 x 的函

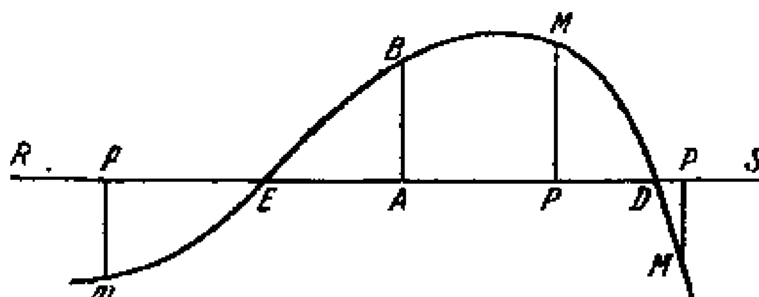


图 2

数怎样表示.设 y 是 x 的一个函数,那么当 x 为一个确定值时,我们得到一个确定的 y 值.用无穷直线 RAS(见图 2)表示 x 值,并假定 RS 上方的 y 值为正,RS 上的 y 值为零,RS 下方的 y 值为负,那么,对 AP 确定的每一个 x,我们引 RS 的垂线 MP,使线段 MP 等于

对应的 y，当 y 值为正时，垂线 MP 在 RS 上方，y 值为负时，PM 在 RS 下方．

§ 5

图 2 所表示的这个函数，$x=0$ 时，$y=AB$，$x=AP$ 时，$y=PM$，$x=AD$ 时，$y=0$．$x=AP$ 时，如果 y 的值为负，则垂线 PM 在直线 RS 下方，x 为负值时类似，y 值为正，则用 RS 上方的垂线表示它，y 值为负，则用 RS 下方的垂线，例如 Pm 表示它．如果对某个 x 值，例如 $x=AE$，函数 $y=0$，则垂线长为零．

§ 6

上述方法使 RS 上的每一个点 P 都有一个对应点 M，AP 为一个 x 值，PM 垂直于 RS，且 PM 的长等于 AP 所表示的那个 x 所对应的 y 值．点 M 的位置：y 为正时，在 RS 上方；y 为负时，在 RS 下方；y 为零时，在 RS 上，即 P、M 重合，图 2 上，点 D 和 E 处，P 和 M 是重合的．点 M 全体构成一条直线或曲线，这直线或曲线由函数 y 决定．x 的任何一个函数 y，我们都可以用这样的方法把它变成几何上的一条直线或曲线，这线的性质由函数决定．

§ 7

由函数 y 我们可以确定对应曲线上的每一点，从而确定整个曲线．曲线上对应于 P 的点 M 随 PM 的确定而确定．我们可以这样确定曲线上的每一点．反之，对于曲线上的每一点 M，直线 RS 上都有一个点 P 与它对应．过曲线上点 M 引纵标，记垂足为 P，这 P 就是 M 的对应点，这线段 AP 的长就是 x，纵标 PM 的长就是 y

的值，即曲线上的点都由函数 y 确定.

§ 8

让一个点机械地连续运动，可以画出很多不同的线. 每做一次这样的运动都得到一条完整的具体的曲线. 但我们主要考虑由函数产生的曲线，这种曲线更适于解析处理，更适于微积分. x 的任何一个函数都给出一条线，直线或曲线. 反之，每条线也都决定一个函数. 可见，我们研究的任何一条曲线，其性质都由这样的一个函数确定：从曲线上任意一点 M 向直线 RS 引纵标 MP，则数值等于线段 AP 之长的 x 所对应的函数值 y 应该为纵标 MP 的长.

§ 9

从上面对曲线的描述看得出，可将曲线分为连续的和不连续的. 不连续的也称为混合的，连续曲线可以用 x 的一个确定的函数表示. 如果曲线的不同部分，如 BM，MD，DM 等由不同的函数确定，比如 BM 部分由一个函数确定，而 MD 部分由另一个函数确定，等等，则称它为不连续的，或者混合的，或者不规则的. 不连续曲线不由一个单一的规律构成，而是由几个连续部分合成.

§ 10

几何主要讲连续曲线. 后面我们将证明：依某种不变规则机械地运动，这样画出的曲线都可用一个函数表示，也即都是连续曲线. 设 $mEBMDM$ 是可以用 x 的函数 y 表示的连续曲线，那么在直线 RS 上取定了 AP 表示的 x，则 y 的值就等于纵标 PM 的长.

§ 11

在曲线的这样的定义之下，曲线方程中极常用的几个术语都可继续使用，首先称表示 x 的直线为轴或笛卡尔直线.

称 x 值的起始点为原点，称轴上表示 x 确定值的那一部分，即 AP 为横标. 从横标端点 P 垂直于轴画到曲线的直线 DM 叫纵标，也称纵标为直角线，因为它与轴成直角. 也可以取纵标与轴成斜角，那时的纵标也称为斜角线. 只要不特别声明，我们都采用直角纵标.

§ 12

这样，记横标 AP 为 x，即 $AP = x$，则函数 y 告诉我们纵标 PM 的大小，即 $PM = y$. 连续曲线的性状都由一个函数 y 表示，即都由 y、x 和常数的一个关系式表示. 轴 RS 上的 AS 部分表示正横标，AR 部分表示负横标，RS 上方为正纵标区域，RS 下方为负纵标区域.

§ 13

由 x 的任何一个函数我们也都得到一条连续曲线，事实上，先让 x 取从 0 到 ∞ 的所有正值，求出对应于每一个 x 的 y 值，并用纵标表示出来. y 为正时纵标在轴的上方，为负时在轴的下方. 这样我们就得到了曲线的 BMM 部分. 然后让 x 取从 0 到 $-\infty$ 的所有负值，则对应的 y 值确定曲线的 BEm 部分. 两部分合起来就是函数描述的整个曲线.

§ 14

由 y 是 x 的函数知，或 y 为 x 的显函数，或 y 与 x 由一个方程相联系. 总之，每条曲线都可以由变量 x 和 y 所构成的方程表示. x 是轴上的横标，从原点 A 算起，y 是垂直于轴的纵标. 纵标横标总称为直角坐标. 因而可以说曲线的性质由坐标方程决定.

§ 15

这样我们就把对曲线的研究归结成了对函数的研究. 因而可以根据函数对曲线进行分类. 曲线也首先分为代数的和超越的，纵标 y 是横标 x 的代数函数时，曲线是代数的，也即曲线的性质由坐标 x 和 y 的代数方程表示的时候，称它为代数曲线. x 和 y 构成超越方程，或者 y 是 x 的超越函数，这时的曲线叫超越曲线. 这样我们就把曲线分成了代数的和超越的两大类.

§ 16

从 x 得 y，从 y 得曲线，因而为了考察曲线，我们应该考虑这函数是单值的还是多值的. 先假定 y 是 x 的单值函数，也即 $y = P$，P 是 x 的某个单值函数. 这样对每一个确定的 x 值我们都得到一个确定的 y 值，也即每一个横标都对应于一个纵标. 从而得到曲线的形状是：对轴 RS 上的任意一点 P，过 P 垂直于 RS 的直线 PM 都与曲线相交，并且只交于一点 M. 这样一来，轴上的每一点都对应曲线上一点，而轴两面伸向无穷，所以曲线也两面伸向无穷. 换句话说，从单值函数得到的曲线，随 x 轴两面无间断地伸向无穷，图 2 所示曲线 $EBMDM$ 就是两面无间断地伸向无穷的.

§ 17

设 y 为 x 的二值函数，或者 P, Q 表示 x 的单值函数，$y^2 = 2Py - Q$，从而 $y = \pm\sqrt{P^2 - Q}$，那么每一个横标 x 将对应两个纵标 y. 这两个纵标，或者同为实数，或者同为虚数. $P^2 > Q$ 时同为实数，$P^2 < Q$ 时同为虚数，因而当两个 y 值都为实数时，横标 AP 对应两个纵标 PM, PM，也即过 P 点与轴垂直的直线交曲线于 M 和 M 两点. 如果 $P^2 < Q$，则没有纵标与横标对应，也即过点 P 垂直于横轴

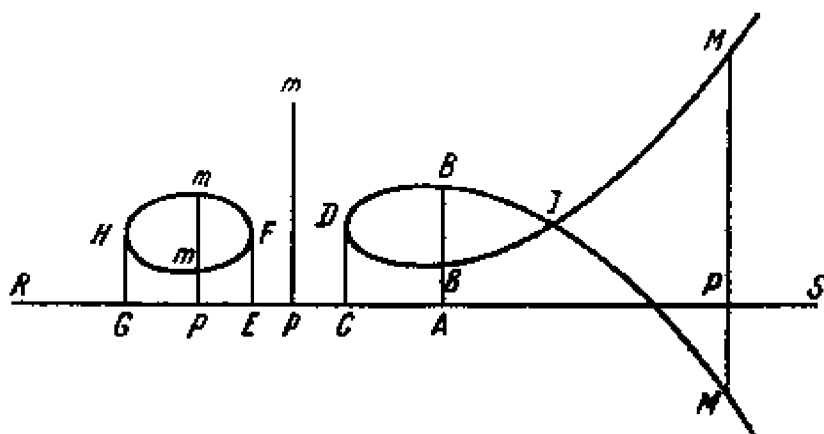


图 3

的直线同曲线不相交. 图 3上点 P 处就是这样. 由于从 $P^2 > Q$ 不能越过实与虚的衔接点 $P^2 = Q$ 变为 $P^2 < Q$，因而在实纵标结束点处，如 C 和 G，必 $y = P \pm 0$，也即两个纵标相等，曲线向相反的两个方向弯曲.

§ 18

从图 3 上我们看到，当负的横标 $-x$ 在 AC 和 AE 之间时，纵标是虚的，此时 $P^2 < Q$. 如果 E 点继续左移，纵标将重新变为实数

(但不能越过使 $Q^2 = P$ 的点 E,点 E 处两个纵标相等),又重新是横标 AP 对应两个纵标 Pm 和 Pm,到 G 又两个纵标相等,过 G 纵标再次变为虚数.可见这种曲线是由彼此分离的两部分,如 $MBDBM$ 和 $FmHm$ 或更多部分组成.但是应该认为作为总体来研究的这几部分共同构成一条连续的或规则的曲线,因为不同部分产生于同一个函数.可见这种曲线具有如下的性质:过横轴上一点引垂直于横轴的直线 MM,则 MM 与曲线或者不相交,或者相交于两点,两点重合处,如 D,F,H 和 I 处例外.

§ 19

如果 y 是 x 的三值函数,也即如果 y 由状如

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$$

的方程决定,其中 P,Q,R 是 x 的单值函数,那么对每一个横标 x,纵标 y 将有三个值.这三个值或者全实,或者一实两虚.因此这纵标线与曲线必定或者相交于三点,或者只相交于一点,两点重合处例外.可见每一个横标至少对应于一个实纵标,这意味着曲线随 x 轴一起向两面无穷延伸,因而这曲线或者由一根连续曲线构成,如图 4,或者由分离的两部分构成,如图 5,或者由更多部分构或.

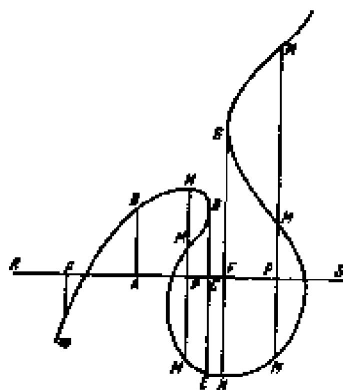


图 4

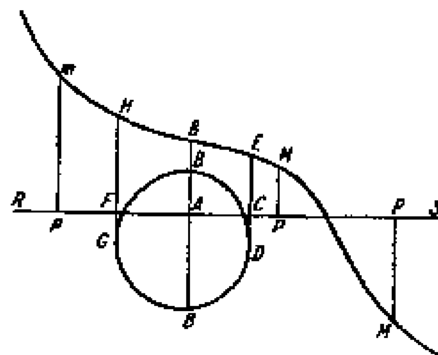


图 5

§ 20

如果 y 是 x 的四值函数,也即如果 y 由方程

$$y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = 0$$

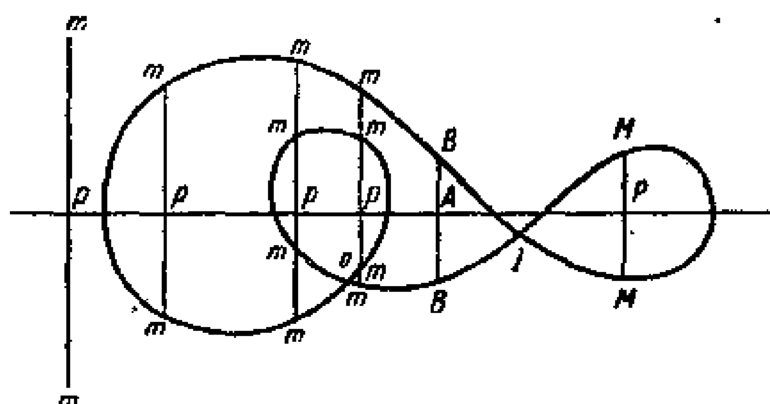


图 6

确定,那么每一个 x 值所对应的实 y 值,都或者为 4 个,或者为 2 个,或者为零个,因而,纵标与这种函数所形成的曲线的交点个数,或为 4,或为 2,或为零. 这几种情形图 6 上都有. 应该指出 I 和 O 两处,那里两个交点重合,可见向左向右至无穷这曲线的分支个数都或为零,或为 2,或为 4. 分支个数为零时,曲线的向左向右部分都不产生伸向无穷的分支,曲线两面都封闭,被局限在某个区域之内,值数更多的函数,其曲线的性质都可以用这种方法进行讨论.

§ 21

当 y 为 n 值函数,即 y 由最高次数为 n 的方程确定时,y 的实值个数或为 n,或为 $n-2$,或为 $n-4$,或为 $n-6$,等等. 纵标线与曲线的交点个数同于 y 的实值个数. 这样一来,如果一根纵标线与连续曲线的交点个数为 m,那么任一纵标线与这条曲线的交点

个数同 m 的差都为偶数.即此时纵标线与曲线交点的个数不能是 $m+1$,$m-1$ 或 $m\pm3$ 等等.纵标线与同一曲线的交点个数必定同为奇数或同为偶数.也即知道了一根纵标线与曲线交点个数的奇偶,也就知道了全体纵标线与曲线交点个数的奇偶.

§ 22

这样,如果一根纵标线与曲线的交点个数为奇数,那么就不存在与该曲线无交点的纵标线,即曲线在每一面都至少有一条伸向无穷的分支.如果这时在某一面有多条伸向无穷的分支,那么这分支条数也必为奇数,因为这时纵标线与曲线的交点个数不能为偶数.这时两面伸向无穷的分支条数的和为偶数.当纵标线与曲线交点个数为偶数时,每面伸向无穷的分支数,或为零,或为 2,或为 4,等等.两面伸向无穷的分支数的和也为偶数.

以上我们介绍了连续的规则曲线的重要性质,可用来区别间断的不规则曲线.

第二章

坐 标 变 换

§ 23

给定一个关于坐标 x, y 的方程,那么取一条直线 RS 作轴,并在 RS 上取一个点 A 作原点,我们就可以像图 2 那样把这个方程描述的曲线画出来.反之,有了画出的曲线,我们就可以列出描述这曲线性质的坐标方程.但是列这个方程时有两个东西是随意的:RS 本身的位置和原点 A 在 RS 上的位置.位置有无穷多种取法,因而对应于这同一条曲线的方程也就有无穷多个.可见方程不同,曲线不一定不同,但曲线不同,方程一定不同.

§ 24

改变轴的位置,改变原点在轴上的位置,都可以得到描述同一条曲线性质的无穷多个方程.这些方程是相联系的,由其中任何一个都可以推出其他.事实上,当坐标方程已知,它所描述的曲线已经画出时,任取一条直线作轴,在取定的轴上任取一点作原点,我

们都可以推出曲线对所取轴的坐标方程.本章我们讲从一条曲线的一个方程求这条曲线关于另一个轴、另一个原点的另一个方程的方法.用这种方法可以求出一条曲线的所有方程.这种方法还可用来判断不同方程所给曲线是否相同.

§ 25

给定一个 x,y 的方程,如图 7,取直线 RS 作轴,取点 A 作原点,用 x 表示横标 AP,用 y 表示纵标 PM,那么根据方程我们就可以画出它所描述的曲线 CBM.先保持轴 RS 不变,取 RS 上异于 A 的点 D 作原点,记点 M 在新原点下的横标 DP 为 t,纵标 PM 依旧为 y 不变,现在我们要进行的是,求出曲线 CBM 关于 t,y 的方程.记线段 $AD=f$,这里的 D 在 A 点左侧,AD 在原来的负横标区,$DP=t=f+x$,从而 $x=t-f$,以 $t-f$ 替换关于 x,y 的方程中的 x,我们就得到描述同一条曲线 CBM 的关于 t,y 的方程.由于 $AD=f$ 可以任取,所以我们已经得到了无穷多个方程,它们都描述同一条曲线.

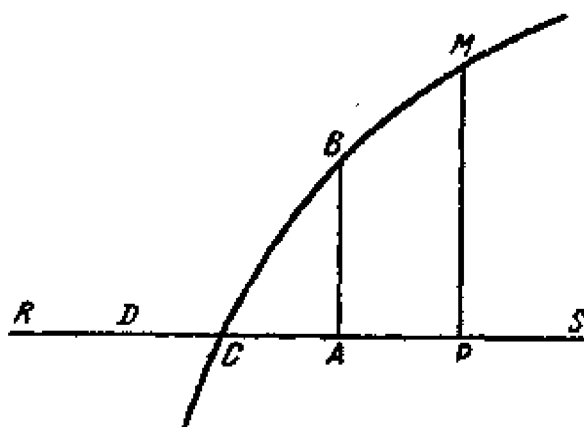


图 7

§ 26

设曲线交轴 RS 于某一点,比如 C,如果取这个 C 作原点,则横标 $CP=0$ 时,纵标也为零,当然这里假定点 C 只对应一个纵标,

曲线与轴的交点,包括点 C,都可以从曲线的方程求得,方法是:置曲线方程中的 y 为零,得 x 的方程,这 x 的方程的解就是曲线与轴的交点,曲线与轴相交处 y 为零,因而令 $y=0$,解方程就得到曲线与轴的所有交点.

§ 27

加大或减小横标 x,也即以 $x-f$ 替换 x,则原点移动,新的原点 D 在 A 点左侧时 f 为正,在 A 点右侧时 f 为负.

记 $AP=x$, $PM=y$ 则方程给出的曲线为 LBM(参见图 8). 原点左移之后,我们再将轴平行下移,取平行于原轴 RS 的 rs 为新轴,取新轴 rs 上的 D 点为新原点,新轴在原纵标的负值区域中,与原轴的距离 $AF=g$,取 $DF=AG=f$,记新轴时曲线上点 M 的横标 $DQ=t$,纵标 $QM=u$,则

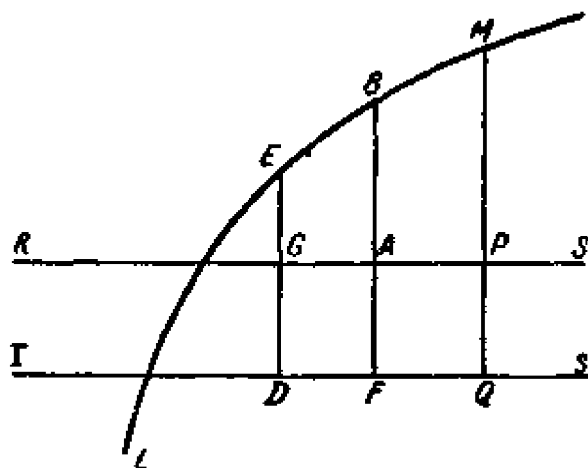


图 8

$$t=DF+FQ=f+x,\quad u=PM+PQ=g+y,$$

从而

$$x=t-f,\quad y=u-g.$$

将所给方程中的 x 和 y 换为 $t-f$ 和 $u-g$,得到关于 t,u 的方程,它描述的也是所给曲线.

§ 28

f,g 都任取,取法都无穷,因而不同方程的个数比只移动原点又多一层无穷,它们描述的全都是同一条曲线.我们看到,两个方程,一个是关于 x,y 的,一个是关于 t,u 的,它们虽然不同,但一个是另一个坐标增大、减小的结果.这样的两个方程描述的曲线是同一条,用这样的方法可以得到描述同一条曲线的无穷多个不同方程.

§ 29

使新轴 rs 与旧轴 RS 交于原点 A,且相垂直,即新旧轴相垂直,且原点重合(见图 9).轴为 RS 时,曲线 LM 的方程是关于横标 $AP=x$ 和纵标 $PM=y$ 的.从曲线上的点 M 向新轴 rs 引垂线 MQ,记新横标 $AQ=t$,新纵标 $QM=u$,由 $APMQ$ 为矩形,得 $t=y,u=x$.这样,将原方程中的 x 换成 u,y 换成 t,就得到关于 u 和 t 的方程,也即原来的横标 x 变成了现在的纵标 $QM=u$,原来的纵标 y 变成了现在的横标 $AQ=t$.换成新轴,方程不变,只是横标纵标互换,而纵标横标统称为坐标,可以不加区别,不指明谁纵谁横,给定一个 x,y 的方程,取 x 还是取 y 为横标,曲线是一样的.

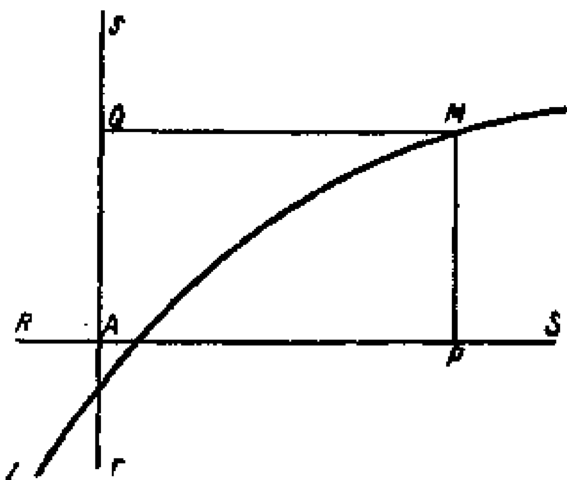


图 9

§ 30

上节我们假定新轴 rs 的 As 部分为正横标，轴 rs 的右侧为正纵标区域，这正负的选择是任意的，如果取轴的 Ar 部分为正横标，则 $AQ = -t$，应该用 $-t$ 代替 x，y 方程中的 y. 继而，如果取 rs 轴的右侧为负纵标区，则应该用 $-u$ 代替 x. 可见，坐标方程中的一个或两个坐标都变成负的，曲线的性质不变. 请注意，对方程的所有变换都是这样.

§ 31

设新轴 rs 与旧轴 RS 相交成某个角 SAs，交于原点 A，新轴也

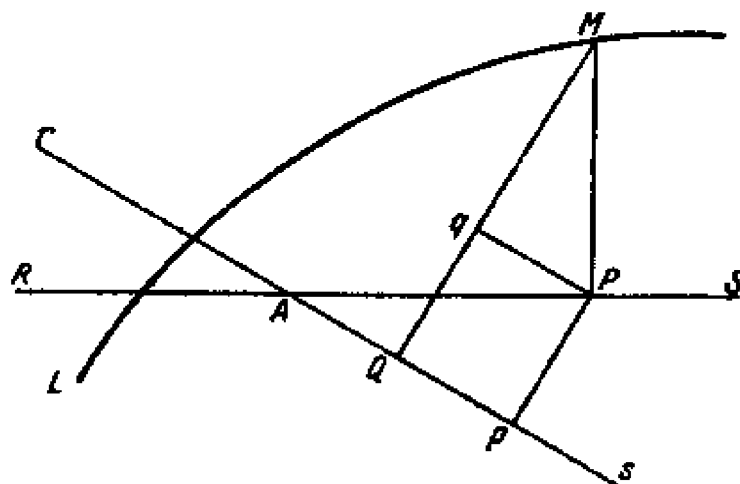


图 10

取 A 为原点，即新旧原点重合(见图 10)，又设对旧轴 RS，曲线 LM 关于横标 $AP = x$ 和纵标 $PM = y$ 的方程已给，现在我们要从这根曲线关于旧轴 RS 的方程，求出它关于新轴 rs 的方程. 从曲线上的点 M 向新轴引垂线 MQ，我们寻求的是关于横标 $AQ = t$ 和纵标

$MQ = u$ 的方程.设角 $SAs = q$,$\sin q = m$,$\cos q = n$,则 $m^2 + n^2 = 1$.从点 P 向新坐标线引垂线 Pp 和 Pq,由 $AP = x$

得

$$Pp = x\sin q, AP = x\cos q;$$

由角 $PMQ = PAQ = q$, 以及 $PM = y$, 得

$$Pq = Qp = y\sin q, Mq = y\cos q.$$

从而

$$AQ = t = Ap - Qp = x\cos q - y\sin q,$$
$$QM = u = Pp + Mq = x\sin q + y\cos q.$$

§ 32

由 $\sin q = m$,$\cos q = n$, 得

$$t = nx - my, \quad u = mx + ny,$$

从而

$$nt + mu = n^2x + m^2x = x,$$
$$nu - mt = n^2y + m^2x = y.$$

这样一来,将 x,y 方程中的 x 换为 $mu + nt$,y 换为 $nu - mt$,就得到我们所要的 t,u 的方程.这里轴 rs 的 As 部分为正的横标部分,纵标线 QM 所在部分为正的纵标部分.这里还假定了角 SAs 在负的纵标部分,如果 As 在 AS 的上方,那么计算时应取角 $SAs = q$ 为负.

§ 33

考虑新轴 rs 和新轴上原点 D 的位置都任意的情形(参见图11).设曲线 LM 关于旧轴 RS 的以横标 $AP = x$ 和纵标 $PM = y$ 为变量的方程已知,我们要进行的是,从 LM 的已知方程求出 LM 的关

图 11

于新轴 rs 的以 t 和 u 为变量的方程. 从曲线上任意一点 M 引新轴的垂线 MQ,分别记横标 DQ 和纵标 QM 为 t 和 u. 为了求出以 t,u 为变量的方程,我们从新的横标原点 D 向旧轴引垂线 DG,记 $AG=f$,$DG=g$. 再过点 D 引旧轴 RS 的平行线 DO,O 为 DO 与旧纵标线 PM 延长线的交点. 这样我们有

$$MO=y+g,\ DO=GP=x+f.$$

最后,记角 $ODQ=q$,记 $\sin q=m$,$\cos q=n$,则 $m^2+n^2=1$.

§ 34

从点 O 分别向新轴和纵标线 MQ 引垂线 Op 和 Oq. 由角 $OMQ=ODQ$ 和 $DO=x+f$,$MO=y+g$,得

$$Op=Qq=(x+f)\sin q=mx+mf,$$

$$Dp=(x+f)\cos q=nx+nf,$$

和

$$Oq = Qp = (y+g)\sin q = my + mg,$$
$$Mq = (y+g)\cos q = ny + ng.$$

从而

$$DQ = t = nx + nf - my - mg,$$
$$QM = u = mx + mf + ny + ng,$$

进而利用 $m^2+n^2=1$ 得

$$nt + mu = x + f,\ nu - mt = y + g,$$

由此得

$$x = mu + nt - f,\ y = nu - mt - g.$$

将这 x 和 y 代入以 x,y 为变量的方程,我们就得到曲线 LM 的以 t,u 为变量的方程.

§ 35

曲线 LM 所在平面的任何一根轴 rs 都是图 11 的特例,因而 LM 的坐标间方程无例外地全都包含在我们所求出的 t,u 间的方程之中. f,g 和决定 m,n 的角的取法都无穷,即我们所求出的 t,u 间方程所含方程个数无穷,它们都描述曲线 LM. 因此称我们求出的 t,u 间方程为曲线 LM 的通用方程,因为它包含曲线 LM 的一切方程.

§ 36

从前而所讲我们看到,不同方程描述的曲线可以是同一条. 两个方程描述的是否为同一条曲线,怎样判断呢? 这里我们讲一种判断方法. 设两个方程,第一个是 x,y 间的,第二个是 t,u 间的,先令第一个方程中的

$$x = mu + ut - f,\ y = nu - mt - g,$$

其中 m,n 满足关系式 $m^2 + n^2 = 1$. 再看能否决定 f,g 和 m,n,使得代换后的方程等于第二个方程.能,则两个方程描述的是同一条曲线,不能,则不是.

例

用我们的方法判断方程

$$y^2 - ax = 0,$$

$$16u^2 - 24tu + 9t^2 - 55au + 10at = 0$$

描述的是否为同一条曲线.这是两个看不出有什么关系的方程.将

$$x = mu + nt - f,\ y = nu - mt - g$$

代入第一个方程,得

$$n^2u^2 - 2mntu + m^2t^2 - 2ngu + 2mgt + g^2 - mau - nat + af = 0.$$

为了判断得到的这个方程能否化成第二个方程,分别乘它们以 n^2 和 16,使得它们的第一项相同,乘得的结果为

$$16n^2u^2 - 24n^2tu + 9n^2t^2 - 55n^2au + 10n^2at = 0,$$

$$16n^2u^2 - 32mntu + 16m^2t^2 - 32ngu + 32mgt + 16g^2 - 16mau - 16nat + 16af = 0.$$

我们看看可以确定 f,g,m,n,使这两个方程的哪些项相等.先分别使 tu 和 t^2 的系数相等,得 $24n^2 = 32mn$, $9n^2 = 16m^2$,都给出 $3n = 4m$,将 $m^2 = 1 - n^2$ 代入 $9n^2 = 16m^2$,得 $25n^2 = 16$,从而

$$n = \frac{4}{5},\ m = \frac{3}{5}.$$

已经有三项相等了,再分别使 u 和 t 的系数相等,得

$$55n^2a = 32ng + 16ma,\ 10n^2a = 32mg - 16na.$$

解出 g,看是否相等.从前一等式得

$$g = \frac{55na}{32} - \frac{ma}{2n} = \frac{11a}{8} - \frac{3a}{8} = a,$$

从后一等式得

$$g=\frac{5n^2a}{16m}+\frac{na}{2m}=\frac{a}{3}+\frac{2a}{3}=a,$$

两个 g 相等.这样,我们有五项相同了,只剩下能否决定 f,使 $g^2+af=0$, 取 $f=-a$ 即可.我们得到结论,所给的两个方程描述的是同一条曲线.

§ 37

虽然很不相同的两个方程描述的可以是同一条曲线,但常常从方程的不同就完全可以断定它们描述的不是同一条曲线.两个方程,阶(各项中变量次数和的最大数)不同,描述的曲线就肯定不同.

代换

$$x=mu+nt-f,\ y=nu-mt-g,$$

不改变方程的阶,因此 t,u 间的另一种阶的方程描述的肯定是另一条不同的曲线.

§ 38

也即,两个方程,一个是 x,y 间的,一个是 t,u 间的,如果阶不同,我们立即可以结论说,它们描述的曲线不同.这样需要我们加以区别的,就只剩下同阶方程了.即我们只需对同阶方程进行前面的考察.但是当阶数增大时考察是很麻烦的.后面我们将讲一种规则,用它立即可以说出两个方程描述的曲线是否相同.

§ 39

曲线通用方程的求法也可用于直线,设 LM 不是曲线,而是平

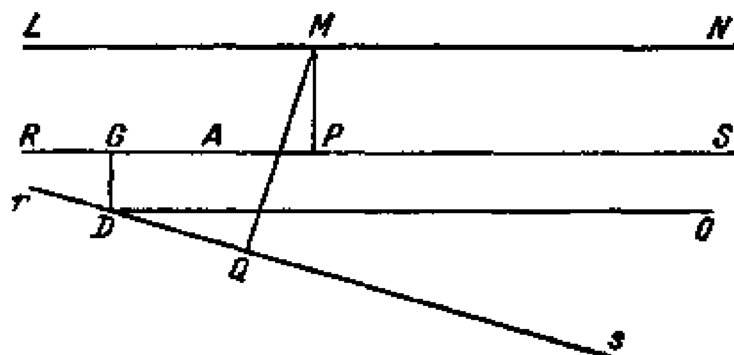


图 12

行于轴 RS 的直线(图 12).这时不管横标怎么取,对应的纵标都为常数,即恒有 $y=a$.这 $y=a$ 就是平行于轴的直线的方程.现在我们对任意轴 rs 来求该直线的通用方程.记 DG 为 g,记角 ODs 的正弦为 m,余弦为 n,记横标 DQ 为 t,纵标 MQ 为 u,则由

$$y=nu-mt-g,$$

得

$$nu-mt-g-a=0.$$

这就是直线的通用方程,乘它以 k,令 $nk=\alpha$,$mk=-\beta$,$(g+a)k=-b$,得直线的方程

$$\alpha u+\beta t+b=0.$$

这是 t,u 间的一阶通用方程.可见两个坐标间的任何一个一阶方程描述的都是直线,不是曲线.

§ 40

我们得到结论:坐标 x,y 间的状如

$$\alpha x+\beta y-a=0$$

的方程,描述的都是直线.这直线关于轴 RS 的位置,可用下面的

方法确定（参见图13）：先令 $y=0$，求得直线与轴的交点，为 $AC=\frac{a}{\alpha}$. 再令 $x=0$，求得直线在原点处的纵标值为 $y=\frac{a}{\beta}$. 这样，我们有了直线上的两个点 B 和 C，直线的位置确定了. 我们来验证，过这 B 和 C 的直线 LM 确实满足所给方程. 设 $AP=x$ 是任何一个横标，其对应的纵标 $MP=y$，则由三角形 CPM 与 CAB 相似，得

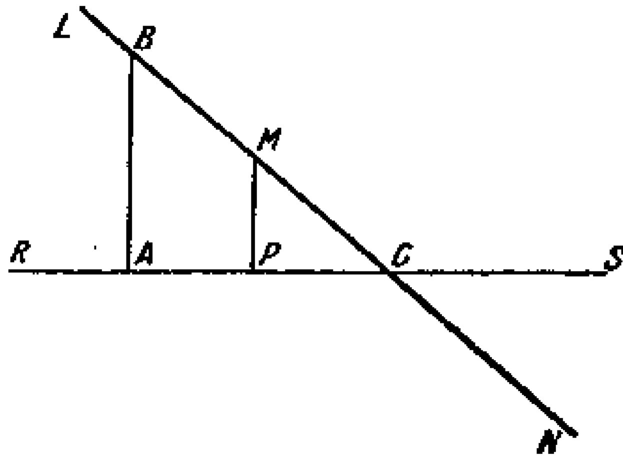


图 13

$$CP:PM=CA:AB,$$

也即

$$\left(\frac{a}{\alpha}-x\right):y=\frac{\alpha}{a}:\frac{a}{\beta},$$

从而

$$\frac{\alpha y}{\alpha}=\frac{\alpha a}{\alpha\beta}-\frac{\alpha x}{\beta},$$

或

$$\alpha x+\beta y=a.$$

正是所给方程.

§ 41

$\alpha=0$ 或 $\beta=0$，上面的推导不能进行. 不过这种情形易于讨论. 如果 $\alpha=0$，$y=a$，显然该方程描述的是直线，这直线平行于轴，至轴的距离为 a. 如果 $\beta=0$，$x=a$，该方程描述的也显然是直

线，这直线垂直于轴，至原点的距离为 a. 此时所有纵标都对应于同一个横标，这里横标是不变量. 从以上的讨论，我们完全清楚了，坐标间方程是如何规定直线的.

§ 42

到现在为止，描述曲线时，我们所用的坐标都是相垂直的. 纵标线与横标线成斜角时，我们也可以对它求出方程规定的曲线. 反之，曲线的性质也都可以用斜角坐标方程描述. 同一条曲线，对每一个坐标角(包括直角和斜角)因轴和原点位置的变化，而有无穷多个方程，这无穷多个方程可以用一个通用方程包含. 坐标角的个数无穷，因而通用方程的个数也无穷. 这无穷多个通用方程也可以用一个方程包含，我们称这个方程为最通用方程. 坐标角固定为直角时，最通用方程就成了我们讨论过的通用方程.

§ 43

设曲线 LM 关于直角坐标 $AP = x$, $PM = y$ 的方程已知，如图

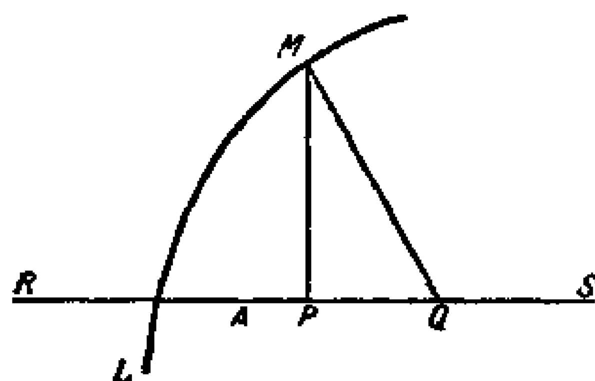


图 14

14 所示. 保持轴 RS 和原点 A 不变，改坐标角为 φ，我们来求新坐

标下 LM 的方程.从点 M 向轴 RS 引直线 MQ,使与轴 RS 的夹角 MQA 为 φ,记 $\sin\varphi=\mu$,$\cos\varphi=\upsilon$.在新坐标下,点 M 的横标为 $AQ=t$,纵标为 $QM=u$.从三角形 PMQ 得

$$\frac{y}{u}=\mu,\frac{PQ}{u}=\upsilon=\frac{t-x}{u}.$$

从而

$$u=\frac{y}{\mu},t=\upsilon u+x=\frac{\upsilon y}{\mu}+x,$$

进而

$$x=t-\upsilon u,y=\mu u.$$

代入 x,y 间方程,就得到坐标角为 φ 时,曲线 LM 的 t,u 间方程.

§ 44

反之,从曲线 LM 的斜角坐标 AQ,MQ 间的方程,也可以求出其直角坐标 AP,MP 间的方程.设纵横坐标线 MQ,AQ 的夹角为 φ,记 φ 的正弦为 μ,余弦为 υ.又设 $AQ=t$,$QM=u$ 间的方程已给.从点 M 向轴 RS 引直角纵标线 MP,记横标 $AP=x$,纵标 $MP=y$,我们有

$$u=\frac{y}{\mu},\ t=\frac{\upsilon y}{\mu}+x,$$

代入 t,u 间方程,就得到我们所要的 x,y 间方程.

§ 45

设曲线 LM 关于直角坐标 $AP=x,PM=y$ 的方程已给,下面我们求它的最通用方程.取直线 rs 为新轴,取它上面的 D 点作新原点,记新纵标线 MT 与 rs 的夹角 $DTM=\varphi$,记 φ 的正弦为 μ,余弦为 υ.我们要做的是,求出 LM 的关于新横标 DT 和新纵标 TM 的

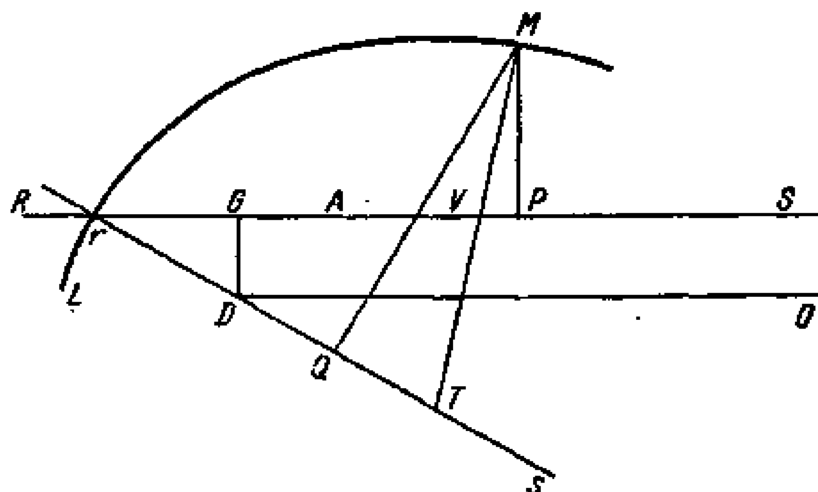


图 15

方程.从点 D 引旧轴 RS 的垂线 DG,记 $AG=f$,$DG=g$.过 D 引旧轴 RS 的平行线 DO,记角 ODs 的正弦为 m,余弦为 n.像我们做过的那样,自点 M 引新轴 rs 的垂线 MQ,记 $DQ=t$,$QM=u$,斜角坐标为 $DT=r$,$TM=s$.

首先我们有

$$t=r-\upsilon s,\ u=\mu s,$$

其次当然有

$$x=mu+nt-f,\ y=nu-mt-g,$$

从而

$$x=nr-(n\upsilon-m\mu)s-f,\ y=-mr+(\mu n+\upsilon m)s-g,$$

其中 $n\upsilon-m\mu$ 是角 AVM 的余弦,AVM 是新纵标线与旧轴 RS 所成的角,而 $\mu n+\upsilon m$ 是角 AVM 的正弦.将得到的 x,y 的表达式代入原方程,结果为新坐标 r,s 间的方程,这就是我们所要的曲线 LM 的最通用方程.

§ 46

由于变 x,y 间方程为 r,s 间方程的代换是一次的，所以 r,s 间的最通用方程与原 x,y 间的方程同阶. 可见轴、原点和斜坐标角的变化，全都不影响曲线的阶数. 描述同一条曲线的直角坐标方程和斜角坐标方程，虽然都变化无穷，但方程的阶数，既不减小也不增大. 因此，两个方程，不管别的方面何等相似，只要阶数不同，它们描述的曲线就一定不相同.

第三章

代数曲线的阶

§ 47

曲线跟函数一样，数量无穷，不分成类，就不能有条理地进行考察，研究就不能进行. 我们已经把曲线分成了代数的和超越的，但这不够，要再分. 本书只考察代数曲线，因而我们只对代数曲线进行再分类，这首先要选定一个特征，作为分类的依据.

§ 48

这依据只能从表明曲线性质的函数或方程上面找. 到现在为止，这是我们研究曲线的唯一途径，当然对代数曲线也没有别的路可走. 对两坐标间的函数，上册我们已经进行过几种分类. 这里我们首先想到的，是拿值的个数作依据，把单值函数产生的曲线归入第一类，二值函数产生的曲线归入第二类，三值的归入路三类，等等.

§ 49

这种分法虽显得自然，但稍作深究就会发现，函数的值的个数与由它产生的曲线之间，很少有不变的关系. 函数的值的个数，很大程度上是依赖于轴的位置的，而讨论曲线时允许轴的位置任意. 一个函数对一个轴是单值的，对另一个轴可以是多值的. 这样同一条曲线对不同的轴得归入不同的类，这不符合分类要求. 例如，方程 $a^3y = a^2x^2 - x^4$ 产生的曲线属第一类，因为纵标 y 是横标 x 的单值函数. 但是移动坐标，使新轴垂直旧轴，则同一条曲线的方程变成了 $y^4 - a^2y^2 + a^3x = 0$，曲线属第四类. 可见，函数的值的个数不能作为曲线分类的依据.

§ 50

试试看，用项作依据，项数为 2 的方程，例如 $y^m - \alpha x^n = 0$ 产生的曲线归第一类；项数为 3 的方程，例如 $\alpha y^m + \beta y^p x^q + \gamma x^n = 0$ 产生的曲线归第二类，等等. 显然，在这种分法之下，同一条曲线的类别也不唯一. 例如，在 § 36，作为例子，我们讨论过方程 $y^2 - ax = 0$ 产生的曲线. 拿项作依据，这条曲线既属第一类，又属第四类，因为改变轴和原点的位置，可使方程变为

$$16u^2 - 24tu + 9t^2 - 55au + 10at = 0.$$

而且选择另外的轴，另外的原点，可使这条曲线属于第二类，第三类，第五类. 可见项数也不能作为依据.

§ 51

如果用曲线的方程的阶作曲线分类的依据，那情形就不同了.

不管轴和原点的位置以及坐标角如何变化，曲线方程的阶都是不变的．也即，用坐标方程的阶作依据的话，轴和原点的位置及坐标角的变化都不影响曲线的类，同一条曲线，不管取它的特殊方程，还是通用方程，或者最通用方程，它都属于同一类．因此，用方程的阶作曲线分类的依据是适宜的．

§ 52

方程按幂次分类，各项最高幂次为几就叫几阶方程．我们把它搬到曲线上来，方程各项最高幂次为几，就称曲线为几阶曲线．一阶通用方程为

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y,$$

以 x,y 为坐标，直角坐标斜角坐标都可．从该方程得到的曲线都属一阶曲线．但是前面我们看到了，该方程产生的都是直线，也即一阶曲线都为直线．直线是最简单的曲线，一阶曲线，“曲”字在这里名不符实了、我们去掉“曲”字，只用一个线字，线包含直线，也包含曲线，一阶线不含曲线，只含直线．

§ 53

取上节方程中的 x,y 为直角坐标、斜角坐标都可以．如果取纵标与轴成斜角 φ，并记角 φ 的正弦和余弦为 μ 和 υ，则置

$$y=\frac{u}{\mu},\ x=\frac{\upsilon u}{\mu}+t,$$

就得到直角坐标 t,u 之间的方程

$$0=\alpha+\beta t+(\frac{\beta\upsilon}{\mu}+\frac{\gamma}{\mu})u.$$

前后两个方程都是通用方程，所以后一个的范围并不比前一个小．也即坐标角为直角时方程所包含的曲线并不比为斜角时少．同样，

阶数更高的方程,它所包含的曲线数目,也不因取直角为坐标角而减少,任何阶的通用方程都不因取定坐标角而减少所含曲线.当然也可以取直角为坐标角.斜角坐标下任何阶通用方程的任何一条曲线,都将包含在直角坐标下的对应方程中.

§ 54

二阶线都包含在二阶通用方程

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2$$

之中,x,y 为直角坐标.该方程表示的曲线都是二阶线.二阶线是最简单的曲线,一阶线是直线不是曲线,因而有人把二阶线叫做一阶曲线.但二阶线的一个更为熟知的名称是圆锥曲线.圆锥曲线又分为圆、椭圆、抛物线和双曲线.后而我们将从通用方程导出它们.

§ 55

三阶通用方程

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2+\eta x^3+\vartheta x^2y+\iota xy^2+\kappa y^3$$

产生的曲线都是三阶线,x,y 是直角坐标.前面已经指出,取 x,y 为斜角坐标,并不使方程含有更多的曲线,这个方程中可任意取值的字母,比前节多得多,因而所含曲线形状的种数也比前节多得多.牛顿列出了这些形状.

§ 56

四阶通用方程

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2+\eta x^3+\vartheta x^2y+\iota xy^2+\kappa y^3$$
$$+\lambda x^4+\mu x^3y+\nu x^2y^2+\xi xy^3+o y^4$$

产生的曲线都是四阶线.这里取 x,y 为直角坐标;当取 x,y 为斜角坐标时,方程也不含有更多的曲线.本节方程中有 15 个可任意取值的常数,因而四阶线的类型比三阶线又要多出很多.人们称二阶线为一阶曲线,因而也称四阶线为三阶曲线,称三阶线为二阶曲线.

§ 57

照以上所讲,我们可以列出五、六、七等各阶线的通用方程.四阶线的通用方程加上含

$$x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^6, y^5$$

的项就是五阶线的通用方程,共 21 项.类似地,六阶线的通用方程含 28 项.根据三角形规则,n 阶线的通用方程,其项数为 $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$,可任意取值的常数,其个数等于项数.

§ 58

但可任意取值的常数,其不同取值可以给出相同的曲线.前一章我们看到,变化轴与原点的位置,可以得到同一曲线的无穷多个方程,也即,同阶数的不同方程可以给出相同的曲线.因此,根据通用方程对属于同一阶的曲线进行再分类时,要十分注意,不要把同一条曲线分到两个或更多个类里去.

§ 59

曲线的阶由坐标间方程决定,每一个坐标间的代数方程都告诉我们它所表示的曲线属哪一阶.无理方程应有理化,分式方程应

整式化，有理化整式化之后的代数方程，各项最高次数，即各项中 x，y 次数之和的最大者，就是原方程所表示的曲线的阶．例如，方程 $y^2-ax=0$ 给出的曲线是二阶的；方程 $y^2=x\sqrt{a^2-x^2}$（有理化之后是四阶的）给出的曲线是四阶的；而方程 $y=\frac{a^3-ax^2}{a^2+x^2}$ 给出的曲线是三阶的，因为整式化之后的方程 $a^2y+x^2y-a^3=ax^2$ 最高次项 x^2y 的次数为 3.

§ 60

随纵标线与轴间夹角的变化，同一方程表示的可以是多条不同的曲线．例如，方程 $y^2=a^2-x^2$，在直角坐标下它表示的是圆，在斜角坐标下它表示的是椭圆，但这两条曲线的阶相同，因为变直角坐标为斜角坐标的变换不改变曲线的阶．虽然纵标线与轴间夹角大小的改变，既不增大也不缩小各阶曲线方程所含曲线的范围，但不指明坐标角，方程表示的曲线就确定不下来．

§ 61

曲线以方程的阶为阶，但方程必须是不能分解成有理因式的，方程的每个有理因式都自成一个方程，每个自成方程都产生一条曲线．自成方程产生的曲线总体构成原方程描述的曲线，即可分解为有理因式的方程，它含有的不是一条而是几条连续曲线，每条连续曲线都由自己的方程产生，这些方程彼此无关，但乘积等于原方程．可分解成有理因式的方程给出的不是一条，而是几条连续曲线，我们称这样的线为复合线．

§ 62

例如方程 $y^2 = ay + xy - ax$，看上去它表示的是二阶线. 移项得 $y^2 - ay - xy + ax = 0$，分解得 $(y-x)(y-a)=0$，是方程

$$y - x = 0,\ y - a = 0$$

的乘积. 这两个方程都是直线方程，前一直线与轴成半直角，后一直线平行于轴，至轴的距离为 a，也即方程

$$y^2 = ay + xy - ax$$

表示的是两条直线所成的复合线.

方程

$$y^4 - xy^3 - a^2x^2 - ay^3 + ax^2y + a^2xy = 0,$$

给出的不是四阶线，是复合线，其左端可分解为 $(y-x)(y-a)(y^2 - ax)$，即该方程含有三条线，两条直线和一条由方程 $y^2 - ax = 0$ 产生的曲线.

§ 63

复合线可以随意构成，可以含有两条线，也可以含有多条线；可以都是直线，可以都是曲线，也可以是直线和曲线，而且曲线形状不拘. 事实上，不管多少条线，只要它们的方程共轴，共原点，且都化成了同一端为零的形式，那么这些方程的乘积所成的复合方程，就含有积中每个方程所表示的曲线.

图 16 上是一个以 C 为圆心，$AC = a$ 为半径的圆和一条过圆心 C 的直线 LN. 我们可以关于随便的轴求出包含这两条线的复合方程.

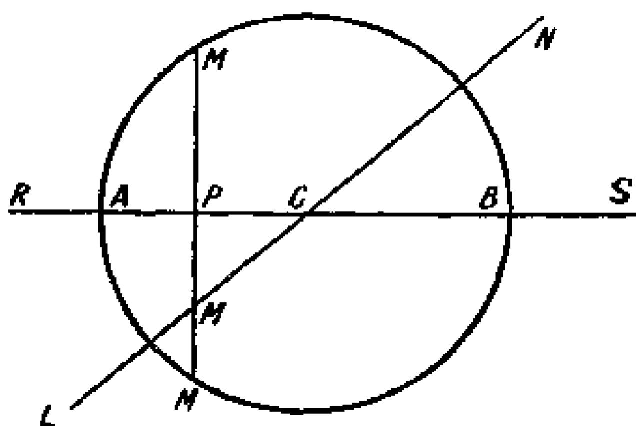


图 16

§ 64

例如，取与直线 LN 成半直角的直径 AB 作轴，取点 A 作原点，记横标 $AP=x$，纵标 $PM=y$. 那么，对直线上的点 M，我们有 $PM=CP=a-x$，因为这个点 M 是在负纵标区，所以我们有 $y=-a+x$，或者 $y-x+a=0$. 对圆上的点 M，我们有 $PM^2=AP\cdot PB$ 和 $BP=2a-x$，从而得到 $y^2=2ax-x^2$，或者 $y^2+x^2-2ax=0$. 得到的两个方程相乘，结果为三阶复合方程

$$y^3-y^2x+yx^2-x^3+ay^2-2axy+3ax^2-2a^2x=0,$$

它同时包含图中的圆和直线. 横标 $AP=x$ 对应三个纵标，两个在圆上，一个在直线上. 例如，令 $x=\frac{1}{2}a$，则

$$y^3+\frac{1}{2}ay^2-\frac{3}{4}a^2y-\frac{3}{8}a^3=0,$$

该方程的一个因式为 $y+\frac{1}{2}a=0$，作除法，得另一个因式为 $y^2-\frac{3}{4}a^2=0$. 从而 y 的三个值为

$$\text{Ⅰ}.\ y=-\frac{1}{2}a,\ \text{Ⅱ}.\ y=\frac{1}{2}a\sqrt{3},\ \text{Ⅲ}.\ y=-\frac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

我们构造的复合方程表示的是由一个圆和一根直线所成的连续曲线.

§ 65

以上我们讲了复合线与非复合线的区别.显然,二阶线可以是连续曲线,可以是含两根直线的复合线,这是因为二阶方程如果有因式,这因式必为一阶的,一阶方程表示的是直线.三阶线可以是非复合的,可以是复合的.这复合线的成员,可以是一条直线与一条二阶线,也可以是三条直线.四阶线可以是连续线,即非复合的,也可以是复合的.这复合线的成员,可以是一条直线与一条三阶曲线,可以是两条二阶线,可以是一条二阶线与两条直线,最后可以是四条直线.类似地,可以列出五阶和更高阶复合线的可能成员.可见,任何阶的曲线都可由阶数比它低的非复合线复合而成,复合方式可以不同,但复合线成员的阶数的和必等于复合线的阶数.

第四章

各阶线的基本性质

§ 66

对任何阶数的线,它与直线的相交,也即与直线交点的个数,都是我们首先要考察的.一阶线,也即直线,与另一条直线的交点只有一个,但曲线与直线的交点可多于一个.自然我们会问,每阶曲线的这种交点各是几个,这个问题的解决可以帮助了解各阶线的性质.我们将看到,各阶线与直线交点的个数是:二阶线不多于两个,三阶线不多于三个,类推.

§ 67

前面我们讲过轴与任何曲线交点个数的求法.给定横标 x 纵标 y 间的一个方程,由于轴与曲线交点处纵标 y 为零,置方程中的 $y=0$,得到只含 x 的方程,这个方程的根就是轴与曲线交点的横标.例如,令我们前面求得的圆的方程 $y^2=2ax-x^2$ 中的 $y=0$,得 $0=2ax-x^2$,根为 $x=0$ 和 $x=2a$,即轴 RS 与圆先交于原点 A,再

交于点 B,$AB=2a$.对其他曲线,求法类似,也即令方程中的 $y=0$,得到 x 的方程,这个方程的根就是曲线与轴的交点.

§ 68

对于曲线的通用方程,每条直线都可以作轴.取一条直线作轴.令通用方程中的纵标 $y=0$,得到只含 x 的方程,这个方程的根就是曲线与轴,也就是与我们所取的直线的交点,根的个数就是这曲线与直线交点的个数.可见,交点个数决定于方程中 x 的最高次幂,不能超过 x 的最高次幂的次数,如果根都是实数,则交点个数等于最高幂的次数;如果有虚根,则交点个数相应地减少.

§ 69

对每阶线我们都给了最通用方程,对它应用所说的方法,就得到各阶线与直线交点的个数.先取一阶线,即直线的通用方程

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y,$$

令 $y=0$,得 $0=\alpha+\beta x$,它的根不多于一个,从而一条直线与另一条直线最多只能有一个交点.如果 $\beta=0$,则不可能等式 $0=\alpha$ 告诉我们,此时直线与轴不相交,事实上 $\beta=0$ 时方程为 $0=\alpha+\gamma y$,此时直线与轴平行.

§ 70

令二阶线通用方程

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2$$

中的 $y=0$,得

$$0=\alpha+\beta x+\delta x^2,$$

它或者有两个实根,或者没有实根,或者有一个实根,这是在 $\delta=0$ 时.因而二阶线与直线交点的个数或为 2,或为 1,或者为 0.也可简单地说成:二阶线与直线交点的个数不多于 2.

§ 71

置三阶线通用方程中的 $y=0$,得方程

$$0=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3.$$

该方程根的个数不多于 3,因而三阶线与直线交点的个数不多于 3.但这交点个数可以少于 3:如果 $\delta=0$,且 $0=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ 的两个根都为实数,则交点个数为 2;如果所得三次方程有两个虚根,或 $\delta=0$, $\gamma=0$,则交点个数为 1;最后,如果 $\delta=0$,且另外两个根为虚数,或者 β,γ,δ 都为零,而 α 不为零,则交点个数为零.

§ 72

类似地,我们可以得到,四阶线与直线交点的个数不多于 4,且这条性质可类推到各阶线,即 n 阶线与直线交点的个数不多于 n.当然,也跟我们对二阶线和三阶线所指出的一样,这交点个数可以少于 n,甚至可以为零.这样我们得到:线与另一直线交点的个数,不多于它的阶数.

§ 73

可见,从曲线与直线交点的个数,得不到曲线的阶数.交点个数为 n 时,曲线的阶数可以不是 n,可以比 n 高,甚至可以不是代数曲线,而是超越曲线,但可以断定,与直线交点个数为 n 的曲线,其阶数绝对不会小于 n.如果曲线与直线交点个数为 4,则可

断定，这曲线不是二阶的，也不是三阶的，但断不定它是四阶的，还是更高的哪一阶的，甚至断不定它是不是超越曲线.

§ 74

各阶线的通用方程中都含有若干个任意常数，取任意常数为确定的值，曲线就完全确定，并且可以对给定的轴把它画出来，而包含在这通用方程中的其他曲线就一概被排除. 例如，虽然一阶方程 $0=\alpha+\beta x+\gamma y$ 只含直线，但由于常数 α,β,γ 不同值的组数无穷，因而这直线关于轴的位置的种数也无穷. 但是，只要赋予这三个常数以确定的值，直线的位置就完全确定，另外的任何直线就都排除在外.

§ 75

方程 $0=\alpha+\beta x+\gamma y$ 有三个可任意决定的常数(简称为三个任意定)，但由方程的性质知，给出两个系数对第三个的比，方程就完全确定；也即我们的这个方程，实质上只有两个任意定. 例如，用 α 确定 β,γ，使 $\beta=-\alpha,\gamma=2\alpha$，那么约去方程 $0=\alpha-\alpha x+2\alpha y$ 中的 α，我们就得到完全确定的方程. 同样的道理，含六个任意常数的二阶线通用方程有五个任意定；三阶线通用方程有九个任意定；一般地，n 阶线通用方程有 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$ 个任意定.

§ 76

让曲线通过一个给定点，可确定下一个任意定，设给定某阶线的通用方程，我们让曲线通过给定点 B 来确定一个任意定(图

17). 任意取定一条轴和轴上原点 A，自点 B 向轴引垂线 Bb. 曲线过 B，则方程中横标 x 为 Ab 时，纵标 y 必为 Bb. 换通用方程中的 x, y 为 Ab，Bb，从结果等式中确定出 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$ 中的一个，把确定出的这一个换入原通用方程，则任意定减少一个，但所含曲线都过点 B.

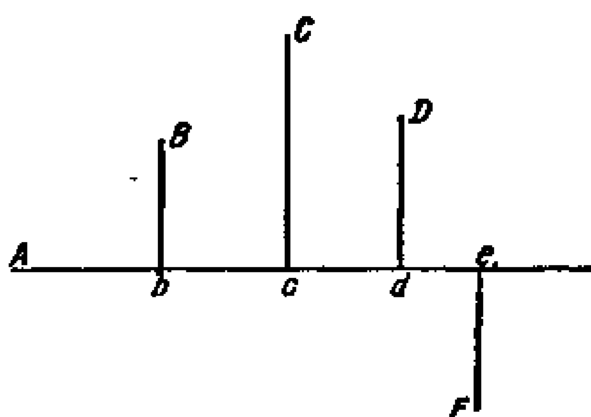


图 17

§ 77

如果还要求曲线通过点 C，那我们从 C 向轴引垂线 Cc，将 $x = Ac, y = Cc$ 代入所含曲线都过点 B 的方程，从得到的等式又可确定 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 中的一个. 可见，从曲线应通过的三个点 B, C, D 可确定三个常数，从四个点 B, C, D, E 可确定四个常数. 如果点数等于通用方程的任意定数，那么曲线就完全而唯一地确定.

§ 78

一阶线，即直线的通用方程只有两个任意定，所以给定两个点要直线通过，直线就完全确定. 事实上，过两点只有一条直线，这是我们从欧几里得的几何原本中已经知道了的，如果只给一个点，则方程不完全确定，通过这个点的直线有无穷多条.

§ 79

二阶线的通用方程有五个任意定，如果给定五个点，使曲线必须通过，那么二阶线就完全确定，因而通过五个点只能引一条二阶线. 如果只给四个点，或更少，那么方程就不完全确定，就有无穷多条二阶线通过给定的这些点，二阶线与直线不能有三个交点，因此给定的五个点中，如果有三个在一条直线上，我们求出的就不能是连续曲线，而是由两条直线组成的复合线，即二阶通用方程此时包含的是两条直线.

§ 80

三阶线的通用方程含九个任意定，所以对任意取定的九个点都有一条三阶线通过，而且只有一条. 如果点数少于 9，则有无穷多条三阶线通过它们. 同样地，每 14 个给定点都有唯一的四阶线通过，每 20 个给定点都有唯一的五阶线通过. 一般地，每

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\frac{n(n+3)}{2}$$

个给定点都有唯一的一条 n 阶线通过，每少于这么多个点都有无穷多条 n 阶线通过.

§ 81

通过不多于 $\frac{n(n+3)}{2}$ 个点有一条或无穷多条 n 阶线. 点数等于 $\frac{n(n+3)}{2}$ 时有一条，少于时有无穷多条. 不管给定的点如何分布，解都是存在的，因为确定系数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$ 的方程都是线性

的，没有二次的，也没有更高次的．也因此，求得的 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 不会是虚的，也不会是多值的，即求得的通过给定点的线都是实线，而且只要点数等于通用方程的任意定个数，线就是唯一的．

§ 82

轴可任取，这可以使系数的确定变得容易些，先通过一个给定点，并且就取这个给定点作原点，这时 $x=0,y=0$ 代入通用方程

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2+\eta x^3+\cdots$$

立即得到 $\alpha=0$. 再通过另外的给定点，这样就减少了用点的位置来确定的量的个数．最后可取斜角坐标，使过原点的纵标线通过一个给定点．不管坐标是直角的还是斜角的，我们都可以从方程了解曲线，根据方程画出曲线．

§ 83

我们来求通过图 18 上五个给定点 A,B,C,D,E 的二阶曲

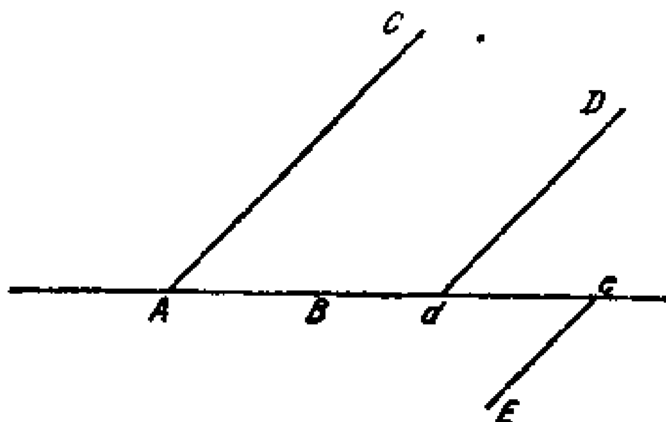


图 18

线．取过点 A,B 的直线为轴，取 A 点为原点，连接点 A,C，取纵标

对轴的倾角为 CAB.从点 D,E 向轴引平行于 AC 的纵标线 Dd 和 Ee,令 $AB=a$, $AC=b$, $Ad=c$, $Dd=d$, $Ae=e$, $eE=f$,对二阶线的通用方程

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2,$$

显然

令	则
$x=0$	$y=0$,
$x=0$	$y=b$,
$x=a$	$y=0$,
$x=c$	$y=d$,
$x=e$	$y=f$.

由此我们得到 5 个方程

Ⅰ. $0=\alpha$,

Ⅱ. $0=\alpha+\gamma b+\zeta b^2$,

Ⅲ. $0=\alpha+\beta a+\delta a^2$,

Ⅳ. $0=\alpha+\beta c+\gamma d+\delta c^2+\varepsilon cd+\zeta d^2$,

Ⅴ. $0=\alpha+\beta e+\gamma f+\delta e^2+\varepsilon ef+\zeta f^2$,

从而 $\alpha=0$, $\gamma=-\zeta b$, $\beta=-\delta a$. 将这三个值代入Ⅳ,Ⅴ,得

$$0=-\delta ac-\zeta bd+\delta c^2+\varepsilon cd+\zeta d^2,$$

$$0=-\delta ae-\zeta bf+\delta e^2+\varepsilon ef+\zeta f^2.$$

乘前一个以 ef,乘后一个以 cd,然后相减以消去 ε,得

$$0=-\delta acef-\zeta bdef+\delta c^2ef+\zeta d^2ef+\delta acde+\zeta bcdf-\delta cde^2-\zeta cdf^2$$

或

$$\frac{\delta}{\zeta}=\frac{bdef-bcdf-d^2ef+cdf^2}{acde-acef-cde^2+c^2ef},$$

由此得

$$\delta = df(be - bc - de + cf),$$
$$\zeta = ce(ad - af - de + cf),$$

我们求出了所有的系数.

§ 84

用上面的方法,对取定的轴和坐标角,求出通用方程

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \cdots$$

的全体系数,我们就得到了通过包括给定点在内的无穷多个点的一条曲线的方程.如果给定点的个数少于通用方程任意定的个数,则不足的点可任取,都取定之后,通过给定点的方程就完全决定.为了画出决定了的这条曲线,我们取正负整数横标值0,1,2,3,4,5,6,…和-1,-2,-3,-4,…,再根据完全决定了的方程算出对应于这每一个横标的纵标,这样我们就得到了曲线的很多相当靠近的点,这就可以大致地画出曲线.

第五章

二 阶 线

§ 85

一阶线都为直线，初等几何对直线的讲述已经充分.二阶线，在曲线中它最简单，在整个高等几何中又有着广泛的应用，我们对它作些较深入的考察.二阶线也叫圆锥曲线，具有不少有意义的性质，其中有古代几何学家发现的，也有现代人补充进去的.很多作者接着初等几何马上就对这些性质进行讲述，这足见其重要.这些性质有来自方程的，有来自平面与圆锥截线的，有来自其他作图方法的.我们这里只讲来自方程而不使用其他辅助手段的.

§ 86

考察二阶曲线的通用方程

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2.$$

我们已经证明了，它包含关于任何轴、任何坐标角的一切二阶线，改写它为

$$y^2+\frac{(\varepsilon x+\gamma)y}{\zeta}+\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta}=0,$$

可见,每个横标 x 都或者有两个纵标与之对应,或者没有纵标与之对应,决定于 y 的两个根为实为虚.如果 $\zeta=0$,则每一个横标 x 都只有一个纵标与之对应,另一个在无穷远处,这并不阻碍我们的考察.

§ 87

两个 y 值都为实数时,纵标线 PMN 交曲线于两点,设为 M, N(参见图 19).两根之和

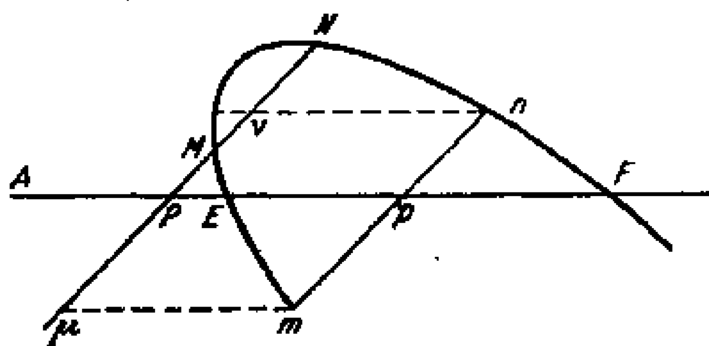


图 19

$$PM+PN=\frac{-\varepsilon x-\gamma}{\zeta}=\frac{-\varepsilon\cdot AP-\gamma}{\zeta};$$

这里取直线 AEF 为轴,点 A 为原点,角 APN 为可任取的坐标角,依所取坐标角画另外一条纵标线 mpn,这里 pm 为负,我们得到

$$pn-pm=\frac{-\varepsilon\cdot Ap-\gamma}{\zeta}.$$

前式减去后式,得

$$PM+pm+PN-pn=\frac{\varepsilon(Ap-AP)}{\zeta}=\frac{\varepsilon\cdot Pp}{\zeta}.$$

从点 m, n 引平行于轴的直线,记与纵标线 PMN 的交点为 μ 和 υ,

则

$$M\mu + N\upsilon = \frac{\varepsilon \cdot Pp}{\zeta},$$

也即 $M\mu + N\upsilon$ 比 Pp 或 $m\mu$ 或 $n\upsilon$，都等于 ε 比 ζ，为常数. 我们指出，不管直线 MN，mn 画于曲线何处，只要与轴的交角等于给定角，且 $n\upsilon$，$m\mu$ 平行于轴，这个比式就成立.

§ 88

平移纵标线 PMN 使点 M，N 重合，也即使纵标线成切线，参见图 20. 记这切线为 KCI，它平行于 MN 和 mn. 我们称两端在曲线上的线段为弦，从点 M，N，m，n 向切线画平行于轴的直线 MI，NK，mi，nk. 线段 CK，CI 在点 C 两侧，应该反号，由此得

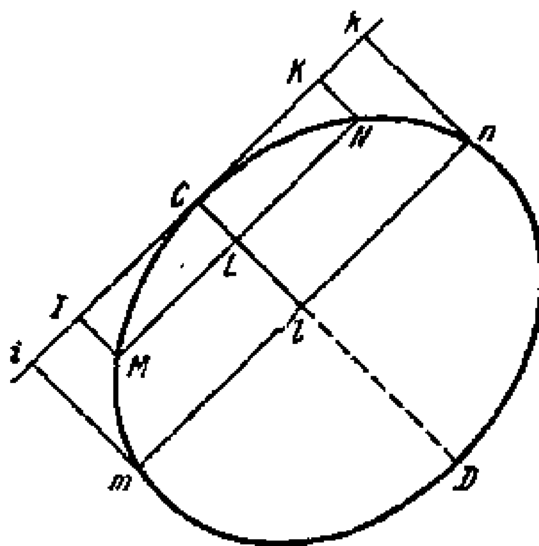


图 20

$$(CI - CK):MI = \varepsilon:\zeta,$$

$$(Ci - Ck):mi = \varepsilon:\zeta.$$

从而

$$(CI - CK):MI = (Ci - Ck):mi,$$

或

$$MI:mi = (CI - CK):(Ci - Ck).$$

§ 89

轴关于曲线的位置任意，所以直线 MI，NK，mi，nk 的位置也

任意,只要它们彼此平行,就恒有

$$MI : mi = (CI - CK) : (Ci - Ck).$$

设 L 平分 MN,引 MI, NK 使平行于 CL,则 $CI = CK$,从而 $CI - CK = 0$,且

$$Ci - Ck = \frac{mi}{MI}(CI - CK) = 0.$$

延长 CL 至 l. 由 mi, nk 也平行于 CL,我们有 $ml = nl$. 因而过切点的直线 CLl,如果它平分一根平行于切线的弦 MN,它就平分一切平行于切线的 mn.

§ 90

由于直线 CLl 等分一切平行于切线的弦,我们称它为二阶线或圆锥曲线的直径. 二阶线任何一点处都有切线,因而二阶线有无穷多条直径. 对每一条切线 ICK 我们都可以画一条平行于它的弦 MN,记 MN 的等分点为 L,直线 CL 就是我们的二阶线的直径,它等分平行于切线 IK 的一切弦.

§ 91

由此,如果直线 Ll 等分任何两条相平行的弦 MN 和 mn,那它就等分一切平行于这两条弦的弦. 二阶线上处处有切线,对每一条切线我们都可以画平行于它的弦,从而就有一条直径. 由此我们得到一个新的方法,可求出二阶线的无穷多条直径. 任意地画两条相平行的弦 MN 和 mn,过其中点 L, l 的直线就是一条直径,它等分平行于这两条弦的一切弦. 记这直径 Ll 与曲线的交点为 C,过 C 平行于弦的直线是曲线在 C 点处的切线.

§ 92

从方程

$$y^2+\frac{(\varepsilon x+\gamma)}{\zeta}y+\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta}=0$$

的两根之和我们得到了前面的性质. 现在我们来考察它的两根之积

$$PM\cdot PN=\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta},$$

(参见 § 87 图 19). 表达式$\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta}$或者有两个实因式,或者没有实因式. 当曲线与轴有两个交点 E,F 时它有两个实面式. 事实上,由交点处 $y=0$ 得$\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta}=0$, AE, AF 为根,$(x-AE)(x-AF)$为因式.

从而由 $x=AP$ 得

$$\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta}=\frac{\delta}{\zeta}(x-AE)(x-AF)=\frac{\delta}{\zeta}\cdot PE\cdot PF,$$

该式与两根之积比较,得

$$PM\cdot PN=\frac{\delta}{\zeta}\cdot PE\cdot PF,$$

即 $PM\cdot PN$ 比 $PE\cdot PF$ 等于 δ 比 ζ,为常数. 纵标线 PMN 的位置任意,当然它与轴所成的角 NPF 必须等于坐标角,引纵标线 mn,则由 pE, mn 为负,类似地得

$$pm\cdot pn=\frac{\delta}{\zeta}pE\cdot pF.$$

§ 93

E,F 为二阶线上任两点(参见图 21),对直线 PEF,只要弦

NMP，npm 平行，则恒有

$$PM \cdot PN : PE \cdot PF = pm \cdot pn : pE \cdot pF,$$

因为两端的比式都等于 $\delta : \zeta$. 类似地，如果取直线 PMN 为轴（轴可任取），那么对任何一条平行于 PEF 的直线 eqf，我们都有

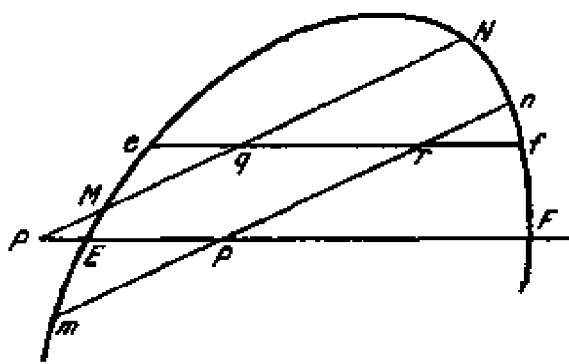


图 21

$$PM \cdot PN : PE \cdot PF = qM \cdot qN : qe \cdot qf = pm \cdot pn : pE \cdot pF.$$

从而

$$qe \cdot qf : pE \cdot pF = qM \cdot qN : pm \cdot pn.$$

这样一来，对任意两对平行弦 ef，EF 和 MN，mn，如果其交点为 P，p，q，r，我们都有关系式

$$PM \cdot PN : PE \cdot PF = pm \cdot pn : pE \cdot pF = qM \cdot qN : qe \cdot qf = rm \cdot rn : re \cdot rf.$$

这是二阶线的第二条一般性质.

§ 94

如果曲线的两个点 M，N 重合，则直线 PMN 变为重合点处的切线，$PM \cdot PN$ 变为 PM 或者 PN 自乘. 由此得到切线的一条新性质. 设直线 CPp 是二阶线点 C 处的切线（图 24），又设 PMN，pmn 是任何两条平行线，因而与切线交角相等. 这样由求得的性质，我们有

$$PC^2 : PM \cdot PN = pC^2 : pm \cdot pn,$$

也即，对与切线交角相等的弦 MN，我们有 PC^2比 $PM \cdot PN$ 为常数.

§ 95

由此我们得到，如果 CD 是二阶线的任何一条直径（§ 88 图 20），它等分一切平行弦 MN, mn，交曲线于 C, D，则

$$CL\cdot LD : LM\cdot LN = Cl\cdot lD : lm\cdot ln.$$

由 $LM = LN, lm = ln$，得

$$LM^2 : lm^2 = CL\cdot LD : Cl\cdot lD,$$

也即半弦平方 LM^2 比乘积 $CL\cdot LD$ 为常数. 我们看看取直径 CD 为轴，半弦 LM 为纵标线时的二阶线方程. 设直径 $CD = a$，横标 $CL = x$，纵标 $LM = y$，由 $LD = a - x$，得 y^2 比 $ax - x^2$ 为常数，记这常数为 h 比 k，这样我们得到二阶线的方程

$$y^2 = \frac{h}{k}(ax - x^2).$$

§ 96

从前面得到的二阶线的两条性质，可以推出另外几条性质. 设二阶线的两条相平行的弦 AB，CD 已给（图 22）. 连 AC, BD 成四边形 $ABCD$，过曲线上任一点 M 作平行于 AB，CD 的弦 MN，交 AC, BD 于 P, Q，则 PM 等于 QN. 等分 AB, CD 的直线等分 MN. 由初等几何知该直线也等分线段 PQ. 这样，由线段 MN, PQ 被同一点等分，我们得到 $MP = NQ$，$MQ = NP$. 这样一来，借助 A, B，

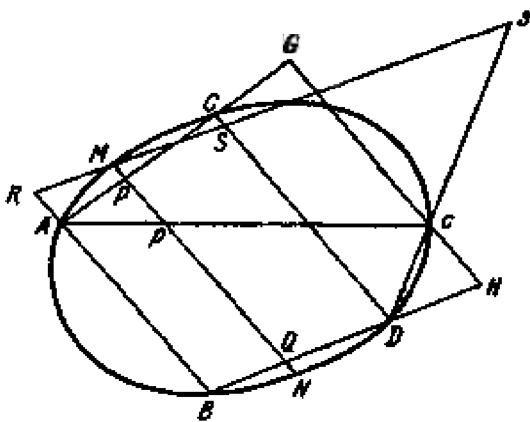


图 22

C,D 之外的第五点 M,我们可以确定第六点 N,使 $NQ=MP$.

§ 97

已知 $MQ\cdot QN$ 比 $BQ\cdot DQ$ 为常数,由 $QN=MP$ 得 $MP\cdot MQ$ 比 $BQ\cdot DQ$ 为常数,从而任取曲线上另外一点 c,过 c 引平行于 AB, CD 的直线 GcH 交 AC, BD 于 G,H,则 $cG\cdot cH$ 比 $BH\cdot DH$ 为同一常数,即

$$cG\cdot cH:BH\cdot DH=MP\cdot MQ:BQ\cdot DQ.$$

如果过点 M 引平行于 BD 的直线 RMS 交 AB, CD 于 R,S,那么由 $BQ=MR$, $DQ=MS$ 也得到 $MP\cdot MQ$ 比 $MR\cdot MS$ 为常数.从而,如果过任一点 M 引两条直线,一条 MPQ 平行于边 AB, CD,另一条 RMS 平行于边 BD,记与四边形 $ABCD$ 四边的交点为 P,Q,R,S,则这四点的分布满足 $MP\cdot MQ$ 比 $MR\cdot MS$ 为常数.

§ 98

代替平行于 AB 的弦 CD,考虑直线 Dc,再加上弦 Ac 及原来的直线 MQ, RMS,这两条线过点 M,分别平行于边 AB 和 BD,交四边形 $ABDc$ 的边于 p,Q,R,s,我们得到类似的性质.事实上

$$MP\cdot MQ:BQ\cdot DQ=cG\cdot cH:BH\cdot DH,$$

从而由 RS 平行并等于 BD 得

$$MP\cdot MQ:MR\cdot MS=cG\cdot cH:BH\cdot DH.$$

由三角形 APp, AGc 相似,得

$$Pp:AP=Gc:AG,$$

从而由

$$AP:AG=BQ:BH,$$

得

$$Pp : BQ = Gc : BH,$$

由三角形 DSs, cHD 相似,得

$$DS(MQ) : Ss = cH : DH.$$

利用 $BQ = MR$,从这两个比式得

$$MQ \cdot Pp : MR \cdot Ss = cG \cdot cH : BH \cdot DH.$$

同前面的比例式比较,得

$$MP \cdot MQ : MR \cdot MS = Pp \cdot MQ : MR \cdot Ss;$$

前项取和后项取和,得

$$MP \cdot MQ : MR \cdot MS = Mp \cdot MQ : MR \cdot Ms;$$

即与点 c, M 在曲线上的位置无关,只要过点 M 的直线 MQ, Rs 平行于弦 AB, CD, $Mp \cdot MQ$ 比 $MR \cdot Ms$ 的值就不变.

从所得比例式得

$$MP : MS = Mp : Ms.$$

即只要点 M 不变,点 c 变动时只是点 p, s 的位置变动, Mp 比 Ms 的值不变.

§ 99

设 A, B, C, D 为二阶线上的任意四点,连四点成内接四边形

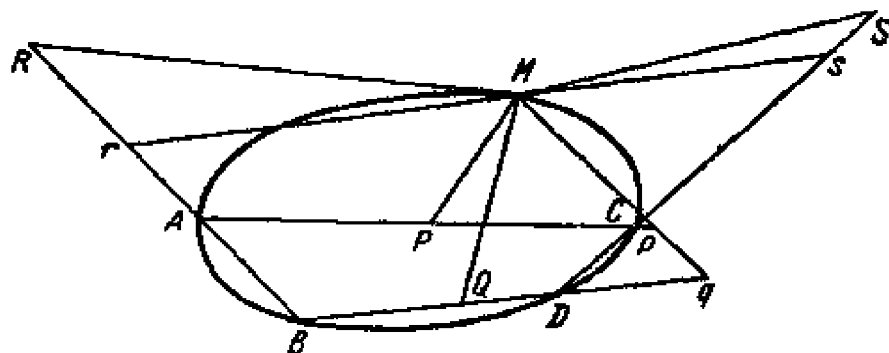


图 23

(图 23),利用前面所讲,我们可以推出圆锥曲线的一条性质.从曲线上任何一点 M 向四边形的四边引直线 MP,MQ,MR,MS,使与四边所成的角相等,都等于给定的角,则引向对边的直线的长度的积的比为常数,即对曲线上任意一点 M,只要 P,Q,R,S 处的角相同,$MP\cdot MQ$ 比 $MR\cdot MS$ 就为固定的数.为证明这一点,我们过点 M 引两条直线 Mq 和 rs,前者平行于 AB,后者平行于 BD,记这两条线与四边形各边的交点为 p,q,r,s,那么由前面讲的我们知道 $Mp\cdot Mq$ 比 $Mr\cdot Ms$ 为面定的数,由于角为已给,所以比 $MP:Mp$,$MQ:Mq$,$MR:Mr$,MS 都为已给,从面 $MP\cdot MQ$ 比 $MR\cdot MS$ 为已给.

§ 100

前面我们看到,如果延长平行弦 MN,mn,使其与切线 CPp 相交于 P,p,如图 24,则

$$PM\cdot PN:CP^2=$$
$$pm\cdot pn:Cp^2.$$

如果我们选择点 L,l,使 PL 是 PM,PN 的比例中项,pl 是 pm,pn 的比例中项,则

$$PL^2:CP^2=pl^2:Cp^2,$$

从而 $PL:CP=pl:Cp$,由此知 L,l 在过切点 C 的直线上.因此,如果点 L 分任何一条纵标线 PMN 成 $PL^2=PM\cdot PN$,则过

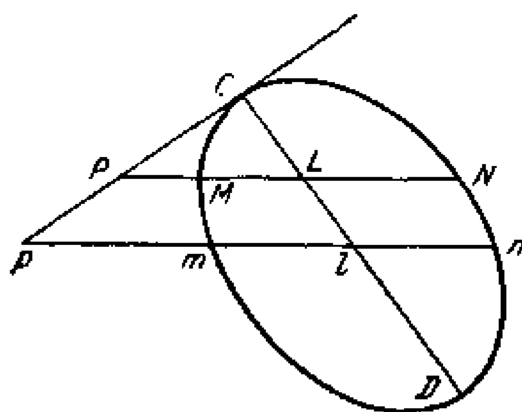


图 24

点 C,L 的直线 CLD 与任一纵标线 pmn 的交点 l 都分 pmn,使得 pl 是 pm,pn 的比例中项.或者,如果点 L,l 分纵标线 PN,pn,使得

$$PL^2=PM\cdot PN,\ pl^2=pm\cdot pn,$$

则点 L,l,C 共线,且这条直线以同样的比分一切与 PN,pn 平行

的纵标线.

§ 101

前面我们讨论了二阶线的直接从方程形状得到的性质.下面我们讨论更为深入的性质.从二阶线的通用方程

$$y^2+\frac{\varepsilon x+\gamma}{\zeta}y+\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta}=0,$$

我们看到,对给定的对应纵标为 PM,PN 的横标 $AP=x$,我们可以确定等分弦 MN 的直径.事实上,设 IG 是求得的直径(图 25),它在点 L 处等分弦 MN.令 $PL=z$,由 $z=\frac{1}{2}PM+\frac{1}{2}PN$

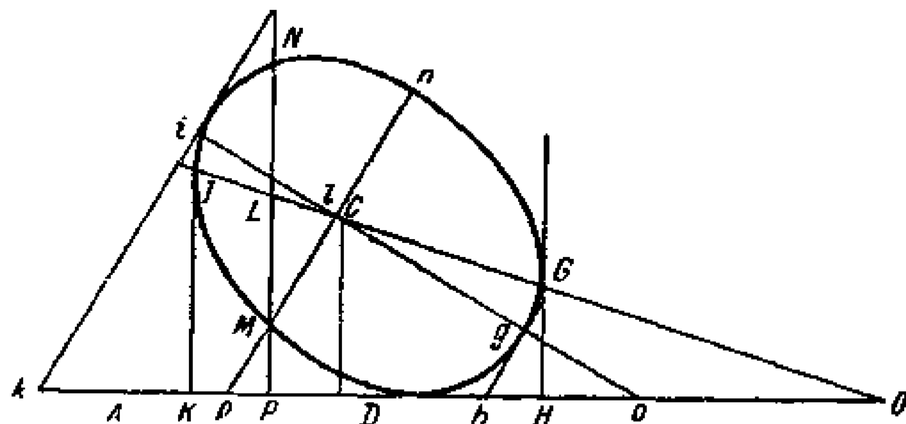


图 25

得

$$z=\frac{-\varepsilon x-\gamma}{2\zeta},$$

或

$$2\zeta z+\varepsilon x+\gamma=0.$$

该方程给出直径 IG 的位置.

§ 102

由此我们可以算出直径 IG 的长，直径是曲线上 M，N 的重合，也即 $PM=PN$ 这样两个点的连线．由曲线方程知

$$PM+PN=\frac{-\varepsilon x-\gamma}{\zeta},PM\cdot PN=\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta},$$

从而

$$(PM-PN)^2=(PM+PN)^2-4PM\cdot PN$$
$$=\frac{(\varepsilon^2-4\delta\zeta)x^2+2(\varepsilon\gamma-2\beta\zeta)x+(\gamma^2-4\alpha\zeta)}{\zeta^2}=0$$

或

$$x^2-\frac{2(2\beta\zeta-\varepsilon\gamma)}{\varepsilon^2-4\delta\zeta}x+\frac{\gamma^2-4\alpha\zeta}{\varepsilon^2-4\delta\zeta}=0.$$

由 AK，AH 为该方程的根，我们有

$$AK+AH=\frac{4\beta\zeta-2\varepsilon\gamma}{\varepsilon^2-4\delta\zeta},\ AK\cdot AH=\frac{\gamma^2-4\alpha\zeta}{\varepsilon^2-4\delta\zeta}.$$

从而

$$(AH-AK)^2=KH^2=\frac{4(2\beta\zeta-\varepsilon\gamma)^2-4(\varepsilon^2-4\delta\zeta)(\gamma^2-4\alpha\zeta)}{(\varepsilon^2-4\delta\zeta)^2}.$$

如果取直角坐标，则

$$IG^2=\frac{\varepsilon^2-4\zeta^2}{4\zeta^2}KH^2.$$

§ 103

前面我们考虑了直角坐标情形，现在我们来求斜角坐标方程．从曲线上任一点 M 向轴画纵标线 Mp，与轴的交角为 MpH，记该角的正弦为 μ，余弦为 υ．令新横标 $Ap=t$，新纵标 $pM=u$，我们有

$$\frac{\gamma}{u}=\mu,\ \frac{Pp}{u}=\upsilon,$$
从而
$$y=\mu u,\ x=t+\upsilon u.$$
将这两个值代入 x,y 间方程
$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2,$$
得
$$\begin{aligned}0=\alpha+\beta t\ &+\upsilon\beta u+\delta t^2\ +2\upsilon\delta tu\ +\upsilon^2\delta u^2\\ &+\mu\gamma u\qquad\quad +\mu\varepsilon tu\ \ +\mu\upsilon\varepsilon u^2\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\mu^2\zeta u^2\end{aligned}$$
或
$$u^2+\frac{[(\mu\varepsilon+2\upsilon\delta)t+\mu\gamma+\upsilon\beta]u+\delta t^2+\beta t+\alpha}{\mu^2\zeta+\mu\upsilon\varepsilon+\upsilon^2\delta}=0.$$

§ 104

这里每个纵标都有 pM 和 pn 两个值，因此，我们可照做过的那样，求弦 Mn 的直径 ilg，点 l 等分 Mn，为直径上的点. 记 $pl=v$，则
$$v=\frac{pM+pn}{2}=\frac{-(\mu\varepsilon+2\upsilon\delta)t-\mu\gamma-\upsilon\beta}{2(\mu^2\zeta+\mu\upsilon\varepsilon+\upsilon^2\delta)}.$$
从 l 向轴 AH 引垂线 lq，记 $\overline{Aq}$[①] $=p$，$\overline{ql}$[①] $=q$，我们有
$$\mu=\frac{q}{v},\ \upsilon=\frac{\overline{pq}}{v}=\frac{p-t}{v},$$
从而
$$v=\frac{q}{\mu},\ t=p-\upsilon v=p-\frac{\upsilon q}{\mu}.$$
代这两个值入求得的 t,υ 间方程，得
$$\frac{q}{\mu}=\frac{-\mu\varepsilon p-2\upsilon\delta p+\upsilon\varepsilon q+2\upsilon^2\delta q:\mu-\mu\gamma-\upsilon\beta}{2\mu^2\zeta+2\mu\upsilon\varepsilon+2\upsilon^2\delta},$$

---

① 这里字母上方的横表示对应线段的长. p,q 既表示点，也表示线段长.

或

$$(2\mu^2\zeta + \mu\upsilon\varepsilon)q + (\mu^2\varepsilon + 2\mu\upsilon\delta)p + \mu^2\gamma + \mu\upsilon\beta = 0,$$

或

$$(2\mu\zeta + \upsilon\varepsilon)q + (\mu\varepsilon + 2\upsilon\delta)p + \gamma\mu + \upsilon\beta = 0.$$

直径 ig 的位置由该方程决定.

§ 105

延长方程 $2\zeta z + \varepsilon x + \gamma = 0$ 决定的直径 IG 交轴于点 O,我们有 $AO = \frac{-\gamma}{\varepsilon}$.从而

$$PO = \frac{-\gamma}{\varepsilon} - x.$$

角 LOP 的正切

$$= \frac{z}{PO} = \frac{-\varepsilon z}{\varepsilon x + \gamma} = \frac{\varepsilon}{2\zeta},$$

直径 IG 等分弦 MN 处的角 MLG 的正切 $= \frac{2\zeta}{\varepsilon}$. 延长另一个直径 ig,交轴于 o,则

$$Ao = \frac{-\mu\gamma - \upsilon\beta}{\mu\varepsilon + 2\upsilon\delta},$$

角 Aol 的正切

$$= \frac{\mu\varepsilon + 2\upsilon\delta}{2\mu\zeta + \upsilon\varepsilon}.$$

由于角 AOL 的正切 $= \frac{\varepsilon}{2\zeta}$,两个直径交于某点 C,交角 $OCo = Aol - AOL$,其正切

$$= \frac{4\upsilon\delta\zeta - \upsilon\varepsilon^2}{4\mu\zeta^2 + 2\upsilon\delta\varepsilon + 2\upsilon\varepsilon\zeta + \mu\varepsilon^2}.$$

第二个直径等分弦处的角 $Mlo = 180° - lpo - Aol$,其正切

$$= \frac{2\mu^2\zeta + 2\mu\upsilon\varepsilon + 2\upsilon^2\delta}{\mu^2\varepsilon + 2\mu\upsilon\delta - 2\mu\upsilon\zeta - \upsilon^2\varepsilon}.$$

§ 106

我们来考虑两直径交点 C 的位置. 从 C 向轴画垂线 CD, 令 $AD=g$, $CD=h$. 先由 C 在直径 IG 上, 我们有

$$2\zeta h+\varepsilon g+\gamma=0,$$

再由 C 在直径 ig 上我们有

$$(2M\zeta+\upsilon\varepsilon)h+(\mu\varepsilon+2\upsilon\delta)g+\mu\gamma+\upsilon\beta=0.$$

乘前一个以 μ, 从后一个减去, 得

$$\upsilon\varepsilon h+2\upsilon\delta g+\upsilon\beta=0,\ 或\ \varepsilon h+2\delta g+\beta=0.$$

从而

$$h=\frac{-\varepsilon g-\gamma}{2\zeta}=\frac{2\delta g-\beta}{\varepsilon}.$$

进而 $(\varepsilon^2-4\delta\zeta)g=2\beta\zeta-\gamma\varepsilon$,

$$g=\frac{2\beta\zeta-\gamma\varepsilon}{\varepsilon^2-4\delta\zeta},\ h=\frac{2\gamma\delta-\beta\varepsilon}{\varepsilon^2-4\delta\zeta}.$$

纵标 pMn 的倾斜程度决定于 μ,υ. 我们求得的表达式中不含这两个量, 这清楚地告诉我们, 点 C 的位置与纵标的倾斜程度无关.

§ 107

这也就是说, 所有的直径 IG, ig 交于同一点 C. 因而这个点一旦求出来, 所有的直径都通过它, 并且通过它的弦都是直径, 每条直径等分一种平行弦. 这 C 点对每一个具体二阶线唯一, 又直径都通过它, 因而通常称它为圆锥曲线的中心. 前面, 从 x,y 间方程

$$0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2,$$

我们得到了

$$AD=\frac{2\beta\zeta-\gamma\varepsilon}{\varepsilon^2-4\delta\zeta},\ CD=\frac{2\gamma\delta-\beta\varepsilon}{\varepsilon^2-4\delta\zeta}.$$

§ 108

前面我们推出了

$$AK + AH = \frac{4\beta\zeta - 2\gamma\varepsilon}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta},$$

IK 和 GH 是从 IG 端点向轴所引垂线.比较 AD 与 $AK + AH$ 的右端，得

$$AD = \frac{AK + AH}{2},$$

即 D 是线段 KH 的中点，因此中心 C 是 IG 的中点，IG 为任一直径.这样我们得到，所有直径不仅相交于一点 C，并且都被 C 点等分.

§ 109

我们任取一根直径 AI 作轴(图 26)，记弦 MN 与 AI 所成角 $APM = q$，记该角的正弦为 m，余弦为 n.取横标 $AP = x$，纵标 $PM = y$.由 y 的两个值大小相等符号相反和为零，知此时二阶线通用方程的形状为

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2.$$

令 $y = 0$，则该方程给出轴与曲线的交点 G, I.

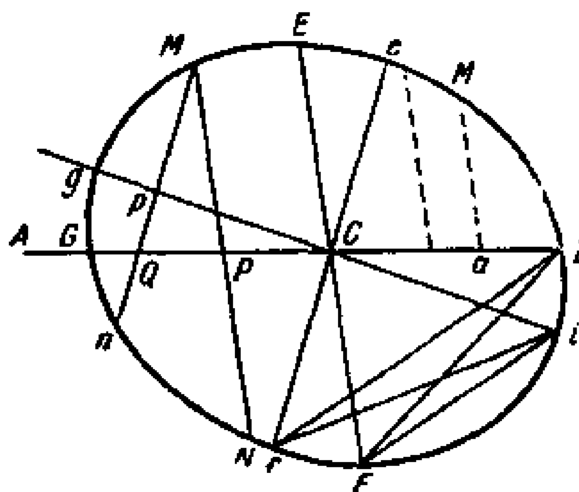


图 26

因而方程

$$x^2 + \frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha}{\gamma} = 0$$

的根为 $x = AG$, $x = AI$.从而

$$AG + AI = \frac{-\beta}{\gamma},\ AG \cdot AI = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

由中心 C 为直径 GI 的中点,我们得到圆锥曲线的中心 C 为

$$AC = \frac{AG + AI}{2} = \frac{-\beta}{2\gamma}.$$

§ 110

知道了圆锥曲线中心 C 在轴 AI 上的位置,最好取它作横标原点.在这样的选择下,令 $CP = t$,保持 $PM = y$,则由

$$x = AC - CP = \frac{-\beta}{2\gamma} - t,$$

得 t, y 间方程

$$y^2 = \alpha - \frac{\beta^2}{2\gamma} + \frac{\beta^2}{4\gamma} - \beta t + \beta t + \gamma t^2,$$

或

$$y^2 = \alpha - \frac{\beta^2}{4\gamma} + \gamma t^2.$$

记常数部分为 α, t^2 的系数为 $-\beta$,并换 t 为 x,我们得到直径为轴,中心为原点时二阶线的通用方程为 $y^2 = \alpha - \beta x^2$.令该方程中的 $y = 0$,得 $GG = CI = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$,从而直径 GI 的全长 $= 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

§ 111

置 $x = 0$,来求过中心的弦 EF,得半弦 $CE = CF = \sqrt{\alpha}$,全弦 $EF = 2\sqrt{\alpha}$. EF 过中心,所以它也是直径,记它与直径 GI 所成的角 $ECG = q$.第二条直径 EF 也等分平行于第一条直径 GI 的所有弦.在纵标 PM 的对侧,即 I 侧取纵标 aM 等于 PM.纵标 aM, PM 平

行，因而两个 M 点的连线平行于 GI，且被 EF 平分. 直径 GI, EF 平分平行于对方的所有弦，称这样的两个弦为共轭弦. 这两个直径，过每一个的端点平行于另一个的直线都是切线，即过 E, F 平行于 GI 的直线和过 G, I 平行于 EF 的直线都是切线.

§ 112

任意引一条斜角坐标线 MQ，记角 $AQM = \varphi$，它的正弦 $= \mu$，余弦 $= \upsilon$. 记横标 $CQ = t$，纵标 $MQ = u$. 从三角形 PMQ 得角 $PMQ = \varphi - q$，$\sin PMQ = \mu n - \upsilon m$

和

$$y : u : PQ = \mu : m : (\mu n - \upsilon m),$$

从而

$$y = \frac{\mu u}{m},\ PQ = \frac{(\mu n - \upsilon m) u}{m},$$

进而

$$x = t - PQ = t - \frac{(\mu n - \upsilon m) u}{m}.$$

代这两个值入前而导出的方程

$$y^2 = \alpha - \beta x^2 或\ y^2 + \beta x^2 - \alpha = 0,$$

得

$$[\mu^2 + \beta(\mu n - \upsilon m)^2] u^2 - 2\beta(\mu n - \upsilon m) mtu + \beta m^2 t^2 - \alpha m^2 = 0,$$

从该方程我们得到：对纵标 QM 和 $-Qn$ 的值，我们有

$$QM - Qn = \frac{2\beta m(\mu n - \upsilon m) t}{\mu^2 + \beta(\mu n - \upsilon m)^2}.$$

设点 p 等分弦 Mn，则直线 Cpg 是新的直径，它等分平行于 Mn 的一切弦，因而

$$Qp = \frac{\beta m(\mu n - \upsilon m) t}{\mu^2 + \beta(\mu n - \upsilon m)^2}.$$

§ 113

由此我们得到角 GCg 的正切

$$=\frac{\mu\cdot Qp}{CQ+\upsilon\cdot Qp}=\frac{\beta m(\mu n-\upsilon m)}{\mu+n\beta(\mu n-\upsilon m)},$$

角 Mpg 的正切

$$=\frac{\mu\cdot CQ}{pQ+\upsilon\cdot CQ}=\frac{\mu^2+\beta(\mu n-\upsilon m)^2}{\mu\upsilon+\beta(\mu n-\upsilon m)(\upsilon n+\mu m)};$$

角 Mpg 是直径 gi 等分弦 Mn 处的角,进一步我们有

$$\begin{aligned}Cp^2&=CQ^2+Qp^2+2\upsilon\cdot CQ\cdot Qp\\&=\frac{\mu^4+2\beta\mu^3 n(\mu n-\upsilon m)+\beta^2\mu^2(\mu n-\upsilon m)^2}{[\mu^2+\beta(\mu n-\upsilon m)^2]^2}t^2,\end{aligned}$$

从而

$$Cp=\frac{\mu t\sqrt{\mu^2+2\beta\mu n(\mu n-\upsilon m)+\beta^2(\mu n-\upsilon m)^2}}{\mu^2+\beta(\mu n-\upsilon m)^2}.$$

置 $Cp=r$, $pM=s$,则

$$t=\frac{[\mu^2+\beta(\mu n-\upsilon m)^2]r}{\mu\sqrt{\mu^2+2\beta\mu n(\mu n-\upsilon m)+\beta^2(\mu n-\upsilon m)^2}},$$

$$u=s+Qp=s+\frac{\beta m(\mu n-\upsilon m)r}{\mu\sqrt{\mu^2+2\beta\mu n(\mu n-\upsilon m)+\beta^2(\mu n-\upsilon m)^2}},$$

代这两个值入 y 和 x 的表达式,得

$$y=\frac{\mu s}{m}+\frac{\beta(\mu n-\upsilon m)r}{\sqrt{(\cdots)}},$$

$$x=-\frac{(\mu n-\upsilon m)s}{m}+\frac{\mu r}{\sqrt{(\cdots)}},$$

代入方程 $y^2+\beta x^2-\alpha=0$,得

$$\frac{[\mu^2+\beta(\mu n-\upsilon m)^2]s^2}{m^2}+\frac{\beta[\mu^2+\beta(\mu n-\upsilon m)^2]r^2}{\mu^2+2\beta\mu n(\mu n-\upsilon m)+\beta^2(\mu n-\upsilon m)^2}-\alpha=0.$$

§ 114

记半直径 CG 为f,其共轭半直径 $CE = CF$ 为g,我们有

$$f=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}},\ g=\sqrt{\alpha},$$

或

$$\alpha = g^2,\ \beta=\frac{g^2}{f^2},$$

从而

$$y^2+\frac{g^2x^2}{f^2}=g^2.$$

记角 $GCg = p$,则

$$\mathrm{tg}p=\frac{\beta m(\mu n-\upsilon m)}{\mu+n\beta(\mu n-\upsilon m)}.$$

角 $GCE = q$,如果令角 $ECe=\pi$,则 $AQM=\varphi=q+\pi$,于是

$$\mu=\sin(q+\pi),\upsilon=\cos(q+\pi),m=\sin q,n=\cos q.$$

从而

$$\mathrm{tg}p=\frac{\beta\sin q\sin\pi}{\sin(q+\pi)+\beta\cos q\ \sin\pi}=\frac{\beta\mathrm{tg}q\mathrm{tg}\pi}{\mathrm{tg}\ q+\mathrm{tg}\pi+\beta\mathrm{tg}\pi},$$

$$\sin p=\frac{\beta\ \sin\ q\ \sin\ \pi}{\sqrt{\mu^2+2\beta\mu n(\mu n-\upsilon m)+\beta^2(\mu n-\upsilon m)^2}},$$

且

$$\mu^2+\beta(\mu n-\upsilon m)^2=\sin^2(q+\pi)+\beta\sin^2\pi.$$

利用这些值我们得到 r,s 间方程

$$\frac{[\sin^2(q+\pi)+\beta\sin^2\pi]s^2}{\sin^2q}+\frac{\beta[\sin^2(q+\pi)+\beta\sin^2\pi]r^2}{\beta^2\sin^2\ q\ \sin^2\pi}\cdot$$

$$\sin^2p\ -\ \alpha=0.$$

但

$$\beta=\frac{\mathrm{tg}p\sin(q+\pi)}{(\sin q-\cos q\,\mathrm{tg}p)\sin\pi}=\frac{\mathrm{tg}p(\mathrm{tg}q+\mathrm{tg}\pi)}{\mathrm{tg}\pi(\mathrm{tg}q-\mathrm{tg}p)}=\frac{g^2}{f^2}$$
$$=\frac{\mathrm{ctg}\pi\,\mathrm{tg}q+1}{\mathrm{ctg}p\,\mathrm{tg}q-1},$$

从而

$$\mathrm{tg}q=\frac{f^2+g^2}{g^2\mathrm{ctg}p-f^2\mathrm{ctg}\pi},$$

由此可以得到多个推论,

$$\frac{g^2}{f^2}=\frac{\sin p\sin(q+\pi)}{\sin\pi\sin(q-p)}$$

是其中之一.

§ 115

令半直径 $Cg=a$,令其共轭半直径 $Ce=b$,那么由前面求出的方程,得

$$a=\frac{\sin q\sin\pi\sqrt{\alpha\beta}}{\sin p\sqrt{\sin^2(q+\pi)+\beta\sin^2\pi}}$$
$$=\frac{g^2\sin q\sin\pi}{\sin p\sqrt{f^2\sin^2(q+\pi)+g^2\sin^2\pi}},$$
$$b=\frac{fg\sin q}{\sqrt{f^2\sin^2(q+\pi)+g^2\sin^2\pi}},$$

从而

$$a:b=g\sin\pi:f\sin p.$$

再者,由

$$\sin^2(q+\pi)+\frac{g^2}{f^2}\sin^2\pi=\frac{\sin(q+\pi)}{\sin(q-p)}[\sin(q-p)\sin(q+\pi)+\sin p\sin\pi]=\frac{\sin q\sin(q+\pi)\sin(q+\pi-p)}{\sin(q-p)},$$

得

$$a=\frac{g^2\sin\pi}{f\sin p}\sqrt{\frac{\sin q\sin(q-p)}{\sin(q+\pi)\sin(q+\pi-p)}};$$

由

$$\frac{g^2}{f^2}=\frac{\sin p\sin(q+\pi)}{\sin\pi\sin(q-p)},$$

得

$$a=f\sqrt{\frac{\sin q\sin(q+\pi)}{\sin(q-p)\sin(q+\pi-p)}},$$

$$b=g\sqrt{\frac{\sin q\sin(q-p)}{\sin(q+\pi)\sin(q+\pi-p)}},$$

从而

$$a:b=f\sin(q+\pi):g\sin(q-p),\ ab=\frac{fg\sin q}{\sin(q+\pi-p)}.$$

§ 116

如果有两对共轭直径 GI,EF 和 gi,ef,则

$$Cg:Ce=CE\sin ECe:CG\sin GCg.$$

从而

$$\sin GCg:\sin ECe=CE\cdot Ce:CG\cdot Cg.$$

画出弦 Ee,Gg,则三角形 CGg,CEe 相等,我们有

$$Cg:Ce=CG\sin GCe:CE\sin gCE,$$

或

$$Ce\cdot CG\sin GCe=CE\cdot Cg\sin gCE,$$

从而,画出弦 Ge,gE,则三角形 GCe,gCE 面积相等,它们的对顶三角形 ICf,iCF 的面积也相等.上节末的方程

$$ab\sin(q+\pi-p)=fg\sin q$$

给出

$$Cg \cdot Ce \sin gCe = CG \cdot CE \sin GCE.$$

即弦 EG,eg 与中心 C 所成三角形 GCE,gCe 面积相等.它们的对顶三角形 ICF,iCf 的面积自然也相等,由此得,以共轭两直径为对角线的这些平行四边形相等.

§ 117

这样,我们有三对面积相等的三角形:

Ⅰ. FCf, ICi;

Ⅱ. fCI, FCi;

Ⅲ. FCI, fCi.

由此得四边形 $FfCI$,$iICf$ 相等.从这两个四边形中去掉同一个三角形 fCI,得三角形 FIf,Ifi 相等.由于这两个三角形共底 fI,我们得到弦 Fi,fI 平行,将相等的三角形 FIi,ifF 加到相等的三角形 FCI,fCi 上去,得四边形 $FCIi$,$iCfF$ 相等.

§ 118

利用这一结果,我们可以求出任何二阶曲线上任何一点 M 处的切线 MT(图 27).取直径 GI 作轴,EC 是与它共轭的半径.从 M 引平行于直线 CE 的弦 MN 交轴于 P,则 $PN = PM$.连半直径 CM,我们来求 CM 的共轭半直径 CK,过 M 点平行于这 CK 的直线就是我们所要的切线 MT.设 $GCE = q$, $GCM = p$, $ECK = \pi$.

前面我们推出了

$$\frac{EC^2}{GC^2} = \frac{\sin p \sin(q+\pi)}{\sin\pi \sin(q-p)},$$

$$MC = CG\sqrt{\frac{\sin q \sin(q+\pi)}{\sin(q-p)\sin(q+\pi-p)}}.$$

从三角形 CMP 得

$$MC^2 = CP^2 + MP^2 + 2PM \cdot CP\cos q,$$

$$MP : MC = \sin p : \sin q,$$

$$MP : CP = \sin p : \sin(q - p).$$

从角已知的三角形 CMT 得

$$CM : CT : MT = \sin(q + \pi) : \sin(q + \pi - p) : \sin p.$$

消去角,得

$$MC = CG\sqrt{\frac{MC \cdot CM}{CP \cdot CT}},$$

或 $CG^2 = CP \cdot CT$. 从而 $CP : CG = CG : CT$,由此即可确定切线的位置.事实上,对该比式应用分比定理①得 $CP : PG = CG : TG$,应用合比定理①,并利用 $CG = CI$,得 $CP : IP = CG : TI$.

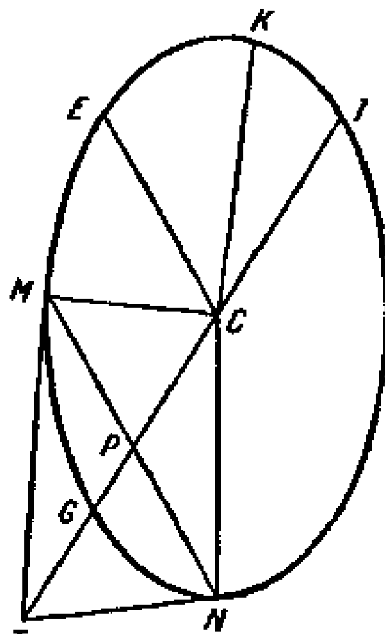


图 27

§ 119

由

$$\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\sin p \sin(q + \pi)}{\sin \pi \sin(q - p)}, \frac{CK^2}{CM^2} = \frac{\sin p \sin(q - p)}{\sin \pi \sin(q + \pi)},$$

以及

$$\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\sin q \sin(q + \pi)}{\sin(q - p)\sin(q + \pi - p)},$$

$$\frac{CK^2}{CE^2} = \frac{\sin q \sin(q - p)}{\sin(q + \pi)\sin(q + \pi - p)},$$

得

① 这里我们用了现在的术语——译者.

$$\frac{CE^2+CG^2}{CG^2}=\frac{\sin p\sin(q+\pi)+\sin\pi\sin(q-p)}{\sin\pi\sin(q-p)}$$

和

$$\frac{CK^2+CM^2}{CM^2}=\frac{\sin p\sin(q-p)+\sin\pi\sin(q+\pi)}{\sin\pi\sin(q+\pi)}.$$

利用

$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}\cos(A-B)-\frac{1}{2}\cos(A+B)$$

和

$$\frac{1}{2}\cos A-\frac{1}{2}\cos B=\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2},$$

得

$$\begin{aligned}&\sin p\sin(q+\pi)+\sin\pi\sin(q-p)\\&\quad=\frac{1}{2}\cos(q+\pi-p)-\frac{1}{2}\cos(q+\pi+p)+\frac{1}{2}\cos(q\\&\quad-\pi-p)-\frac{1}{2}\cos(q+\pi-p)=\frac{1}{2}\cos(q-\pi-p)\\&\quad-\frac{1}{2}\cos(q+\pi+p)=\sin q\sin(p+\pi),\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\sin p\sin(q-p)+\sin\pi\sin(q+\pi)\\&\quad=\frac{1}{2}\cos(q-2p)-\frac{1}{2}\cos q+\frac{1}{2}\cos q-\frac{1}{2}\cos(q+\\&\quad2\pi)=\frac{1}{2}\cos(q-2p)-\frac{1}{2}\cos(q+2\pi)=\sin(q+\pi\\&\quad-p)\sin(p+\pi).\end{aligned}$$

代人我们得到的表达式,得

$$\frac{CE^2+CG^2}{CG^2}=\frac{\sin q\sin(p+\pi)}{\sin\pi\sin(q-p)}$$

和

$$\frac{CK^2+CM^2}{CM^2}=\frac{\sin(q+\pi-p)\sin(p+\pi)}{\sin\pi\sin(q+\pi)},$$

从而

$$\frac{CE^2+CG^2}{CK^2+CM^2}=\frac{CG^2}{CM^2}\frac{\sin q\sin(q+\pi)}{\sin(q-p)\sin(q+\pi-p)}$$
$$=\frac{CG^2}{CM^2}\frac{CM^2}{CG^2}.$$

我们得到

$$CE^2+CG^2=CK^2+CM^2.$$

即二阶曲线的共轭半直径的平方和为常数.

§ 120

这样,有了一对共轭半直径 CG, CE,我们就可以求出任一半直径 CM 的共轭半直径 CK,

$$CK=\sqrt{CE^2+CG^2-CM^2}.$$

从而根据 § 92 推出的圆锥曲线的性质,我们有

$$TG\cdot TI:TM^2=CG\cdot CI:CK^2=CG^2:CK^2$$
$$=CG^2:(CE^2+CG^2-CM^2),$$

从而

$$TM=\frac{1}{CG}\sqrt{TG\cdot TI(CE^2+CG^2-CM^2)}.$$

同样地,如果画弦 MN,再画切线 NT,则切线 MT, NT 交轴 TI 于同一点,都为 T,因为对这两个交点我们都有 $CP:CG=CG:CT$. 如果画直线 CN,则

$$TN=\frac{1}{CG}\sqrt{TG\cdot TI(CE^2+CG^2-CN^2)},$$

从而

$$TM^2:TN^2=(CE^2+CG^2-CM^2):(CE^2+CG^2-CN^2).$$

由点 P 等分 MN 得

$$\sin CTM:\sin CTN=TN:TM$$

$$=\sqrt{CE^2+CG^2-CN^2}:\sqrt{CE^2+CG^2-CM^2}.$$

§ 121

作直径端点 A,B 处切线 AK,BL(图 28),分别交任一切线 MT 于 K,L.设 ECF 为 AB 的共轭直径,纵标 MP 平行于 ECF,也平行于切线 AK,BL.由切线性质,我们有

$$CP:CA=CA:CT,$$

再利用 $CB=CA$,得

$$CP:AP=CA:AT,$$

$$CP:BP=CA:BT.$$

从而

$$CP:CA=CA:CT=AP:AT=BP:BT,$$

进而

$$AT:BT=AP:BP,$$

但 $AT:BT=AK:BL$,因而

$$AK:BL=AP:BP.$$

图 28

我们有

$$AT=\frac{CA\cdot AP}{CP},BT=\frac{CA\cdot BP}{CP}$$

和

$$PT=\frac{CA\cdot AP}{CP}+AP=\frac{AP\cdot BP}{CP},$$

从而

$$AT:PT=CA:BP=AK:PM.$$

类似地,我们得到

$$BT:PT=CA:AP=BL:PM,$$

从而

$$AK=\frac{CA\cdot PM}{BP},BL=\frac{CA\cdot PM}{AP},$$

和

$$AK\cdot BL=\frac{CA^2\cdot PM^2}{AP\cdot BP}.$$

但 $AP\cdot BP:PM^2=AC^2:CE^2$,我们得到一条重要性质

$$AK\cdot BL=CE^2,$$

继而得到

$$AK=CE\sqrt{\frac{AP}{BP}},BL=CE\sqrt{\frac{BP}{AP}},$$

$$AP:BP=AK^2:CE^2=CE^2:BL^2=KM:ML,$$

以及

$$AK:BL=KM:LM.$$

§ 122

我们得到了这样的结论,当从曲线上任一点 M 引切线交另外两条平行切线 AK,BL 于点 K,L 时,则平行于切线 AK,BL 的半直径 CE 是 AK,BL 的比例中项,即 $CE^2=AK\cdot BL$.换任意点 M 为 m,换切线 KML 为 kml,则 $CE^2=Ak\cdot Bl$,从而

$$AK:Ak=Bl:BL,$$

由此得

$$Ak:Kk=Bl:Ll.$$

如果切线 KL,kl 交于点 o,则

$$AK:Bl=Ak:BL=Kk:Ll=ko:lo=Ko:Lo.$$

牛顿在他的《原理》中,利用圆锥曲线的这些基本性质,解决了不少

重要问题.

§ 123

由于 $AK:BL=Ko:Lo$,如果延长切线 LB 至 I,使 $BI=AK$,那么跟切线 LK 上点 K 是平行于 BL 的切线 AK 与 LK 的交点一样,I 是 KL 对面与 KL 平行的切线与 LB 的交点,因而直线 IK 过中心 C,并被 C 等分.如果照刚说的这样延长任何两条切线 BL 和 ML 到 I 和 K,又如果第三条切线 lmo 交它们于 l,o,则 $BI:Bl=Ko:Lo$,应用合比得 $IB:Il=Ko:KL$.从面对不管哪一点处的第三条切线 lmo,我们都有 $IB\cdot KL=Il\cdot Ko$.如果画第四条切线 $\lambda\mu\omega$,交 IL,KL 于 λ 和 ω,则同样地我们有

$$IB\cdot KL=I\lambda\cdot K\omega,$$

因而 $Il\cdot Ko=I\lambda\cdot K\omega$ 或 $Il:I\lambda=K\omega:Ko$.连直线 $l\omega$ 和 λo,并以相同的比划分它们,不管这个比是怎样的,过这两个分点的直线,都以这个比分 IK.特别地,如果平分 $l\omega,\lambda o$,则过分点的直线也平分 IK,即过中心 C.

§ 124

参见图 29,$Il:I\lambda=K\omega:Ko$ 时,直线 nmH 以分直线 $l\omega,\lambda o$ 的比分直线 KI.这可用几何方法证明.设直线 mn 分 $l\omega,\lambda o$ 的比都为 $m:n$,即 $\lambda m:mo=ln:n\omega=m:n$.延长 mn 交切线 IL,KL 于 Q,R,

则 $$\sin Q:\sin R=\frac{ln}{Ql}:\frac{n\omega}{R\omega}=\frac{\lambda m}{Q\lambda}:\frac{mo}{Ro}=\frac{m}{Ql}:\frac{n}{R\omega}.$$

从面 $Ql:R\omega=Q\lambda:Ro$,应用分比,得

$$l\lambda:o\omega=Q\lambda:Ro=Ql:R\omega.$$

由 $I\lambda:o\omega=I\lambda:Ko$,得

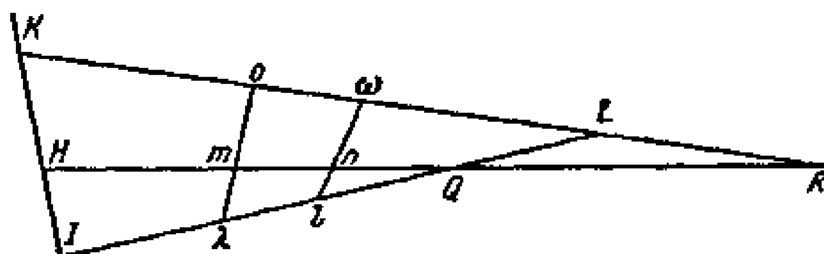


图 29

$$QI : RK = l\lambda : o\omega, \sin Q : \sin R = \frac{m}{l\lambda} : \frac{n}{o\omega}.$$

但我们有

$$\sin Q : \sin K = \frac{HI}{QI} : \frac{HK}{KR} = \frac{HI}{l\lambda} : \frac{HK}{o\omega},$$

从而

$$HI : HK = m : n = \lambda m : mo = ln : n\omega.$$

§ 125

给定夹角 $GCE = q$ 的共轭半直径 CG, CE,我们就可以求出夹角 MCK 为直角的另外两个共轭半直径 CM, CK(图 27). 设角 $GCM = p$,如果令角 $ECK = \pi$,则 $q + \pi - p = 90°$,因而

$$\sin\pi = \cos(q-p),\ \sin(q+\pi) = \cos p.$$

由此根据 § 119 得

$$\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\sin p\cos p}{\sin(q-p)\cos(q-p)} = \frac{\sin 2p}{\sin 2(q-p)}$$
$$= \frac{\sin 2p}{\sin 2q\cos 2p - \cos 2q\sin 2p}.$$

从而

$$\frac{CG^2}{CE^2} = \sin 2q\,\mathrm{ctg}2p - \cos 2q,$$

进而

$$\mathrm{ctg}2GCM = \mathrm{ctg}2q + \frac{CG^2}{CE^2\sin 2q},$$

该方程恒可解.由

$$\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\sin q\cos p}{\sin(q-p)},\ \frac{CG^2}{CM^2} = 1 - \frac{\mathrm{tg}p}{\mathrm{tg}q},$$

得

$$\mathrm{tg}p = \mathrm{tg}q - \frac{CG^2}{CM^2}\mathrm{tg}q.$$

由

$$CM^2 + CK^2 = CG^2 + CE^2, CK\cdot CM = CG\cdot CE\sin q,$$

得

$$CM + CK = \sqrt{CG^2 + 2CG\cdot CE\sin q + CE^2},$$

$$CM - CK = \sqrt{CG^2 - 2CG\cdot CE\sin q + CE^2},$$

由此即可确定互相垂直的共轭直径.

§ 126

设 CA,CE 是圆锥曲线的相垂直的共轭半直径(图 30).这种相交于中心 C 成直角的直径叫主直径.设横标 $CP = x$,纵标 $PM = y$,如我们看到了的,则 $y^2 = \alpha - \beta x^2$,记主半直径 $Ac = a$, $CE = b$,则 $\alpha = b^2$, $\beta = \frac{b^2}{a^2}$,从而

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}.$$

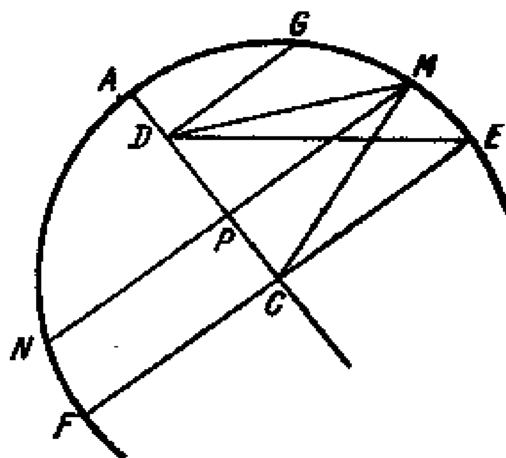


图 30

该方程不因 x,y 为正或为负而改变,可见曲线被直径 AC,CE 分成四个相似相等的部分,即象限

ACE 部分相似相等于象限 ACF 部分,直径 EF 对侧的两部分与这两部分相似相等.

§ 127

如果从我们取作横标原点的中心 C 引直线 CM,则它

$$=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}+x^2}.$$

可见,$b=a$,即 $CE=a$ 时,$CM=\sqrt{b^2}=b=a$.也即,此时从中心 C 引到曲线的直线都相等,而至中心距离相等,这样的曲线为圆.可见,共轭主直径相等的圆锥曲线是圆.取圆的半径 $CA=a$,令 $CP=x$,$PM=y$,在直角坐标下圆的方程为 $y^2=a^2-x^2$.

§ 128

如果 b 不等于 a,那么直线 CM 就不能用 x 有理表示,但是轴上存在这样的点 D,从 D 引到曲线的直线可以用 x 有理表示,我们来求这个 D 点.设 $CD=f$,则 $DP=f-x$,
从而

$$\begin{aligned} DM^2 &= f^2-2fx+x^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2} \\ &= b^2+f^2-2fx+\frac{(a^2-b^2)x^2}{a^2}. \end{aligned}$$

如果 $f^2=\frac{(a^2-b^2)(a^2+f^2)}{a^2}$,即 $0=a^2-b^2-f^2$,从而 $f=\pm\sqrt{a^2-b^2}$,则 DM^2 的表达式为完全平方.此时 AC 轴上有两个 D 点,至中心的距离 CD 都为$\sqrt{a^2-b^2}$.此时我们有

$$DM^2 = a^2 - 2x\sqrt{a^2-b^2} + \frac{(a^2-b^2)x^2}{a^2},$$

从而

$$DM = a - \frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a} = AC - \frac{CD\cdot CP}{AC}.$$

取 $CP = O$，得 $DM = DE = a = AC$，取横标 $CP = CD$，即 $x = \sqrt{a^2-b^2}$，则直线 DM 变成纵标 DG，得

$$DG = \frac{b^2}{a} = \frac{CE^2}{AC},$$

即 DG 是 AC，CE 的比例第三项.

§ 129

主直径上具有这种特殊性质的点 D，还具有另外很多重要性质. 这 D 点应该受到特别注意，给它取了个专门的名字，叫圆锥曲线的焦点或脐点，并称 D 所在直径 a 为主横轴，称另一直径 b 为共轭轴. 两个焦点处的直角纵标 DG 都叫半参数，过点 D 的弦叫全参数，全参数的长是半参数 DG 的两倍，也称全参数为 *latus rectum*. 共轭半轴 CE 是半参数 DG 和横半轴 AC 的比例中项. 主横轴的端点，也即主横轴与曲线的交点叫顶点，A 是一个顶点，顶点处切线垂直于主横轴 AC.

§ 130

置半参数 $DG = c$，顶点到焦点的距离 $AD = d$，

则

$$CD = a - d = \sqrt{a^2-b^2}, DG = \frac{b^2}{a} = c,$$

从而

$$b^2 = ac, a - d = \sqrt{a^2 - ac},$$

进而

$$ac = 2ad - d^2, a = \frac{d^2}{2d - c}, b = d\sqrt{\frac{c}{2d - c}}.$$

即焦点到顶点的距离 $AD = d$ 和半参数 $DG = c$ 完全决定圆锥曲线. 令 $CP = x$,则

$$DM = a - \frac{(a - d)x}{a} = \frac{d^2}{2d - c} - \frac{(c - d)x}{d}.$$

令 $DP = t$,则

$$x = CD - t = \frac{(c - d)d}{2d - c} - t,$$

从而

$$DM = c + \frac{(c - d)t}{d}.$$

记角 ADM 为 v,则

$$\frac{t}{DM} = -\cos v,$$

从而

$$d \cdot DM = cd + (d - c)DM\cos v,$$

$$DM = \frac{cd}{d - (d - c)\cos v}, \quad \cos v = \frac{d(DM - DG)}{(d - c)DM}.$$

第六章

二阶线分类

§ 131

前章所讲性质，不是只属于某些二阶线的，而是属于所有二阶线的，虽然二阶线具有那么多共有性质，但它们的形状却可以极为不同．因此，我们根据形状对二阶线进行分类，并对各类所独有的特性进行考察．

§ 132

只需变动轴和原点的位置，就可使二阶线通用方程的形状成为

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

x，y 是直角坐标．由此我们看到，对每一个横标 x，纵标 y 都有一正一负两个值，也即横标 x 所在的轴分曲线为相同的两部分，我们称这样的轴为曲线的正交直径．凡二阶线都有正交直径，我们取它为横标轴．

§ 133

前节方程含 α,β,γ 三个常数,这三个常数取值种数无穷,相应地也就有无穷多条曲线,形状可以或多或少有所不同.改变原点在轴上的位置,也即横标 x 加上或减去一个数,这样从方程 $y^2=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ 得到的这无穷多条曲线,它们的大小和形状都是相同的.不同的方程所表示的曲线,可以形状完全一样,只是大小不同.例如半径不同的圆,种数也无穷.可见,α,β,γ 的改变,可以不改变二阶线的形状,即不改变二阶线的类.

§ 134

系数 γ 的正负对方程

$$y^2=\alpha+\beta x+\gamma x^2$$

所定曲线影响最大.先看 γ 为正的情形:$x=+\infty$,则 γx^2 比 $\alpha+\beta x$ 大得多,因而表达式 $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ 为正.从而纵标 y 有两个无穷大值,一正一负;$x=-\infty$,表达式 $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ 的值也为正无穷大.可见,γ 为正时二阶线有四条伸向无穷的分支,$x=+\infty$ 和 $x=-\infty$ 时各两条.我们把有四条伸向无穷的分支的二阶线归为一类,叫双曲线.

§ 135

再看 γ 为负的情形:$x=+\infty$ 和 $x=-\infty$ 时,表达式 $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ 都为负,从而纵标都为虚数.可见 γ 为负时曲线的纵标横标都不能为无穷,即曲线没有伸向无穷的分支,整个曲线位于一个确定的有限范围之内.我们把这样的二阶线,也即 γ 为负时方程

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

所定曲线归为一类,叫椭圆.

§ 136

γ 为正为负二阶线的性质有截然的不同.根据 γ 为正为负我们决定了两类二阶线.现在我们看 $\gamma = 0$ 的情形,0 在正负之间,这时的曲线性质也在双曲线与椭圆之间.我们称 $\gamma = 0$ 时的二阶线为抛物线.此时方程为 $y^2 = \alpha + \beta x$.β 为正为负均可,β 为负时取 x 为负就成了 β 为正 x 为正的情形.取 β 为正,则 x 趋向无穷时纵标 y 也趋向无穷,且一正一负,即此时抛物线有趋向无穷的两个分支,且只有两个分支,β 为正时,$x = -\infty$,则 y 为虚数.

§ 137

这样我们有三类二阶线:椭圆,抛物线和双曲线,彼此分得清清楚楚,完全不会混淆.主要的判别标准是无穷分支的条数.椭圆位于一个有限的范围之内,没有无穷分支,抛物线有两条无穷分支,双曲线有四条.上一章我们考虑的是圆锥曲线共有的性质,本章我们考虑每类圆锥曲线所特有的性质.

§ 138

先考虑椭圆(图 31),方程为

$$y^2 = \alpha + \beta x - \gamma x^2;$$

横标在正交直径上.坐标原点可移动,移动长度为 $\frac{\beta}{2\gamma}$ 的一段,则方程变为

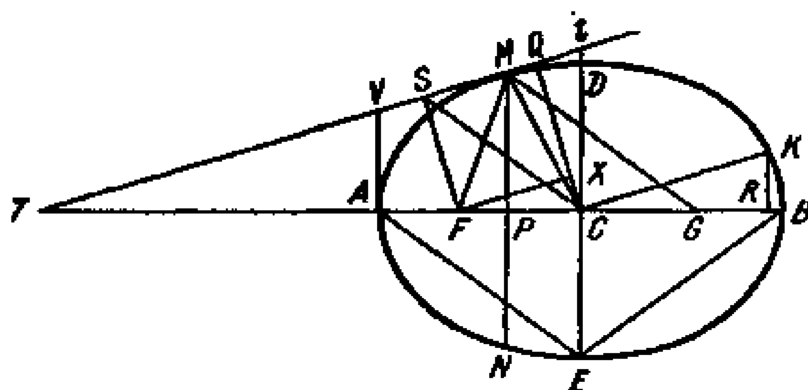


图 31

$$y^2 = \alpha - \gamma x^2,$$

此时横标以图形中心为起点.记中心为 C,正交直径为 AB,则横标 $CP = x$,纵标 $PM = y$.取 $x = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$,则 $y = 0$;x 大于 $+\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ 或小于 $-\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$,则 y 为虚数,即曲线在这两个数所限定的范围之内.因而我们有 $CA = CB = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$.取 $x = 0$,得 $CD = CE = \sqrt{\alpha}$.记半直径或半轴 $CA = CB = a$,记共轭半轴 $CD = CE = b$,则 $\alpha = b^2$,$\gamma = \frac{b^2}{a^2}$.从而椭圆方程成为

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

§ 139

共轭半轴 a,b 相等时,椭圆变为圆,此时方程变为 $y^2 = a^2 - x^2$ 或 $y^2 + x^2 = a^2$,$CM = \sqrt{x^2 + y^2} = a$,即曲线上的点到中心 C 的距离都相等.这是圆的性质.如果 a,b 不相等,即 AB 大于 DE 或 DE 大于 AB,那么曲线的形状就成了扁长的.共轭轴 AB,DE 可以

换位，我们取长轴作 AB，从而 a 大于 b，且中心至椭圆焦点 F，G 的距离相等，$CF = CG = \sqrt{a^2 - b^2}$，椭圆半参数，即焦点处的纵标为$\frac{b^2}{a}$.

§ 140

从椭圆的任一点 M 向焦点引直线 FM，GM，如我们所指出过的，有

$$FM = AC - \frac{CF \cdot CP}{AC} = a - \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{2},$$

$$GM = \frac{a + x\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, FM + GM = 2a.$$

即，椭圆上任一点 M 至焦点距离 FM，GM 之和都等于长轴 $AB = 2a$，为常数. 这正是一个有名的椭圆画法的依据.

§ 141

作 M 点处的切线 TMt，交轴于 T 和 t，则根据前面所讲，有

$$CP : CA = CA : CT$$

或 $CT = \frac{a^2}{x}$. 类似地，有 $Ct = \frac{b^2}{y}$. 从而

$$TP = \frac{a^2}{x} - x, TF = \frac{a^2}{x} - \sqrt{a^2 - b^2}, TA = \frac{a^2}{x} - a.$$

由

$$TP = \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{a^2y^2}{b^2x}, TM = \frac{y\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}}{b^2x},$$

得

$$\operatorname{tg} CTM = \frac{b^2x}{a^2y}, \sin CTM = \frac{b^2x}{\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}},$$

$$\cos CTM = \frac{a^2 y}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}.$$

因而过 A 点作轴的垂线 AV，它也是曲线的切线，则利用 $ay = b\sqrt{a^2 - x^2}$，我们有

$$AV = \frac{a(a-x)}{x}\frac{b^2 x}{a^2 y} = \frac{b^2(a-x)}{ay} = b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

§ 142

由

$$FT = \frac{a^2 - x\sqrt{a^2 - b^2}}{x}, FM = \frac{a^2 - x\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

得 $FT:FM = a:x$. 类似地，由

$$GT = \frac{a^2 + x\sqrt{a^2 - b^2}}{x}, \quad GM = \frac{a^2 + x\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

得 $GT:GM = a:x$，从而 $FT:FM = GT:GM$. 再由

$$FT:FM = \sin FMT:\sin CTM,$$

$$GT:GM = \sin GMt:\sin CTM,$$

得 $\sin FMT = \sin GMt$，从而角 $FMT = GMt$. 即从两个焦点引向曲线任一点 M 的直线，同 M 处切线的夹角相等，这是焦点的最重要的性质.

§ 143

由 $GT:GM = a:x$，$CT = \frac{a^2}{x}$ 得 $CT:CA = a:x$，从而 $GT:GM = CT:CA$. 因此，自 C 引 CS 平行于 GM，交切线于 S，则 $CS = CA = a$. 同样地，从 C 向切线引平行于 FM 的直线，它也 $= CA = a$. 知

$TM=\frac{y}{b^2x}\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}$,将 $a^2y^2=a^2b^2-b^2x^2$ 代入,得

$$TM=\frac{y}{bx}\sqrt{a^4-x^2(a^2-b^2)}.$$

将 $FT\cdot GT=\frac{a^4-x^2(a^2-b^2)}{x^2}$代入,得

$$TM=\frac{y}{b}\sqrt{FT\cdot GT}.$$

由 $TG:TC=TM:TS$,得

$$TS=\frac{TM\cdot CT}{TG}$$

从而

$$TS=\frac{y\cdot CT}{b}\sqrt{\frac{FT}{GT}}=\frac{y\cdot CT\cdot FT}{b\sqrt{FT\cdot GT}}=\frac{y^2\cdot CT\cdot FT}{b^2\cdot TM}.$$

又我们有 $PT=\frac{a^2y^2}{b^2x}=\frac{CT\cdot y^2}{b^2}$和 $TS=\frac{PT\cdot FT}{TM}$,因而

$$TM:PT=FT:TS.$$

可见三角形 TMP,TFS 相似.因而从焦点 F 引向切线的直线 FS 垂直于切线.类似地,我们也得到 $SV=\frac{AF\cdot MV}{GM}$.

§ 144

因而从焦点 F 向切线引垂线 FS,则点 S 与中心 C 的连线 CS 等于长半轴 $AC=a$.由于 $TM:y=TF:FS$,得到

$$FS=\frac{y\cdot TF}{TM}=\frac{b\cdot TF}{\sqrt{FT\cdot GT}}=b\sqrt{\frac{FT}{GT}};$$

从而

$$GT:FT=GM:FM=CD^2:FS^2;$$

从另一个焦点向切线引的垂线 $=b\sqrt{\frac{GT}{FT}}$.因而短半轴 $CD=b$ 是这

两条垂线的比例中项.现在我们从中心 C 向切线引垂线 CQ,则
$TF:FS=CT:CQ$,
因而

$$CQ=\frac{b\cdot CT}{\sqrt{FT\cdot GT}}=\frac{bx\cdot CT}{a\sqrt{FM\cdot GM}}=\frac{ab}{\sqrt{FM\cdot GM}},$$

如果引平行于切线的直线 FX,则

$$CQ-FS=\frac{b\cdot CF}{\sqrt{FT\cdot GT}}=CX,$$

由此得

$$CQ-CX=\frac{b\cdot TF}{\sqrt{FT\cdot GT}},\quad CQ+CX=\frac{b\cdot TG}{\sqrt{FT\cdot GT}},$$

从而

$$CQ^2-CX^2=b^2,\quad CX=\sqrt{CQ^2-b^2}.$$

我们得到,如果短轴已给,那么在垂线 CQ 上可以找到一点 X,使得 X 与焦点 F 的连线垂直于 CQ.

§ 145

前面讲了焦点性质,现在我们来看任何两条共轭直径.设 CM 是半直径,过中心平行于切线 TM 的直线 CK 就是 CM 的共轭直径.记 $CM=p$, $CK=q$,角 $MCK=CMT=s$.前面我们看到了 $p^2+q^2=a^2+b^2$,$pq\sin s=ab$.我们有

$$p^2=x^2+y^2=b^2+\frac{(a^2-b^2)x^2}{a^2},q^2=a^2+b^2-p^2$$
$$=a^2-\frac{(a^2-b^2)x^2}{a^2}=FM\cdot GM,$$

还有 $p^2=FK\cdot GK$.再由 $CQ=\dfrac{ab}{\sqrt{FM\cdot GM}}$,得

$$\sin CMQ=\sin s=\frac{ab}{p\sqrt{FM\cdot GM}}.$$

我们得到

$$TM:TP=\frac{y}{b}\sqrt{FT\cdot GT}:\frac{a^2y^2}{b^2x}=\sqrt{FM\cdot GM}:\frac{ay}{b}$$
$$=CK:CR,$$

从而

$$CR=\frac{ay}{b},\ KR=\frac{bx}{a},$$

继而

$$CR\cdot KR=CP\cdot PM.$$

我们有

$$\sin FMS=\frac{b}{\sqrt{GM\cdot FM}}=\frac{b}{q},$$

由

$$x=CP=\frac{a\sqrt{p^2-b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}},y=\frac{b\sqrt{a^2-p^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}=PM,$$

及

$$CR=\frac{a\sqrt{a^2-p^2}}{\sqrt{a^2-b^2}},\ KR=\frac{b\sqrt{p^2-b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

得

$$\operatorname{tg}ACM=\frac{y}{x},\operatorname{tg}2ACM=\frac{2yx}{x^2-y^2}=\frac{2ab\sqrt{(a^2-p^2)(p^2-b^2)}}{(a^2+b^2)p^2-2a^2b^2}.$$

将

$$ab=pq\cdot\sin s,a^2+b^2=p^2+q^2,\sqrt{(a^2-p^2)(p^2-b^2)}$$
$$=-pq\cos s$$

代入,由 $\cos s$ 为负,得

$$\operatorname{tg}2ACM=\frac{-q^2\sin 2s}{p^2+q^2\cos 2s}.$$

最后我们有 $CK^2=MT\cdot Mt$.从以上结果得到

$$MV = q\sqrt{\frac{AP}{BP}}, AV = b\sqrt{\frac{AP}{BP}},$$

从而

$$AV : MV = b : q = CE : CK.$$

这样一来,画出直线 AM,EK,则它们平行.

§ 146

由 $pq\sin s = ab$ 知 pq 大于 ab,再由 $p^2 + q^2 = a^2 + b^2$ 知 p 与 q 比 a 与 b 靠得近,即共轭直径中正交直径之间的差别最大.我们来求相等的共轭直径,即 $q = p$.此时我们有

$$2p^2 = a^2 + b^2, p = q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},$$

$$\sin s = \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \cos s = \frac{-a^2 + b^2}{a^2 + b^2},$$

从而

$$\sin\frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}}, \cos\frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{b^2}{a^2 + b^2}},$$

继而

$$\mathrm{tg}\frac{1}{2}s = \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,CEB, MCK = 2CEB = AEB.$$

进而

$$CP = \frac{a}{\sqrt{2}}, CM = \frac{b}{\sqrt{2}},$$

我们得到彼此相等的共轭半径 CM,CK,它们分别平行于弦 AE 和 BE.

§ 147

如果取顶点 A 作原点,也即取 $AP = x$,$PM = y$,则原来的 x 变

为现在的 $a-x$,得到现在的方程为

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2,$$

这里,显然$\frac{2b^2}{a}$是椭圆的参数或 *latus rectum*. 记半参数,即焦点处的纵标为 c,记焦点至顶点的距离 $AF=d$,则

$$\frac{b^2}{a}=c,\ a-\sqrt{a^2-b^2}=d=a-\sqrt{a^2-ac},$$

从而

$$2ad-d^2=ac,\ a=\frac{d^2}{2d-c},$$

进而

$$y^2=2cx-\frac{c(2d-c)x^2}{d^2}.$$

这是在直角坐标 x,y 之下的椭圆方程,这里横标被置于主轴 AB 之上,并以顶点 A 为原点,且顶点 A 至焦点 F 的距离 $AF=d$,半参数为 c. 这里还应该指出,$2d$ 恒大于 c,因为

$$AC=a=\frac{d^2}{2d-c},\ CD=b=d\sqrt{\frac{c}{2d-c}}.$$

§ 148

如果 $2d=c$,则 $y^2=2cx$. 这是我们前面见过的抛物线方程(图 32). 将横标移动$\frac{\alpha}{\beta}$,前面的方程 $y^2=\alpha+\beta x$ 就化为我们这里的方程. 设 MAN 是抛物线,其性质由横标 $AP=x$ 与纵标 $PM=y$ 间方程$y^2=2cx$ 描述. 因而焦点到顶点的距离 $AF=d=\frac{1}{2}c$,半参数 $FH=c$,且对曲线上的任一点 M 都有 $PM^2=2FH\cdot AP$. 由此得到,如果横标 AP 无穷,则纵标 PM,PN 都无穷,即曲线在轴 AP 的两侧都

图 32

趋向无穷.横标取负值,则纵标为虚数,也即以 A 点为界,与 T 同在一侧的横标点不对应曲线上的点.

§ 149

$2d=c$ 时椭圆方程变为抛物线方程,可见,抛物线是半轴 $a=\frac{d^2}{2d-c}$ 变为无穷时的椭圆,因而视轴 a 为无穷,椭圆的性质就变为抛物线的性质.首先,由

$$AF=\frac{1}{2}c \text{ 得 } FP=x-\frac{1}{2}c,$$

因此由焦点 F 向曲线上点 M 引直线 FM,则

$$FM^2=x^2-cx+\frac{1}{4}c^2+y^2=x^2+cx+\frac{1}{4}c^2$$

从而

$$FM=x+\frac{1}{2}c=AP+AF,$$

这是抛物线焦点的主要性质.

§ 150

椭圆长轴无限增大，则成为抛物线．因而我们把抛物线看成轴 $AC = a$ 无穷大，即中心 C 距顶点 A 无穷远的椭圆．引曲线上点 M 处的切线 MT，交轴于 T．由

$$CP : CA = CA : CT$$

利用 $CP = a - x$，得

$$CT = \frac{a^2}{a - x}.$$

由此得 $AT = \frac{ax}{a - x}$，a 为无穷大，x 与 a 相比，可以不计，可以 $a - x = a$，从而 $AT = x = AP$．这一点也可以用下面的方法证明：由 $AT = \frac{ax}{a - x}$，得 $AT = x + \frac{x^2}{a - x}$．该表达式中分母为无穷大，分子为有限数，因而分数可略去，得到 $AT = AP = x$．

§ 151

因而从点 M 向抛物线的无穷远中心引直线 MC，则 MC 平行于轴 AC．因而它也是直径，它等分平行于切线 MT 的所有弦．例如，画平行于切线 MT 的弦 mn，则直径 Mp 在 p 点处等分它，即抛物线的平行于轴 AP 的任何一条直线都是斜角直径．为讨论这类直径的性质，我们记 $Mp = t$，$pm = u$，并从 m 向轴引垂线 msr．这样，由 $PT = 2x$，$MT = \sqrt{4x^2 + 2cx}$，得

$$\sqrt{4x^2 + 2cx} : 2x : \sqrt{2cx} = pm : ps : ms,$$

由此得

$$ps = \frac{2xu}{\sqrt{4x^2 + 2cx}} = u\sqrt{\frac{2x}{2x + c}}, ms = u\sqrt{\frac{c}{2x + c}}.$$

从而

$$Ar = x + t + u\sqrt{\frac{2x}{2x+c}},\ mr = \sqrt{2cx} + u\sqrt{\frac{c}{2x+c}}.$$

由 $mr^2 = 2c \cdot Ar$，得

$$2cx + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}} + \frac{cu^2}{2x+c} = 2cx + 2ct +$$

$$2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}},$$

从而

$$u^2 = 2t(2x+c) = 4FM \cdot t,\ 即\ pm^2 = 4FM \cdot Mp.$$

倾角 mps 的正弦和余弦为

$$\sqrt{\frac{c}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AF}{FM}},\ \sqrt{\frac{2x}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AP}{FM}}$$

从而

$$\sin 2mps = \frac{2\sqrt{2cx}}{2x \pm c} = \frac{\gamma}{FM} = \sin MFP.$$

这样一来，角 $mps = MTP = \frac{1}{2}MFr$.

§ 152

由 $MF = AP + AF$ 及 $AP = AT$ 得 $FM = FT$，因而三角形 MFT 等腰，角 $MFr = 2MTA$，这是我们刚得到的. 又由 $MT = 2\sqrt{x(x+\frac{1}{2}c)}$，得 $MT = 2\sqrt{AP \cdot FM}$. 因而由焦点 F 向切线引垂线 FS，则

$$MS = TS = \sqrt{AP \cdot FM} = \sqrt{AT \cdot TF}.$$

由此得 $AT : TS = TS : TF$. 从这一比式我们看到，点 S 位于过顶点 A 垂直于轴的直线 AS 上. 但

$$AS = \frac{1}{2} PM, AS : TS = AF : FS;$$

从而 $FS = \sqrt{AF \cdot FM}$，即 FS 是 AF 和 FM 的比例中项，此外还有

$$AS : MS = AS : TS = FS : FM = \sqrt{AF} : \sqrt{FM}.$$

如果引切点 M 处的法线 MW 交轴于 W，则

$$PT : PM = PM : PW, \text{也即 } 2x : \sqrt{2cx} = \sqrt{2cx} : PW,$$

从而 $PW = c$. 我们得到，轴上位于纵标 PM 和法线 WM 之间的线段 PW 为常数，等于半参数或纵标 FH. 此外还有

$$FW = FT = FM, MW = 2\sqrt{AF \cdot FM}.$$

§ 153

现在我们讨论双曲线. 置横标于正交直径上时，双曲线的方程为

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

如果原点移动距离$\frac{\beta}{2\gamma}$，也即，使原点与中心重合，则该方程变为 $y^2 = \alpha + \gamma x^2$，这里 γ 必须为正，α 可正可负，坐标 x, y 交换时，α 改变符号. 我们假定 α 为负，即 $y^2 = \gamma x^2 - \alpha$，显然

$$x = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}, x = -\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$$

时纵标 y 都为零. 记中心为 c，记曲线与轴的交点为 A, B（图 33），记半轴 $CA = CB = a$，则 $a = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}, \alpha = \gamma a^2$，从而

$$y^2 = \gamma x^2 - \gamma a^2.$$

可见，$x^2 < a^2$ 时 y 为虚数，也即，轴上 A 到 B 这一段的 x 不对应曲线上的点. $x^2 > a^2$ 时纵标连续增加，并趋向无穷，从而双曲线有 4 个分支：AI, Ai, BK, Bk，它们相似相等. 这是双曲线的主要性质.

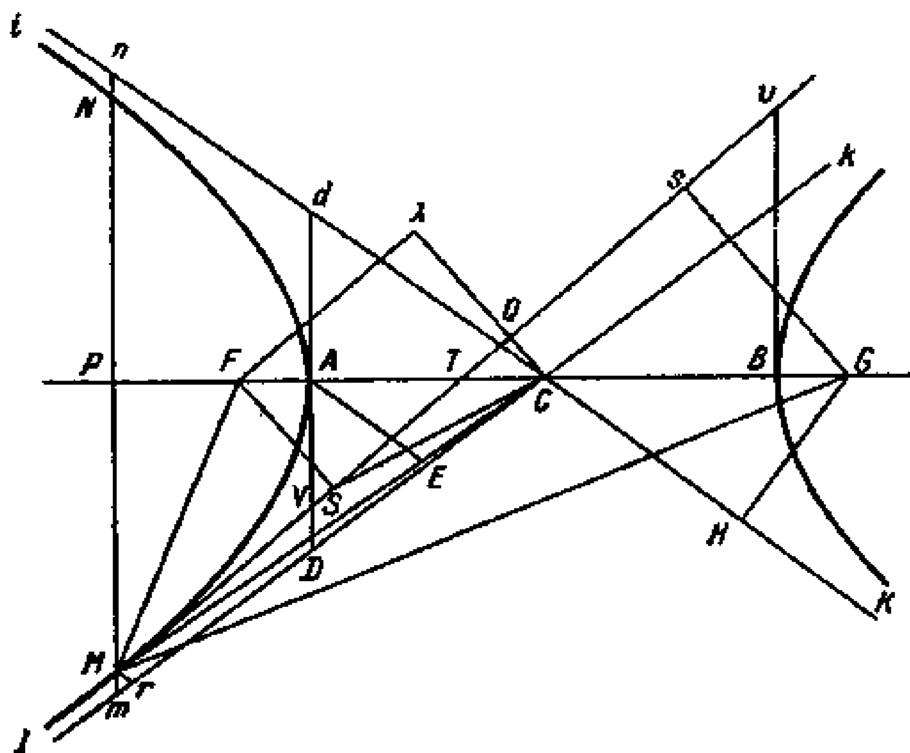


图 33

§ 154

$x=0$ 时 $y^2=-\gamma a^2$，即在中心处纵标为负. 所以跟椭圆不同，双曲线没有实共轭轴. 为与椭圆类比，我们取 $b\sqrt{-1}$为共轭虚轴，则 $\gamma a^2=b^2$，$\gamma=\frac{b^2}{a^2}$. 因而，记横标 $CP=x$，纵标 $PM=y$，则

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

将 b^2 换为 $-b^2$，前面求得的椭圆方程

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

就变成双曲线方程. 由于它们之间的这种关系，前面求出的椭圆的

性质，可以容易地转换成双曲线的性质. 首先关于焦点至中心的距离，由椭圆为$\sqrt{a^2-b^2}$，得双曲线为 $CF=CG=\sqrt{a^2+b^2}$. 由此得

$$FP=x-\sqrt{a^2+b^2},\ GP=x+\sqrt{a^2+b^2},$$

利用这两个结果及 $y^2=-b^2+\frac{b^2x^2}{a^2}$，得

$$FM=\sqrt{a^2+x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}-2x\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a}-a,$$

$$GM=\sqrt{a^2+x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}+2x\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a}+a.$$

因而对连接两焦点与曲线上一点 M 的直线 FM，GM，我们有

$$FM+AC=\frac{CP\cdot CF}{CA},\ GM-AC=\frac{CP\cdot CF}{CA}.$$

又，这两条直线的差 $GM-FM=2AC$. 在椭圆，是这两条线的和等于主轴 AB；类似地，我们得到了，在双曲线，是这两条线的差等于主轴 AB.

§ 155

可以确定切线 MT 的位置. 由 $CP:CA=CA:CT$ 对二阶曲线都成立，得

$$CT=\frac{a^2}{x},\ PT=\frac{x^2-a^2}{x}=\frac{a^2y^2}{b^2x},$$

从而

$$MT=\frac{y}{b^2x}\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}=\frac{y}{bx}\sqrt{a^2x^2+b^2x^2-a^4}.$$

由

$$FM\cdot GM=\frac{a^2x^2+b^2x^2-a^4}{a^2},$$

得 $MF=\frac{ay}{bx}\sqrt{FM\cdot GM}$. 由

$$FT=\sqrt{a^2+b^2}-\frac{a^2}{x},\ GT=\sqrt{a^2+b^2}+\frac{a^2}{x};$$

得

$$FT:FM=a:x,\quad GT:GM=a:x.$$

从而 $FT:GT=FM:GM$,这一比式表明,切线 MT 等分角 FMG,从而角 $FMT=GMT$. CM 的延长线是斜直径,它等分所有平行于切线 MT 的弦.

§ 156

从中心 C 向切线引垂线 CQ,则

$$TM:PT:PM=CT:TQ:CQ$$

或

$$\frac{ay}{bx}\sqrt{FM\cdot GM}:\frac{a^2y^2}{b^2x}:y=\frac{a^2}{x}:TQ:CQ;$$

从而

$$TQ=\frac{a^3y}{bx\sqrt{FM\cdot GM}},\ CQ=\frac{ab}{\sqrt{FM\cdot GM}}.$$

从焦点 F 向切线引垂线 FS,则

$$TM:PT:PM=FT:TS:FS$$

或

$$\frac{ay}{bx}\sqrt{FM\cdot GM}:\frac{a^2y^2}{b^2x}:y=\frac{a\cdot FM}{x}:TS:FS,$$

从而

$$TS=\frac{a^2y\cdot FM}{bx\sqrt{FM\cdot GM}},\ FS=\frac{b\cdot FM}{\sqrt{FM\cdot GM}}.$$

同样地,从焦点 G 向切线引垂线 Gs,则

$$Ts=\frac{a^2y\cdot GM}{bx\sqrt{FM\cdot GM}},\ Gs=\frac{b\cdot GM}{\sqrt{FM\cdot GM}}.$$

利用以上结果,得

$$TS \cdot Ts = \frac{a^4 y^2}{b^2 x^2} = \frac{a^2(x^2 - a^2)}{x^2} = CT \cdot PT,$$

$$TS : CT = PT : Ts,$$

和 $FS \cdot Gs = b^2$. 由 $QS = Qs$,得

$$QS = \frac{TS + Ts}{2} = \frac{a^2 y(FM + GM)}{2bx\sqrt{FM \cdot GM}} = \frac{ay\sqrt{a^2 + b^2}}{b\sqrt{FM \cdot GM}} = Qs,$$

从而

$$CS^2 = CQ^2 + QS^2 = \frac{a^2 b^4 + a^4 y^2 + a^2 b^2 y^2}{b^2 \cdot FM \cdot GM}$$

$$= \frac{a^2 b^4 (a^2 + b^2)(b^2 x^2 - a^2 b^2)}{b^2 \cdot FM \cdot GM}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)x^2 - a^4}{FM \cdot GM} = a^2.$$

跟椭圆一样,我们得到直线 $CS = a = CA$. 我们还得到

$$CQ + FS = \frac{bx\sqrt{a^2 + b^2}}{a\sqrt{FM \cdot GM}}$$

从而

$$(CQ + FS)^2 - CQ^2 = \frac{b^2 x^2 (a^2 + b^2) - a^4 b^2}{a^2 \cdot FM \cdot GM} = b^2.$$

因而,如果从焦点 F 平行于切线引直线 FX,交垂线 CQ 的延长线于 X,则 $CX = \sqrt{b^2 + CQ^2}$. 这条性质也与椭圆的类似.

§ 157

从顶点 A, B 引垂直于轴的直线,交切线于 V, v,则由

$$AT = \frac{a(x - a)}{x}, BT = \frac{a(x + a)}{x},$$

得 $PT : PM = AT : AV = BT : Bv$,从而

$$AV=\frac{b^2(x-a)}{ay}, Bv=\frac{b^2(x+a)}{ay},$$

进而

$$AV\cdot Bv=\frac{b^4(x^2-a^2)}{a^2y^2}=b^2,$$

也即

$$AV\cdot Bv=FS\cdot Gs.$$

我们还得到 $PT:TM=AT:TV=BT:Tv$,从而

$$TV=\frac{b(x-a)}{xy}\sqrt{FM\cdot GM},\ Tv=\frac{b(x+a)}{xy}\sqrt{FM\cdot GM},$$

进而

$$TV\cdot Tv=\frac{a^2}{x^2}FM\cdot GM=FT\cdot GT.$$

类似地,由此可以得到下面一系列另外的推论.

§ 158

由 $CT=\frac{a^2}{x}$,知横标 $CP=x$ 越大,线段 CT 越短.曲线趋向无穷时,其切线过中心 C,$CT=0$.

已知

$$\text{tg}PTM=\frac{PM}{PT}=\frac{b^2x}{a^2y},$$

当点 M 位于无穷远处,即 $x=\infty$ 时,我们有

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{bx}{a}.$$

从而,曲线趋向无穷时,其切线过中心 C,且与轴所成角 ACD 的正切为$\frac{b}{a}$.如果过顶点 A 引垂直于轴的直线$AD=b$,则 CD 向两头延长所得直线恒不与曲线相触,但曲线伸得越远趋向它靠近,最终在无穷远处 CD 与 CI 相合. Ck 的情形同于 CD,最终在无穷远处与

Bk 相合. 如果从另一面以相同的角度引直线 KCi,那么延长到无穷远时,它同分支 BK, Ai 重合. 一直一曲两线,曲线越来越靠近直线,到无穷远时与直线重合,这条直线就称为这曲线的渐近线,直线 ICk, KCi 都是双曲线的渐近线.

§ 159

双曲线的这两条渐近线相交于中心 C,与轴构成的角 $ACD = ACd$,该角的正切 $= \frac{b}{a}$,该角的倍角 DCd 的正切 $= \frac{2ab}{a^2 - b^2}$. 由此可知,如果 $b = a$,则这两条渐近线的交角,即角 DCd 为直角,称此时的双曲线为等轴双曲线. 由 $AC = a$, $AD = b$, 得 $CD = Cd = \sqrt{a^2 + b^2}$. 因而从焦点 G 向一条渐近线引垂线 GH,则由 $CG = \sqrt{a^2 + b^2} = CD$,得

$$CH = AC = BC = a,\ GH = b.$$

§ 160

向两头延伸弦 $MPN = 2y$,交渐近线于 m, n,则

$$Pm = Pn = \frac{bx}{a},\ Cm = Cn = \frac{x\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$
$$= FM + AC = GM - AC.$$

又

$$Mm = Nn = \frac{bx - ay}{a},\ Nm = Mn = \frac{bx + ay}{a},$$

从面利用 $a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2$,得

$$Mm \cdot Nm = Mm \cdot Mn = \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{a^2} = b^2,$$

进面处处有

$$Mm\cdot Nm = Mm\cdot Mn = Nn\cdot Nm = Nn\cdot Mn = b^2 = AD^2.$$

由 M 引平行于渐近线 Cd 的直线 Mr,则

$$2b:\sqrt{a^2+b^2} = Mm:mr(Mr),$$

从而

$$mr = Mr = \frac{(bx-ay)\sqrt{a^2+b^2}}{2ab},$$

$$Cm - mr = Cr = \frac{(bx+ay)\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}.$$

进而

$$Mr\cdot Cr = \frac{(b^2x^2-a^2y^2)(a^2+b^2)}{4a^2b^2} = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

或者由 A 引平行于渐近线 Cd 的直线 AE,则 $AE = CE = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$,从而

$$Mr\cdot Cr = AE\cdot CE.$$

这是双曲线的渐近线的主要性质.

§ 161

参见图 34,取中心 C 为原点,置横标 $CP = x$ 于一条渐近线上,取纵标 $PM = y$ 平行于另一条渐近线,则 $yx = \frac{a^2+b^2}{4}$,且 $AC = BC = a$, $AD = Ad = b$,如果令 $AE = CE = h$,则 $yx = h^2$, $y = \frac{h^2}{x}$,因而 $x = 0$ 时 $y = \infty$;反之 $y = 0$ 时 $x = \infty$. 过曲线上点 M 引平行于任一直线 GH 的直线 $QMNR$,令 $CQ = t$, $QM = u$,则

$$GH:CH:CG = u:PQ:PM,$$

从而

$$PQ = \frac{CH}{GH}u,\ PM = \frac{CG}{GH}u,$$

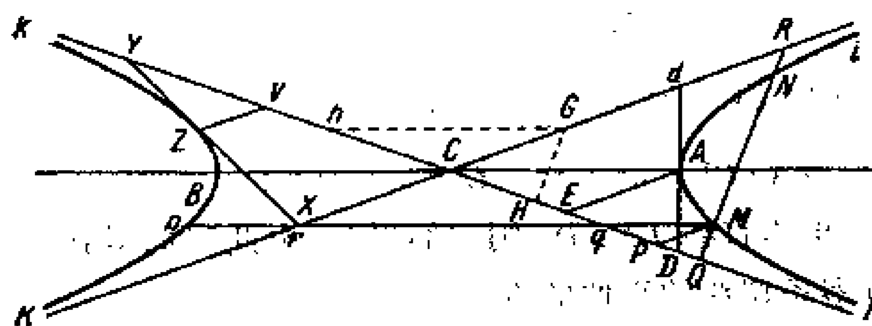


图 34

进而

$$y=\frac{CG}{GH}u,\quad x=t-\frac{CH}{GH}u.$$

代这两个值人 $yx=h^2$,得

$$\frac{CG}{GH}tu-\frac{CH\cdot CG}{GH^2}u^2=h^2,$$

或

$$u^2-\frac{GH}{CH}tu+\frac{GH^2}{GH\cdot CG}h^2=0.$$

该方程告诉我们,纵标 u 有两个值,QM 和 QN,和等于 $\frac{GH}{CH}t=QR$,积 $QM\cdot QN=\frac{GH^2}{CH\cdot CG}h^2$.

§ 162

由 $QM+QN=QR$,得 $QM=RN$,$QN=RM$.因而,如果点 M,N 重合,则 QR 为切线,且被切点等分.例如,如果直线 XY 为双曲线的切线,则切点 Z 为 XY 的中点.因此,如果从 Z 引平行于另一条渐近线的直线 ZV,则 $CV=VY$,这给了我们一个引双曲线上任意点 Z 处切线的方法:取 $VY=CV$,那么过点 Y 和曲线上点 Z 的直线就

是双曲线上点 Z 处的切线.

由 $CV\cdot ZV=h^2=\frac{a^2+b^2}{4}$,得

$$CX\cdot CY=a^2+b^2=CD^2=CD\cdot Cd.$$

因此,如果连直线 DX,dY,则它们平行.由此我们得到一个画出曲线任意多条切线的简便的方法.

§ 163

由矩形面积 $QM\cdot QN=\frac{GH^2}{CH\cdot CG}h^2$ 得知,平行于 HG 的直线 QR,不管画在哪,矩形面积 $QM\cdot QN$ 都相同,且

$$QM\cdot QN=QM\cdot MR=QN\cdot NR=\frac{CH^2}{CH\cdot CG}h^2.$$

如果考虑平行于 QR 的切线,由于其位于渐近线之间的部分被切点所等分,记这一半为 q,我们恒有

$$QM\cdot QN=QM\cdot MR=RN\cdot RM=RN\cdot NQ=q^2.$$

这是画在渐近线之间的双曲线的重要性质.

§ 164

双曲线由相背的两部分 IAi 和 KBk 构成.上述性质并不仅仅适用于只与一部分相交的直线,也适用于与两部分都相交的直线.过 M 引平行于 Gh 且与相背的另一部分也相交的直线 Mqm,记 $Cq=t$,$qM=u$,则由三角形 CGh,PMq 相似得

$$PM=y=\frac{CG}{Gh}u,\ qP=x-t=\frac{Ch}{Gh}u,$$

从而 $x=t+\frac{Ch}{Gh}u$.将这 x,y 代入 $xy=h^2$,得

$$\frac{CG}{Ch}tu+\frac{CG\cdot Ch}{Gh^2}u^2=h^2,$$

或

$$u^2+\frac{Gh}{Ch}tu-\frac{Gh^2}{CG\cdot Ch}h^2=0.$$

§ 165

纵标 u 有两个值 qM, $-qn$. 这里取渐近线 CP 为轴, $-qn$ 位于 CP 的另一侧,因而为负.从所得方程我们得到,这两个根的和

$$qM-qn=-\frac{Gh}{Ch}t=-qr$$

或 $qn-qM=qr$,从而 $qM=rn$, $qn=rM$.从所得方程我们还得到两根的积

$$-qM\cdot qn=-\frac{Gh^2}{CG\cdot Ch}h^2,$$

也即

$$qM\cdot qn=qM\cdot rM=rn\cdot qu=rn\cdot rM=\frac{Gh^2}{CG\cdot Ch}h^2.$$

因而不管平行于 Gh 的直线 Mn 位置如何,这个矩形面积是不变的.

各类二阶线的基本性质,我们就讲到这里.如果加上各类二阶线的共同性质,我们可以说能得到无穷多条性质.

第七章

伸向无穷的分支

§ 166

如果曲线有一支或一部分伸向无穷，则曲线上无穷远处点的直角坐标 x, y 中必至少有一个为无穷. 设曲线上无穷远处某点坐标 x, y 都不为无穷，则该点至原点的距离 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为有限数，这与无穷远矛盾. 因此，当曲线有伸向无穷的分支时，则必然是或者有限的横标对应无限的实纵标，或者无限的横标对应实的有限的或无限的纵标，我们就以此为起点对曲线的伸向无穷分支进行研究.

§ 167

给定 x, y 间的一个代数方程，阶数不拘，比如为 n. 我们看它的 x, y 次数之和为 n 的那些项所成的部分，即

$$\alpha y^n+\beta y^{n-1}x+\gamma y^{n-2}x^2+\delta y^{n-3}x^3+\cdots+\xi x^n.$$

该表达式可分解成状如 $Ax+By$ 的或实或虚的线性因式的积. 如

果其中有虚线性因式，则虚线性因式的个数必为偶数，并且可以配对，每对的积为状如

$$A^2y^2-2ABxy\cdot\cos\varphi+B^2x^2$$

的实二次因式．只要 x,y 中有一个为 ∞，这种二次因式的值就等于 ∞^2，这是因为 A,B 都不为零，项 $2AByx\cos\varphi$ 恒小于另外两项的和 $A^2y^2+B^2x^2$．换句话说，当 x，或 y，或 x,y 同时为无穷时，因式

$$A^2y^2-2ABxy\cos\varphi+B^2x^2$$

不等于零，不等于有限数，甚至不等于无穷大，它等于 ∞^2，∞^2 比 ∞ 大无穷大．

§ 168

如果方程次数最高各项的和

$$\alpha y^n+\beta y^{n-1}x+\gamma y^{n-2}x^2+\cdots+\xi x^n.$$

不含实线性因式，则必 n 为偶数，且和式为状如

$$A^2y^2-2ABxy\cos\varphi+B^2x^2.$$

的因式的积．因而，如果 x，或 y，或 x,y 同时为无穷，则和式的值不等于有限的量，也不等于 ∞^m（这里的 m 小于 n），而等于 ∞^n．方程其余的项，也即 x,y 次数和小于 n 的项，它们给出的无穷，其次数都低于 n，不能等于 n 次无穷．因此，只要 x,y 中有一个取值为无穷，方程就不能成立．

§ 169

由此得出，如果坐标 x,y 间的方程，其次数最高各项的和没有实线性因式，它给出的曲线就没有伸向无穷的分支，整个曲线就像椭圆和圆那样，处于一个有限的范围之中．二阶线通用方程

$$\alpha y^2+\beta xy+\gamma x^2+\delta y+\varepsilon x+\zeta=0$$

次数最高各项的和为 $\alpha y^2+\beta xy+\gamma x^2$. β^2 小于 $4\alpha\gamma$ 时这个和没有实线性因式,此时该方程给出的曲线为椭圆,没有伸向无穷的分支.

§ 170

为了解释得更清楚,我们把 x,y 间方程的项按次数分组,把次数最高,也即次数为 n 的项归为第一组,把次数为 $n-1$ 的项归为第二组,把次数为 $n-2$ 的项归为第三组,类推,到既不含 x 也不含 y 的项,也即到常数项为止.记第一组,也即次数最高的组为 P,记第二组为 Q,记第三组为 R,记第四组为 S,等等.

§ 171

这样,次数最高组 P 没有实线性因式时,方程 $P+Q+R+S+\cdots=0$ 表示的曲线就没有伸向无穷的分支.现在我们考虑次数最高组只有一个实线性因式的情形,即 $P=(ay-bx)M$,M 为 x,y 的 $n-1$ 次函数,且 M 没有任何实线性因式.此时,如果置 x,或 y,或 x,y 同时为无穷,则 $M=\infty^{n-1}$.当然 Q 也可以是 M 这样的无穷,而 R,S 等则都只能是次数更低的无穷.因而,如果 $ay-bx$ 等于有限量或零,方程

$$P+Q+R+\cdots=0$$

就可以成立,此时的曲线就伸向无穷.

§ 172

设 $ay-bx=p$,p 是这样一个有限量:当曲线伸向无穷时

$$pM+Q+R+S+\cdots=0,$$

也即

$$p=\frac{-Q-R-S-\cdots}{M}.$$

由 M 是比 $R,S,\cdots$ 阶数更高的无穷大，知分数$\frac{R}{M},\frac{S}{M},\cdots$都为零，因而 $p=\frac{-Q}{M}$. 这样一来，变量 x,y 为无穷时，分数$\frac{-Q}{M}$给出 p 值，但是由 $ay-bx=p$，得 $y=\frac{bx+p}{a}$，又由 $x=\infty$ 时$\frac{p}{ax}=0$，得$\frac{y}{x}=\frac{b}{a}+\frac{p}{ax}=\frac{b}{a}$. 这样一来，曲线伸向无穷时 $y=\frac{bx}{a}$.

§ 173

Q,M 同为 $n-1$ 次齐次函数，$\frac{-Q}{M}$为零次函数，且 $y=\frac{bx}{a}$时，它等于常数 p；或者由 y 比 x 等于 $b:a$，替换$\frac{-Q}{M}$中的 y 以 b，x 以 a，我们也得到函数$\frac{-Q}{M}$的值 p，有了 p 也就有了曲线伸向无穷时包含在方程 $P+Q+R+S+\cdots=0$ 中的 $ay-bx=p$.

§ 174

可见，曲线伸向无穷的部分由方程 $ay-bx=p$ 表示. 该方程表示的是直线，这直线在无穷远处与曲线重合，这直线是曲线的渐近线，曲线向远处延伸时越来越靠近这直线，最终相重合. 从 x 或 y 等于 ∞ 时，方程 $P+Q+R+S+\cdots=0$ 变为 $ay-bx=p$，我们看到直线向两头无限延伸，最终都与曲线重合. 也即曲线有相背的两个伸向无穷远的分支，一支与直线的一头重合，另一支与直线的另一头重合.

§ 175

上面我们看到,方程 $P+S+Q+R+\cdots=0$ 的最高次部分 P 只有一个实因式时,曲线具有伸向无穷的两个分支,这两个分支从两头靠近我们称它为渐近线的直线.现在我们假定最高次部分 P 有两个实线性因式 $ay-bx$ 和 $cy-dx$,即 $P=(ay-bx)(cy-dx)M$,M 是 $n-2$ 次齐次函数,这里应该区别两个线性因式相等和不相等两种情形.

§ 176

假定两因式不相等,此时对无穷的横标或纵标方程

$$(ay-bx)(cy-dx)M+Q+R+S+\cdots=0$$

成立是在 $ay-bx$ 或 $cy-dx$ 为有限数时.设 $ay-bx=p$,由 p 为有限数,知在无穷远处有 $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$,跟前面类似,我们得到

$$p=\frac{-Q-R-S-\cdots}{(cy-dx)M}=\frac{-Q}{(cy-dx)M},$$

该表达式是 x 的零次函数,因此令 $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$,或者分别换 x,y 为 a,b,我们就得到常数 p 的值.由两线性因式不相等,知 $bc-ad$ 不为零,由 M 没有实根,知 M 不为零,因而此时有

$$p=\frac{-Q}{(bc-ad)M}.$$

从而 Q 为零,或 Q 含有因式 $ay-bx$,则 p 为有限值,甚至或者为零.

§ 177

由前面的情形知，P 的线性实因式 $ay-bx$ 使曲线有一条渐近线，其位置由方程 $ay-bx=p$ 决定.同样地，另一个线性实因式 $cy-dx$ 也使曲线有一条渐近线，其位置由方程 $cy-dx=q$ 决定，$q=\frac{-Q}{(ay-bx)M}$，其中 x,y 分别换成 c,d.这样一来，曲线共有两条渐近线，四条伸向无穷并最终与渐近线相合的分支.这正是前面讨论过的双曲线的情形.可见，二阶线方程 $\alpha y^2+\beta xy+\gamma x^2+\varepsilon x+\zeta=0$，如果其最高次项部分 $\alpha y^2+\beta xy+\gamma x^2$ 有两个不同的实线性因式，也即如果 β^2 大于 $4\alpha\gamma$，则这方程表示的是双曲线.

§ 178

假定线性因式 $ay-bx$，$cy-dx$ 相等，即 $P=(ay-bx)^2M$.则由 $P+Q+R+S+\cdots=0$ 得

$$(ay-bx)^2=\frac{-Q-R-S-\cdots}{M}.$$

由于 Q,R,S 依次是 $n-1,n-2,n-3$ 次函数，M 是 $n-2$ 次函数，因而变量无穷时我们有 $\frac{S}{M}=0$.从而

$$(ay-bx)^2=-\frac{Q}{M}-\frac{R}{M}=-\frac{Q}{M(\mu y+\nu x)}(\mu y+\nu x)-\frac{R}{M}.$$

但 $\frac{Q}{M(\mu y+\nu x)}$ 和 $\frac{R}{M}$ 是 x,y 的零次函数，又对无穷值有 $y:x=b:a$，因而换 $\frac{y}{x}$ 为 $\frac{b}{a}$，也即分别换 x,y 为 a,b 时，这两个零次函数都为常数.

§ 179

作代换,令

$$\frac{Q}{M(\mu y+\upsilon x)}=A,\frac{R}{M}=B,$$

则

$$(ay-bx)^2=-A(\mu y+\upsilon x)-B.$$

该方程所表示的曲线与 $P+Q+R+S+\cdots=0$ 所表示的曲线在无穷远处重合. μ,υ 任意,我们令 $\mu=b,\upsilon=a$,取

$$ay-bx=u\sqrt{a^2+b^2},by+ax=t\sqrt{a^2+b^2},$$

改变坐标后,我们的曲线方程变为

$$u^2+\frac{At}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{B}{a^2+b^2}=0.$$

显然,这是抛物线方程.因而所求曲线延伸到无穷时将与抛物线重合.这样,它只有两个伸向无穷的分支,其渐近线不是直线,而是前面方程所表示的抛物线.

§ 180

上节假定 A 不为零.如果 $A=0$,即 Q 为零,或 Q 被 $ay-bx$ 除得尽,则方程成为 $u^2+\frac{B}{a^2+b^2}=0$,不再是抛物线方程.我们对该方程的三类情形分别进行讨论.第一类,B 为负,设 $\frac{B}{a^2+b^2}=-f^2$.此时方程 $u^2-f^2=0$ 含有两个方程,$u-f=0$ 和 $u+f=0$,表示的是两条平行直线.有如第一种情形,这两条直线都是渐近线,因而曲线有四条伸向无穷并与这两条直线相合的分支.

§ 181

第二类情形，B 为正，记为 $+f^2$. 此时方程 $u^2+f^2=0$ 为不可能，所以曲线没有伸向无穷的分支，而是整个地位于一个有限区域之中，即方程 $P+Q+R+S+\cdots=0$ 表示的曲线没有伸向无穷的分支，最高次部分 P 没有实线性因式时没有这种分支，P 有实线性因式时也没有这种分支，这一点我们已经见到了，以后还会多次见到.

§ 182

第三类情形，$B=0$，它介于前两类情形之间. 要弄清此时曲线的形状，需考察次数更低的部分. 由 $P+Q+R+S+\cdots=0$ 和 $P=(ay-bx)^2M$，得到在无穷远处有

$$\frac{y}{x}=\frac{b}{a},(ay-bx)^2+\frac{Q}{M}+\frac{R}{M}+\frac{S}{M}+\frac{T}{M}+\cdots=0.$$

照前面进行代换那样，令

$$\frac{y}{x}=\frac{b}{a},\frac{Q}{M}=A(by+ax),\frac{R}{M}=B,$$

再由 $S,T,V,\cdots$ 依次为 $(n-3),(n-4),\cdots$ 次函数，及 M 是 $(n-2)$ 次函数，我们有

$$\frac{S(by+ax)}{M}=C,\frac{T(by+ax)^2}{M}=D,\frac{V(by+ax)^3}{M}=E,\cdots$$

从而

$$(ay-bx)^2+A(by+ax)+B+\frac{C}{by+ax}+\frac{D}{(by+ax)^2}+\frac{E}{(by+ax)^3}+\cdots=0.$$

该方程表示的是这样一条曲线，$by+ax$ 无穷大时，其无穷远部分

与 $P+Q+R+S+\cdots=0$ 所表示的曲线相合. 曲线伸向无穷时,虽然 $by+ax$ 为无穷,但$(ay-bx)^2$ 可以为有限数,可以为无穷,为无穷时小于 ∞^2.

§ 183

把轴变换到求得的渐近线上. 分别置横标与纵标为

$$\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=t \text{ 和 } \frac{ay-bx}{\sqrt{a^2+b^2}}=u,$$

并简记$\sqrt{a^2+b^2}=g$,我们得到方程

$$u^2+\frac{At}{g}+\frac{B}{g^2}+\frac{C}{g^3t}+\frac{D}{g^4t^2}+\frac{E}{g^5t^3}+\cdots=0.$$

在我们讨论的情况下有 $A=0, B=0$,从而

$$u^2+\frac{C}{g^3t}+\frac{D}{g^4t^2}+\frac{E}{g^5t^3}+\cdots=0.$$

如果 C 不等于零,那么当 t 为无穷时,与项$\frac{C}{g^3t}$相比较,项$\frac{D}{g^4t^2}+\frac{E}{g^5t^3}+\cdots$都可略去,我们得到

$$u^2+\frac{C}{g^3t}=0.$$

该方程表示的曲线,$t=\infty$时与所求曲线相合. 从该方程得 $u=\pm\sqrt{\frac{-C}{g^3t}}$,由此知曲线有两个分支,从两面趋向于轴的同一部分.

§ 184

如果再加上 $C=0$,则方程为

$$u^2+\frac{D}{g^4t^2}=0.$$

这里又分成 D 为正、为负和为零三种情形. D 为正,方程不成立,曲线没有伸向无穷的分支,而是完全地位于一个有界的范围之内. D 为负,记为$\frac{D}{g^4}=-f^2$,则 $u^2=\frac{f^2}{t^2}$,因而 $t=\infty$ 和 $t=-\infty$ 时纵标 u 都取两个趋向于零的值,一正一负. 这就是说,曲线有四个分支,从两头两面收敛于轴. $D=0$,应该取方程 $u^2+\frac{E}{g^5t^3}=0$. 这类似于前节讨论过的情形,应对方程 $P+Q+R+S+\cdots=0$ 的更多的项进行考察.

§ 185

现在假定方程

$$P+Q+R+S+\cdots=0$$

的最高次项部分 P 有三个实线性因式. 如果这三个因式相异,那么前面关于单个实线性因式所讲的,就对这三个因式中的每一个都适用. 因而曲线有六条趋向无穷的分支,它们收敛于三条渐近线. 如果三个因式中有两个相等,那么刚才所说仍适用于这第三个不相等的因式,前而关于两个相等因式所讲的,适用于这里的两个相等因式,只剩下三个实线性因式都相等的情形了. 设 $P=(\alpha y-bx)^3M$,要方程

$$P+Q+R+S+\cdots=0$$

在无穷远处成立,则必$(\alpha y-bx)^3$ 为有限值或小于无穷值 ∞^3,从而 P 所达到的无穷将小于 ∞^n,在无穷远处有$\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$.

§ 186

为讨论这一情形,首先要看 Q,看 Q 是否以 $ay-bx$ 为因式.

这里要指出,如果 Q 为零,则认为 Q 以 $ay-bx$ 为因式,因为零以任何因式为因式.先假定 $ay-bx$ 不是 Q 的因式.由 Q,M 分别为 $n-1$和 $n-3$ 次函数,知$\frac{Q}{(ax+by)^2M}$为零次函数.因而置$\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$,则这零次函数为常数,设为 A,我们得到$(ay-bx)^3+A(ax+by)^2=0$,后继项在无穷远处与 $A(ax+by)^2$ 相比较略去.

§ 187

该方程所表示的曲线,伸向无穷远时与方程

$$P+Q+R+S+\cdots=0$$

表示的曲线相合.为了进一步了解这条曲线,我们取新的横标和纵标为

$$t=\frac{ax+by}{g},u=\frac{ay-bx}{g},$$

其中$\sqrt{a^2+b^2}=g$.在新坐标之下方程为

$$u^3+\frac{At^2}{g}=0,$$

$t=\infty$时该方程给出曲线

$$P+Q+R+\cdots=0$$

的伸向无穷的部分.因而确定了曲线 $u^3+\frac{At^2}{g}=0$ 的形状,也就确定了曲线 $P+Q+R+\cdots=0$ 伸向无穷部分的形状.下一章我们专门讨论这种渐近曲线.

§ 188

如果 $ay-bx$ 是 Q 的因式,这又分为$(ay-bx)^2$ 是否同时也为 Q 的因式两种情形.假定$(ay-bx)^2$ 不是 Q 的因式,记$\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$时零

次函数$\frac{Q}{(ay-bx)(ax+by)M}$的值为常数$A$,我们得到

$$(ay-bx)^3+A(ay-bx)(ax+by)+\frac{R}{M}+\frac{S}{M}+\cdots=0.$$

这里置$\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$,则 R 被 $ay-bx$ 除得尽时,$\frac{R}{M}$成为$B(ay-bx)$,R 不被 $ay-bx$ 除得尽时,$\frac{R}{M}$成为$B(ax+by)$,不管 R 是否被$ay-bx$ 除得尽,$\frac{S}{M}$都成为常数C.如果照前面那样变换成新坐标 t 和 u,则方程成为

$$u^3+\frac{Atu}{g}+\frac{Bu}{g^2}+\frac{C}{g^3}=0.$$

或

$$u^3+\frac{Atu}{g}+\frac{Bt}{g^2}+\frac{C}{g^3}=0.$$

由于这里只考虑 $t=\infty$ 的情形,所以最后一项都略去,从而前一方程成为

$$u^3+\frac{Atu}{g}+\frac{Bu}{g^2}=0,$$

给出两条渐近线 $u=0$ 和 $u^2+\frac{At}{g}=0$,前一条为直线,后一条为抛物线.后一方程 $t=\infty$时,如果 u 有限,则由有限与无穷相比较可略去,得$\frac{Atu}{g}+\frac{Bt}{g^2}=0$,从而 $u=\frac{-B}{Ag}$,这是一条直线;如果 u 为无穷,则由第三项可略去,得

$$u^2+\frac{At}{g}=0.$$

这是抛物线方程,这样两种情况下各自的两条渐近线,都是一条为抛物线,一条为直线,因此这两种情况无需区分.

§ 189

现在设$(ay-bx)^2$是Q的因式,那么对应$(ay-bx)$是和不是R的因式,完成前面的运算,我们得到t,u间的方程

$$u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bu}{g^2}+\frac{C}{g^3}=0,\ u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bt}{g^2}=0.$$

前一情形:当方程

$$u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bu}{g^2}+\frac{C}{g^3}=0$$

的三个根都为实数时,是三条平行直线;有两个根是虚数时,是唯一的渐近直线.指出一点,三条平行渐近线,可以两条重合,可以三条重合.后一种情形

$$u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bt}{g^2}=0,$$

如果$t=\infty$,则必u也为无穷方程才能成立.u无穷时,与u^3比较项$\frac{Au^2}{g}$可以略去,我们得到

$$u^3+\frac{Bt}{g^2}=0,$$

这是三阶渐近曲线方程.

§ 190

如果$A=0,B=0,C=0$,则应考虑方程$P+Q+R+S+\cdots=0$的后续项,它们给出方程

$$u^3+\frac{D}{g^4t}+\frac{E}{g^5t^2}+\frac{F}{g^6t^3}+\cdots=0,$$

只要这里的D不等于零,第三及其以后的项就都可以略去,得u^3

$+\frac{D}{g^4 t}=0$. $D=0$，得 $u^3+\frac{E}{g^5 t^2}=0$，加上 $E=0$，得 $u^3+\frac{F}{g^6 t^3}=0$，类推，这些方程确定的曲线，当 $t=\infty$ 时都与方程 $P+Q+R+S+\cdots=0$ 确定的曲线重合. 又，这些方程都含有奇次幂 u^3，因而都有实根，都有伸向无穷的分支，在每种情况下直线 $u=0$ 都是渐近线，因为曲线

$$u^3+\frac{D}{g^4 t}=0,\ u^3+\frac{D}{g^5 t^2}=0,\cdots$$

都以它为渐近线.

§ 191

同是收敛于直线的分支，可以极为不同，对它们的区别应细加考察. 我们通过确定一些简单曲线来进行考察，这些简单曲线都收敛于原曲线的渐近线. 例如，当方程

$$u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bu}{g^2}+\frac{C}{g^3}=0$$

的三个根都为实数时，虽然我们知道有三条平行渐近线，但是关于曲线伸向无穷的分支，它究竟是以 $u=\frac{C}{t}$ 为方程的双曲线，还是别的形状的，比方说以 $u=\frac{C}{t^2}$ 或 $u=\frac{C}{t^3}$ 为方程的曲线，我们还完全不清楚. 为了弄清这一点，取方程的下一项 $\frac{D}{g^4 t}$，它为零，则取再下一项 $\frac{E}{g^5 t^2}$，它也为零，则继续往下取 $\frac{F}{g^6 t^3}$. 设最近的不为零的后继项为 $\frac{K}{t^\kappa}$. 由方程

$$P+Q+R+\cdots=0$$

的次数为 n，知 κ 不大于 $n-3$，设表达式

$$u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bu}{g^2}+\frac{C}{g^3}$$
分解成因式为$(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)$,则

$$(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)-\frac{K}{t^\kappa}=0.$$

令 $u-\alpha=\frac{I}{t^\mu}$,它表示一条渐近线.我们有

$$\frac{I}{t^\mu}(\alpha-\beta+\frac{I}{t^\mu})(\alpha-\gamma+\frac{I}{t^\mu})=\frac{K}{t^\mu},$$

t 趋向无穷,得

$$\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)I}{t^\mu}=\frac{K}{t^\kappa}.$$

§ 192

如果 α 既不等于 β 也不等于 γ,则该方程成立,此时我们有

$$I=\frac{K}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\mu=k,$$

根 $u=\alpha$ 给出渐近曲线

$$u-\alpha=\frac{K}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)t^\kappa}.$$

如果三个根都不相等,则每个根给出一条这样的渐近线.如果有两个根相等,比如 $\beta=\alpha$,则这两条渐近线合而为一,此时我们有

$$\frac{I^2(\alpha-\gamma)}{t^2\mu}=\frac{K}{t^\kappa},$$

由此得

$$I^2=\frac{K}{\alpha-\gamma},\ 2\mu=k.$$

因而双重渐近线的方程为

$$(u-\alpha)^2=\frac{K}{(\alpha-\gamma)t^\kappa}.$$

如果三个根都相等，则三条渐近线合为一条，其方程为

$$(u-\alpha)^3=\frac{K}{t^\kappa}.$$

§ 193

考虑方程 $P+Q+R+S+\cdots=0$ 的最高次项部分 P 有四个实线性因式的情形. 它们或者都不相等，或者有两个相等，或者有三个相等，或者四个都相等，前三种情况下伸向无穷的分支及其渐近线都可由前节得知，唯一需要讨论的情况是四个都相等. 此时我们令 $P=(ay-bx)^4M$，M 为 $n-4$ 次函数，照我们做过的那样，为得到常数，令 $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$，为改变轴，令

$$t=\frac{ax+by}{g},\quad u=\frac{ay-bx}{g},$$

其中 $g=\sqrt{a^2+b^2}$，这样得到渐近线 t,u 间方程. 首先，如果 Q 不被 $ay-bx$ 整除，得到的是

$$u^4+\frac{At^3}{g}=0.$$

§ 194

如果 Q 被 $ay-bx$ 整除，但不被 $(ay-bx)^2$ 整除，得到的是

$$u^4+\frac{At^2u}{g}+\frac{Bt^2}{g^2}=0.$$

$t=\infty$ 时，纵标 u 可以有限可以无限，得到的两条渐近线为直线 $u+\frac{B}{gA}=0$和曲线 $u^3+\frac{At^2}{g}=0$. 为进一步考察渐近直线，我们取最靠近的非零项，设为$\frac{K}{t^\kappa}$，得方程

$$u+\frac{B}{gA}+\frac{gK}{At^{\kappa+2}}=0.$$

横标 $t=\infty$ 时,该方程表示的曲线与所求曲线相合.

§ 195

设 Q 被 $(ay-bx)^2$ 整除,但不被 $(ay-bx)^3$ 整除.对 R 被和不被 $ay-bx$ 整除两种情形分别进行讨论.R 被 $ay-bx$ 整除,得

$$u^4+\frac{Atu^2}{g}+\frac{Btu}{g^2}+\frac{Ct}{g^3}=0,$$

R 不被 $ay-bx$ 整除,得

$$u^4+\frac{Atu^2}{g}+\frac{Bt^2}{g^2}+\frac{Ct}{g^3}=0.$$

从第一个方程,u 有穷得

$$u^2+\frac{Bu}{gA}+\frac{C}{g^2A}=0,$$

u 无穷得

$$u^2+\frac{At}{g}=0.$$

这前一个方程,如果它的两个根为实数,且不相等,则得到的是两条平行直线;如果它的两个根为虚数,则没有伸向无穷的分支.这后一个方程 $u^2+\frac{At}{g}=0$ 给出的当然是渐近抛物线.

第二个方程

$$u^4+\frac{Atu^2}{g}+\frac{Bt^2}{g^2}=0$$

($t=\infty$ 时,与 $\frac{Bt^2}{g^2}$ 比较,$\frac{Ct}{g^3}$ 略去)包含两个状如 $u^2+\alpha t=0$ 的方程,$A^2>4B$ 时,得两条渐近抛物线;$A^2=4B$ 时,这两条渐近抛物线重合为一条;$A^2<4B$ 时,为虚根,没有伸向无穷的分支.

§ 196

如果 Q 被$(ay-bx)^3$ 整除,那么由 R 和 S 被和不被 $ay-bx$ 整除,得方程

$$u^4+\frac{Au^3}{g}+\frac{Bu^2}{g^2}+\frac{Cu}{g^3}+\frac{D}{g^4}=0,$$

$$u^4+\frac{Au^3}{g}+\frac{Bu^2}{g^2}+\frac{Ct}{g^3}=0,$$

$$u^4+\frac{Au^3}{g}+\frac{But}{g^2}+\frac{Ct}{g^3}=0,$$

$$u^4+\frac{Au^3}{g}+\frac{Bt^2}{g^2}=0.$$

第一个方程,如果根都为实数,且不相同,则它表示四条相平行的直线,如果有两个或更多个根相等,则有同样条数的直线重合为一条,如果有两个或四个虚根,则平行直线减少两条或不存在.在第二个方程中,$t=\infty$ 时,纵标 u 为无穷,方程成为 $u^4+\frac{Ct}{g^3}=0$,这是一条四阶渐近曲线,从第三个方程可以得到有限值,我们有 $u+\frac{c}{gB}=0$.我们还有 $u^3+\frac{Bt}{g^2}=0$,这是三阶渐近线.最后,第四个方程,当 $t=\infty$ 时 u 无穷,它变成 $u^4+\frac{Bt}{g^2}=0$.该方程 B 为正时不可能,B 为负时给出两条共顶点方向相反的抛物线,它们都在无穷远处与原曲线重合.

§ 197

从以上所讲已经清楚,当最高次部分 P 含有更多相等因式时

讨论应如何进行.至于不相等因式,它们可以分别对待,每个确定一条渐近直线.有两个因式相等时,照§178和接下去几节中讲的那样处理.类似地,有三个因式相等时,按§185和接下去几节讲的办.四个因式相等的情况我们刚讨论过.从这些讨论我们可以去处理有更多个因式相等的情形.我们已经看到了曲线伸向无穷分支的多样性,对局限于有限范围中的曲线,其多样性我们未触及.

第八章

关于渐近线

§ 198

前一章我们看到,渐近直线之外还有方程 $u^{\mu} = Ct^{\nu}$ 表示的渐近曲线,从渐近直线又可导出渐近曲线,导出的渐近曲线比渐近直线更贴近曲线.从曲线的任何一条渐近直线我们都可导出一条曲线,这曲线以渐近直线为渐近线,而它本身又是原曲线的渐近线.这种渐近曲线能更加准确地表示原曲线的性质,它不仅能指明曲线的逼近于渐近直线的分支的条数,还能指明分支是从上面还是从下面,或者是从左面还是从右面逼近渐近直线.

§ 199

渐近线的种类无穷,最方便的讨论方式是按我们得到它的顺序进行.首先是产生于最高次部分单因式的,即不与别的因式相等的因式的渐近线;其次是产生于两个相等因式的渐近线;再次是产生于三个相等因式的渐近线;接下去是产生于四个相等因式的渐

近线，等等．假定所给是 x,y 间的 n 次方程，形状为

$$P+Q+R+S+\cdots=0,$$

P 是最高次部分，包含所有次数为 n 的项．Q 为次高次部分，包含所有次数为 $n-1$ 的项，R,S 等类推．

§ 200

设 $ay-bx$ 为 P 的线性因式，且 P 没有与这个因式相等的另外的因式．记 $P=(ay-bx)M$，M 是不被 $ay-bx$ 整除的 $n-1$ 次齐次函数．设 AZ 为轴（图35），取横标 $AP=x$，纵标 $PM=y$．为简单地表示因式 $ay-bx$，我们取另外一条直线 AX 为轴，AX 交原轴于 A，与原轴所成角 XAZ 的正切为 $\frac{b}{a}$，从而正弦、余弦为 $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$．在新轴上取横标 $AQ=t$，纵标 $QM=u$，平行于新坐标引 Pg,Pf，得

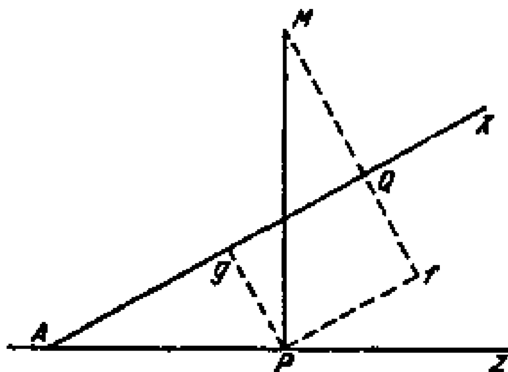


图 35

$$Pg=Qf=\frac{bx}{\sqrt{a^2+b^2}},Ag=\frac{ax}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$Mf=\frac{ay}{\sqrt{a^2+b^2}},Pf=Qg=\frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

从而

$$t=Ag+Qg=\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad u=Mf-Qf=\frac{ay-bx}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

现在纵标 u 就是最高次部分 P 的因式．

§ 201

反之,从前节关系式得

$$y=\frac{au+bt}{\sqrt{a^2+b^2}},\ x=\frac{at-bu}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

将这两个表达式代入方程 $P+Q+R+\cdots=0$,得同一曲线以 AX 为轴的 t,u 间方程,为了避免过多的系数,代它们以 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$,代替之后得

$$M=\alpha t^{n-1}+\alpha t^{n-2}u+\alpha t^{n-3}u^2+\cdots,$$
$$Q=\beta t^{n-1}+\beta t^{n-2}u+\beta t^{n-3}u^2+\cdots,$$
$$R=\gamma t^{n-2}+\gamma t^{n-3}u+\gamma t^{n-4}u^2+\cdots,$$
$$S=\delta t^{n-3}+\delta t^{n-4}u+\delta t^{n-5}u^2+\cdots,$$
$$T=\varepsilon t^{n-4}+\varepsilon t^{n-5}u+\varepsilon t^{n-6}u^2+\cdots,$$

等等.我们要做的是求渐近线,应取横标 t 为无穷,从而这些表达式中与第一项相比较,其他项都可忽略,也即只要第一项不为零,其他项都可略去.第一项为零,取第二项,第一、二项都为零,则取第三项.

§ 202

函数 M 不被 u 所整除,所以它的第一项不能为零,因而有 $\alpha t^{n-1}u+\beta t^{n-1}=0$,由此得 u 的有限值,设为 c.这表明平行于 AX 轴至 AX 轴的距离为 c 的直线是渐近线.为得到更贴近原曲线的渐近曲线,换第一项以外的 u 为 c,得

$$\alpha t^{n-1}u+\beta t^{n-1}+t^{n-2}(\alpha c^2+\beta c+\gamma)+$$
$$t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+\cdots=0,$$

或者由 $\alpha u+\beta=u-c$ 得

$$(u-c)t^{n-1}+t^{n-2}(\alpha c^2+\beta c+\gamma)+$$
$$t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+\cdots=0.$$
如果第二项不为零,则可以略去后继项,得
$$(u-c)+\frac{A}{t}=0,$$
如果第二项为零,取第三项,得
$$(u-c)+\frac{A}{t^2}=0.$$
第三项为零,得
$$(u-c)+\frac{A}{t^3}=0,$$
类推.如果常数项以外的后继项都为零,则
$$(u-c)+\frac{A}{t^{n-1}}=0.$$
如果常数项也为零,则整个方程被 $u-c$ 整除.直线 $u-c=0$ 是曲线的一部分.

§ 203

如果令 $u-c=z$,即置横标于渐近直线上,则最高次部分单因式所给出的渐近曲线全都包含在通用方程 $z=\frac{C}{t^\kappa}$ 之中,κ 是小于指数 n 的整数.现在我们来看看横标 t 无穷时这些渐近线的形状.设 XY 为取作轴的渐近直线(图 36),A 为原点.引直线 CD,得到记为 P,Q,R,S 的四个区域.先令 $z=\frac{C}{t}$,则 t 取负值时,z 为负,因而曲线有两个分支,EX 和 FY,位于对顶区域 P 和 S 中,逼近于直线 XY.κ 为任何奇数时,情况都是这样.如果 $\kappa=2$,即 $z=\frac{C}{t^2}$,则不管 t 为正为负,z 恒为正.因而曲线有位于区域 P 和 Q 中的逼近

于直线 XY 的两个分支 EX 和 FY(图 37).κ 为任何偶数时,情况都是这样,但 κ 越大,逼近于 XY 的速度越快.

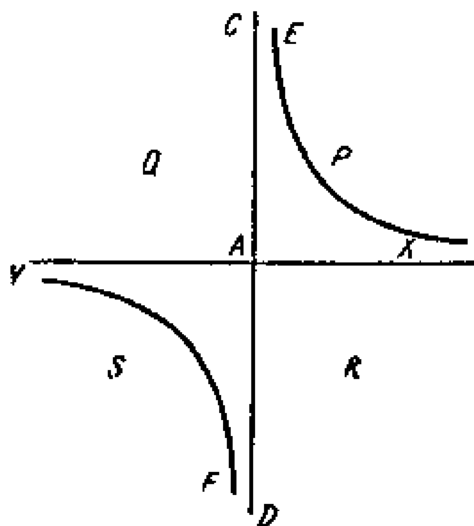


图 36

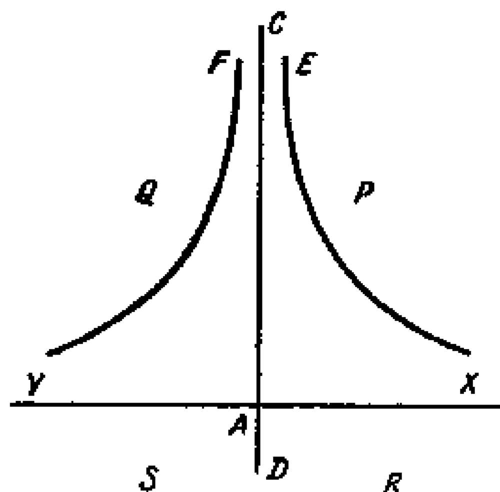


图 37

§ 204

设最高次部分 P 有相等的两个因式 $ay-bx$,照前面做过的那样,改变轴得

$$P = \alpha t^{n-2}u^2 + \alpha t^{n-3}u^3 + \cdots,$$

$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \beta t^{n-4}u^3 + \cdots,$$

$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 + \cdots,$$

$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 + \cdots,$$

等等.由 Q 的第一项的有无,我们得到两个方程

Ⅰ. $\alpha t^{n-2}u^2 + \beta t^{n-1} = 0$,即 $\alpha u^2 + \beta t = 0$.

Ⅱ. $\alpha t^{n-2}u^2 + \beta t^{n-2}u + \gamma t^{n-2} = 0$,即 $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$.

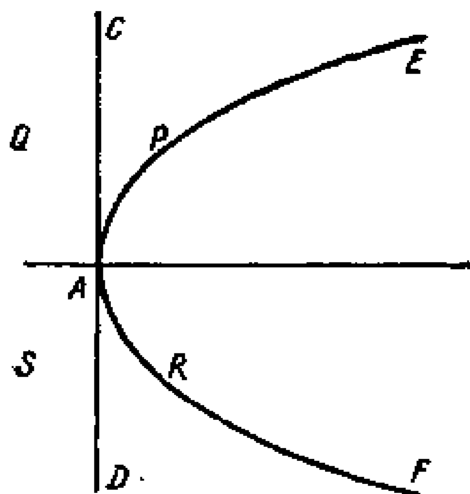


图 38

第一个方程 $\alpha u^2+\beta t=0$ 成立时，渐近线是抛物线（图 38），在无穷远处它的两个分支与曲线的两个分支相合．因而曲线在两个区域 P 和 R 中有分支，这两个分支最终都与抛物线 EAF 的分支相合．

§ 205

得到的是第二个方程 $\alpha u^2+\beta u+\gamma=0$ 的时候，应区分该方程有无实根：无实根，则曲线没有伸向无穷的分支；有相异实根 $u=c,u=d$，则曲线有两条相平行的渐近直线．我们应像做过的那样，对每条线的性质进行考察．例如，由

$$\alpha u^2+\beta u+\gamma=(u-c)(u-d),$$

我们令因式 $u-c$ 之外的 u 都为 c，得

$$(c-d)t^{n-2}(u-c)+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+\gamma c^2+\delta c+\varepsilon)+\cdots=0.$$

如果第二项不为零，则 $t=\infty$ 时后继项都可略去，从而得到渐近线

$$(u-c)+\frac{A}{t}=0,$$

第二项为零,第三项不为零,得

$$(u-c)+\frac{A}{t^2}=0,$$

类推.第一个不为零的后继项是常数项时,得

$$(u-c)+\frac{A}{t^{n-2}}=0.$$

$t=\infty$时这些曲线的形态前面我们都已经讨论过了.

§ 206

如果方程 $\alpha u^2+\beta u+\gamma=0$ 的两个实根相等,也即如果 $\alpha u^2+\beta u+\gamma=(u-c)^2$,那么代 $u=c$ 入其余各项,得

$$t^{n-2}(u-c)^2+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+\gamma c^2+\delta c+\epsilon)+\cdots=0.$$

如果第二项不为零,或者第二项为零第三项不为零,或者第二第三项为零第四项不为零,则我们依次得到渐近线方程

$$(u-c)^2+\frac{A}{t}=0,$$

$$(u-c)^2+\frac{A}{t^2}=0,$$

$$(u-c)^2+\frac{A}{t^3}=0,$$

类推,直至遇到的第一个不为零的项为常数项时,得渐近线方程

$$(u-c)^2+\frac{A}{t^{n-2}}=0.$$

常数项也为零,得$(u-c)^2=0$,直线是曲线的一部分,曲线是复合的.

§ 207

有两个相等因式的各种情形似乎我们都考虑过了.其实不然,

最后一个方程可以取另外几种形式，从而得到另外的渐近线．当 t^{n-3} 的系数被 $u-c$ 整除时，第二项由于因式 $u-c$ 而保留，再加上最近的非零后继项，这样得到方程

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^2}=0,$$

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^3}=0$$

直到

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^{n-2}}=0.$$

如果第二项为零，或者被 $(u-c)^2$ 整除，那就得看第三项；如果第三项被 $u-c$ 整除，则它由于 $u-c$ 而保留，再加上最靠近的非零后继项，这时得到的方程为

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^2}+\frac{B}{t^3}=0,$$

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^2}+\frac{B}{t^4}=0,$$

直到

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^2}+\frac{B}{t^{n-2}}=0.$$

如果第三项为零，第四项被 $u-c$ 整除，或者第四项为零，第五项被 $u-c$ 整除，等等，那么我们得到渐近线方程

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^p}+\frac{B}{t^q}=0,$$

指数 p 恒小于 q，q 小于 $n-1$.

§ 208

令 $u-c=z$，则上面的所有方程就都成了

$$z^2-\frac{Az}{t^p}+\frac{B}{t^q}=0.$$

我们对 q 大于、等于和小于 $2p$ 三种情形分别进行讨论.

q 大于 $2p$ 时,原方程可分解为两个方程

$$z-\frac{A}{t^p}=0, Az-\frac{B}{t^{q-p}}=0,$$

$t=\infty$ 时这两个方程都成立.令 $z=\frac{A}{t^p}$,原方程成为

$$\frac{A^2}{t^{2p}}-\frac{A^2}{t^{2p}}+\frac{B}{t^q}\text{或}A^2-A^2+\frac{B}{t^{q-2p}}=0,$$

由 q 大于 $2p$, p 小于$\frac{n-2}{2}$,知该方程成立,令 $z=\frac{B}{At^{q-p}}$,得

$$\frac{B^2}{A^2t^{2q-2p}}-\frac{B}{t^q}+\frac{B}{t^q}\text{或}\frac{B^2}{A^2t^{q-2p}}-B+B=0,$$

$t=\infty$ 时第一项为零,该方程成立.因而 q 大于 $2p$ 时,渐近直线之外还有两条渐近曲线,这样就有四条伸向无穷的分支.

$q=2p$ 时,方程为

$$z^2-\frac{Az}{t^p}+\frac{B}{t^{2p}}=0.$$

A^2 小于 $4B$ 时,根为虚数,没有渐近线;A^2 大于 $4B$ 时,有两条相似的渐近线 $z=\frac{C}{t^p}$.

q 小于 $2p$ 情况下 $t=\infty$ 时,中间项为零,得渐近线方程 $z^2+\frac{B}{t^q}=0$.前面的渐近线的形状我们都已经讨论过,下面讨论方程为

$$z^2=\frac{C}{t^\kappa}$$

的渐近线.

§ 209

取渐近直线 $u=c$ 为轴,记纵标 $u-c$ 为 z,则前面的渐近曲线

全都包含在方程 $z^2=\frac{C}{t^\kappa}$ 之中，κ 为小于 $n-1$ 的整数. $t=\infty$ 时，这些曲线的趋向无穷的分支可以用下面的方法来求. 如果 $\kappa=1$，即 $z^2=\frac{C}{t}$，那么由 t 不能为负，知曲线有两个分支 EX 和 FX，分别位于区域 P 和 R 中(图 39). κ 为任何奇数时情况都是这样. 如果 κ 为偶数，例如为 2，即 $z^2=\frac{C}{t^2}$，那么首先要看 C 为正还是为负. C 为负，则方程没有实根，因而曲线没有伸向无穷的分支；C 为正，则曲线有四条趋向无穷并与渐近线 XY 相合的分支(图 40)，这四个分支 EX，FX，GY，HY 分别位于区域 P，Q，R，S 中.

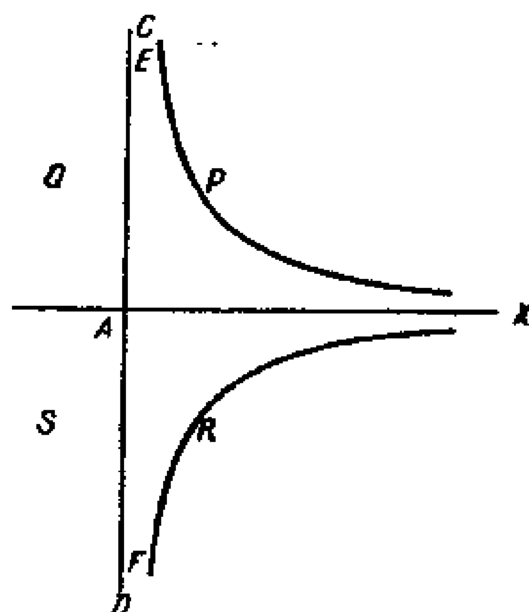


图 39

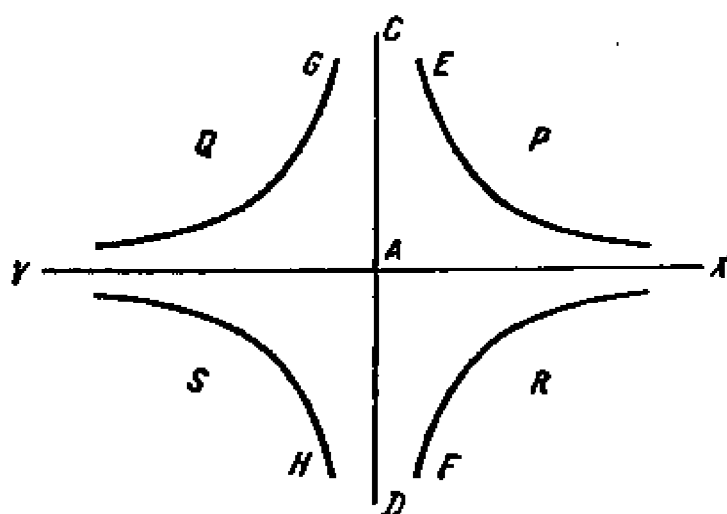


图 40

§ 210

假定最高次部分 P 有三个相等的因式，且方程已经化成以 t，u 为坐标，使得 u 为 P 的这三重因式，我们有

$$P = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \alpha t^{n-3}u^3 + \alpha t^{n-4}u^4 + \cdots,$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \beta t^{n-4}u^3 + \beta t^{n-5}u^4 + \cdots,$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 + \gamma t^{n-6}u^4 + \cdots,$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 + \delta t^{n-7}u^4 + \cdots.$$

等等．由此从 Q，R 的不同情况得

Ⅰ．$\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-1} = 0.$

Ⅱ．$\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-2}u + \gamma t^{n-2} = 0.$

Ⅲ．$\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-3}u^2 + \gamma t^{n-2} = 0.$

Ⅳ．$\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-3}u^2 + \gamma t^{n-3} + \delta t^{n-3} = 0.$

§ 211

方程Ⅰ可化为 $\alpha u^3 + \beta t^2 = 0$，也即这渐近线是三阶线，取横标 t 在 XY 轴上，取 A 为原点，则这三阶线的形状如图 41 所示，有两条伸向无穷的分支 E 和 F，分别位于区域 P 和 Q．

方程Ⅱ可化为 $\alpha u^3 + \beta tu + \gamma t = 0$．$t = \infty$，从该方程可以得到两个 u 值，一个有限，一个无穷．与之对应的方程可分解为 $\beta u + \gamma = 0$ 和 $\alpha u^2 + \beta t = 0$．后一个是抛物线方程，由前面进行过的讨论知，曲线有两条伸向无穷并逼近抛物线的分支．前一个方程给出 $u - c = 0$，是渐近直线方程．将 $\beta u + \gamma = u - c$ 以外的 u 都换为 c，即可确定该渐近线的性质．换过之后得

$$t^{n-2}(u - c) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(\alpha c^4 + \beta c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \epsilon) + \cdots = 0,$$

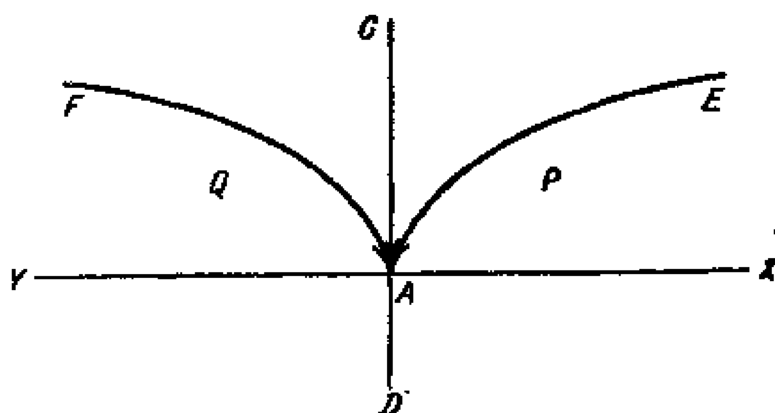


图 41

由此,照前面讨论的得到或$(u-c)+\frac{A}{t}=0$,或$(u-c)+\frac{A}{t^2}=0$,或…,最后一个可能的方程为$(u-c)+\frac{A}{t^{n-2}}=0$.因而这种情况下曲线有两条渐近线,一条是这里的直线,另一条是抛物线.

§ 212

方程Ⅲ,$\alpha u^3+\beta u^2+\gamma t=0$,$t=\infty$时,如果$u$不等于$\infty$,它不成立.$u$等于$\infty$时,与$\alpha u^3$比较,$\beta u^2$略去,得三阶渐近线方程$\alpha u^3+\gamma t=0$.渐近线的形状如图42所示,有两个伸向无穷的分支$AE$和$AF$,分别位于对顶区域$P$和$S$.

方程Ⅳ,$\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta=0$,给出一条或三条相平行的渐近直线,这里假定它们中的任何两个都不相等,为讨论这渐近直线的性质,我们先假定$u=c$是方程的单根,且

$$\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta=(u-c)(fu^2+gu+h).$$

将因式$u-c$以外的u换为c,得

$$t^{n-3}(u-c)+At^{n-4}+Bt^{n-5}+Ct^{n-6}+\cdots=0.$$

由此求得状如$u-c=\frac{K}{t^{\kappa}}$的渐近线,其中κ小于$n-2$.

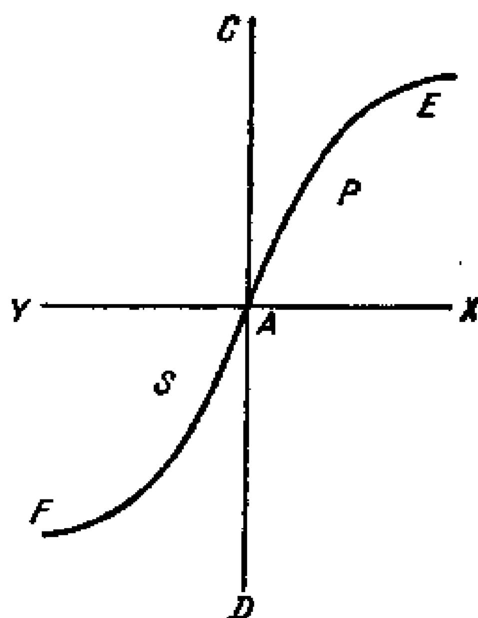


图 42

§ 213

如果方程 $\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta=0$ 的两个根相等,表达式成为 $(u-c)^2(fu+g)$,将因式 $u-c$ 以外的 u 换为 c,得

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^p}+\frac{B}{t^q}=0,$$

其中 q 小于 $n-2$,p 小于 q,这种情况我们前面讨论过,只剩下方程 $\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta=0$ 的三个根都相等,即 $(u-c)^3$ 这一种情形了.此时我们得到方程

$$(u-c)^3t^{n-3}+Pt^{n-4}+Qt^{n-5}+Rt^{n-6}+St^{n-7}+\cdots=0.$$

P 不被 $u-c$ 整除时,换 u 为 c 得

$$(u-c)^3+\frac{A}{t}=0.$$

$u-c$ 是 P 的单因式时,将 $u-c$ 以外的 u 换为 c,得

$$(u-c)^3+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^q}=0,$$

其中 q 小于 $n-2$，$\frac{B}{t^q}$是 $u=c$ 时第一个不为零的后继项. P 被 $(u-c)^2$整除，Q 不含因式 $u-c$ 时，得

$$(u-c)^3+\frac{A(u-c)^2}{t}+\frac{B}{t^2}=0.$$

如果第二项被 $(u-c)^3$ 整除，则应依次继续向后，直至遇到不被 $(u-c)^3$整除的项. 如果遇到的这一项被 $u-c$ 整除，则再向后，直至遇到不被 $u-c$ 整除的项. 如果遇到的项被 $(u-c)^2$ 整除，也应继续向后，直至遇到不被 $u-c$ 整除的项. 这样我们必能得到一个形状为

$$(u-c)^3+\frac{A(u-c)^2}{t^p}+\frac{B(u-c)}{t^q}+\frac{C}{t^r}=0$$

的方程，其中 r 小于 $n-2$，q 小于 r，p 小于 q.

§ 214

该方程或者包含三个状如 $u-c=\frac{K}{t^\kappa}$的方程，或者包含一个这样的方程和一个状如 $(u-c)^2=\frac{K}{t^\kappa}$的方程，或者只包含一个状如 $(u-c)^3=\frac{K}{t^\kappa}$的方程. 最后一种情况发生在$3p$ 大于 r，且$3q$ 大于$2r$ 时，可以有两个方程是虚的，不指示渐近线. 前两种情况下渐近线的形状我们都已讨论过. 第三种情况 $(u-c)^3=\frac{K}{t^\kappa}$，$\kappa$ 为奇数时，曲线的形状如图36所示，有伸向无穷的两个分支 EX 和 FY，位于区域 P 和 S 内；κ 为偶数时，曲线的形状如图37所示，有伸向无穷的两个分支 EX 和 FY，位于渐近直线 XY 的同侧，在区域 P 和 Q 中.

§ 215

最高次部分的四个或更多个实线性因式相等时,渐近线的形状应如何进行考察,这从以上所讲易于看出.进一步的考察我们不进行,作为本章的结束,我们举一个例子来运用本章所得结果.

例

设已给曲线的方程为

$$y^3x^2(y-x)-xy(y^2+x^2)+1=0,$$

最高次部分 $y^3x^2(y-x)$有单因式 $y-x$,两个相等因式 x^2 和三个相等因式 y^3.

我们先考虑单因式 $y-x$,此时置 $y=x$,得 $y-x-\frac{2}{x}=0$, $x=\infty$时得$y-x=0$.这是图 43 上渐近直线 BAC 的方程. BAC 与 XY 轴在原点处相交成半直角.做变换 $y=\frac{u+t}{\sqrt{2}}, x=\frac{t-u}{\sqrt{2}}$,使渐近线 BAC 为轴,方程变为

$$\frac{(u+t)(t^2-u^2)^2u}{4}-\frac{(t^2-u^2)(t^2+u^2)}{2}+1=0,$$

乘 4,得

$$\begin{aligned}0=t^5u&+t^4u^2-2t^3u^3&&-2t^2u^4+tu^5+u^6\\&-2t^4&&+2u^4\\&+4&&+2u^4\end{aligned}$$

$t=\infty$时从该方程求得 $u=0$,这样 t^5u 和 $-2t^4$ 以外的项都略去,得渐近曲线 $u=\frac{2}{t}$.即单因式使所给曲线有伸向无穷的分支 bB 和 cC.

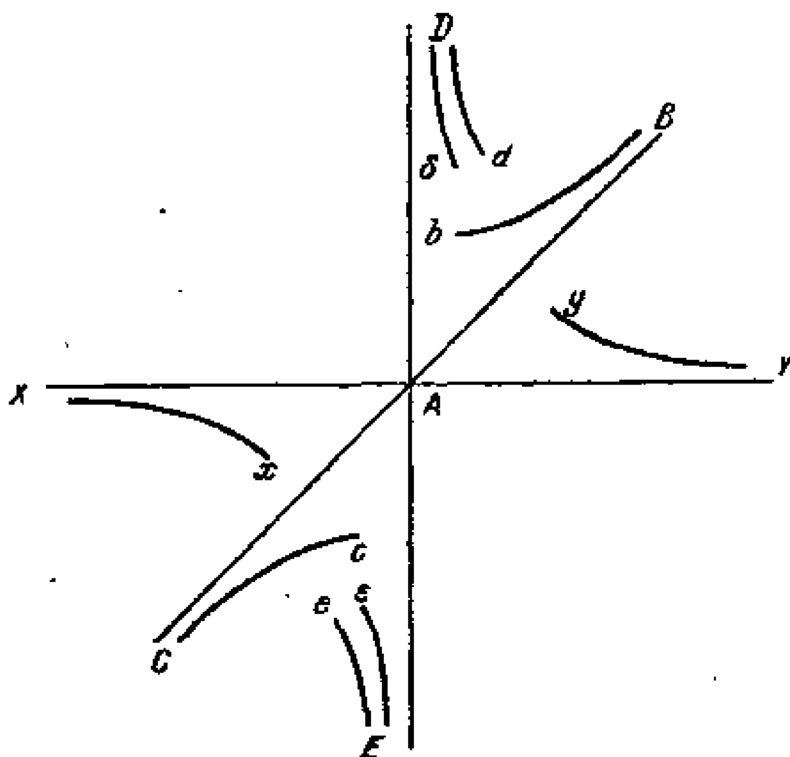


图 43

§ 216

现在考虑两个相等因式 xx. 我们有

$$xx=\frac{xy(y^2+x^2)-1}{y^3(y-x)}.$$

取垂直于原轴 XY 的直线 AD 作轴, 为此做变换 $y=t, x=u$, 得方程

$$\begin{aligned}0= \quad & t^4u^2-t^3u^3\\ & t^3u \qquad -tu^3\\ & +1,\end{aligned}$$

$t=\infty$ 时该方程变为 $t^4u^2-t^3u+1=0$. 由此得两个方程

$$u=\frac{1}{t},\ u=\frac{1}{t^3}.$$

这样两个相等因式 xx 给出四条伸向无穷的分支，两条，dD 和 eE，来自方程 $u=\frac{1}{t}$，另外两条，δD 和 εE，来自方程 $u=\frac{1}{t^3}$.

§ 217

最后考虑三个相等因式 y^3. 取 XY 为轴，为此令 $x=t$，$y=u$，方程变为

$$0=-t^3u^3+t^2u^4-t^3u-tu^3+1,$$

$t=\infty$ 时给出 $t^3u^3+t^3u=0$，也即 $u(u^2+1)=0$. $u^2+1=0$ 没有实根，因而 $u=0$ 是唯一的渐近直线，它与轴 XY 相合. 这条渐近线的性质由方程 $t^3u=1$ 或 $u=\frac{1}{t^3}$表示. 结论是三重因式给出两条伸向无穷的分支 yY 和 xX. 本例中曲线共有八条伸向无穷的分支. 至于这八条分支在有界范围中彼此相对位置的情况，这里不进行讨论.

§ 218

从本章和前一章我们清楚地看到了伸向无穷的分支的多样性. 首先，曲线伸向无穷的分支，必定或者像双曲线那样逼近于一条作为渐近线的直线，或者像抛物线那样，没有渐近直线. 前一种情况下，曲线的分支叫双曲分支，后一种情况下，曲线的分支叫抛物分支，这每一种分支的形状都有无穷多种. 双曲分支的性质由 t，u 间的下列方程表示，其中 t 趋向无穷，

$$u=\frac{A}{t},\ u=\frac{A}{t^2},\ u=\frac{A}{t^3},\ u=\frac{A}{t^4},\cdots,$$

$$u^2=\frac{A}{t},\ u^2=\frac{A}{t^2},\ u^2=\frac{A}{t^3},\ u^2=\frac{A}{t^4},\cdots,$$

$$u^3=\frac{A}{t},u^3=\frac{A}{t^2},u^3=\frac{A}{t^3},u^3=\frac{A}{t^4},\cdots,$$

等等.抛物分支的性质由下列方程表示,

$$u^2=At,u^3=At,u^4=At,u^5=At,\cdots,$$

$$u^3=At^2,u^4=At^2,u^5=At^2,u^6=At^2,\cdots,$$

$$u^4=At^3,u^5=At^3,u^6=At^3,u^7=At^3,\cdots,$$

等等. t 和 u 的指数不都为偶数时,这些方程中的每一个都至少给出两条趋向无穷的分支.两个指数都为偶数时,看方程有无实根,无实根时没有趋向无穷的分支,有实根时有四条趋向无穷的分支.

第九章

二阶线的分类

§ 219

伸向无穷的分支,其性质和条数,是曲线间的根本区别,可作为各阶线分类的依据.对二阶线,以此和以二阶线本身性质为依据所得类相同.

设二阶线的通用方程为

$$\alpha y^2+\beta yx+\gamma x^2+\delta y+\varepsilon x+\zeta=0,$$

先考虑最高次部分 $\alpha y^2+\beta yx+\gamma x^2$ 有无实线性因式.无,则二阶线归为第一类,称为椭圆;有,则要进一步看这因式是否相重,重,则二阶线为抛物线,不重,则为双曲线.

§ 220

最高次部分的两个因式为实,且不相重时,二阶线有两条渐近线.为分析其性质,令

$$\alpha y^2+\beta yx+\gamma x^2=(ay-bx)(cy-dx),$$

得

$$(ay-bx)(cy-dx)+\delta y+\varepsilon x+\zeta=0.$$

先看因式 $ay-bx$，在无穷远处它给出$\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$. 那时我们有

$$ay-bx+\frac{\delta b+\varepsilon a}{bc-ad}+\frac{\zeta}{cy-dx}=0,$$

从而方程

$$ay-bx+\frac{\delta b+\varepsilon a}{bc-ad}=0$$

确定一条渐近直线的位置. 类似地，方程

$$cy-dx+\frac{\delta d+\varepsilon c}{ad-bc}=0$$

给出另一条渐近线.

§ 221

为研究每条渐近线的性质，作变换

$$y=\frac{au+bt}{\sqrt{a^2+b^2}},x=\frac{at-bu}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

令$\sqrt{a^2-b^2}=g$，则

$$u[(ac+bd)u+(bc-ad)t]+\frac{(\delta a-\varepsilon b)u+(\delta b+\varepsilon a)t}{g}+\zeta=0,$$

从而

$$g(bc-ad)tu+g(ac+bd)u^2+(\delta b+\varepsilon a)t+(\delta a+\varepsilon b)u+\zeta g=0.$$

换第一项以外的 u 为

$$u=\frac{\delta b+\varepsilon a}{g(bc-ad)},$$

得

$$[g(bc-ad)u+\delta b+\varepsilon a]t+\frac{(ac+bd)(\delta b+\varepsilon a)^2}{g(bc-ad)^2}$$
$$\frac{(\delta a-\varepsilon b)(\delta b+\varepsilon a)}{g(bc-ad)}+\zeta g=0$$

或

$$g(bc-ad)u+\delta b+\varepsilon a+\frac{g(\delta b+\varepsilon c)(\delta b+\varepsilon a)}{(bc-ad)^2 t}+\frac{\zeta g}{t}=0.$$

这样得方程形状如 $u=\frac{A}{t}$ 的双曲渐近线.类似地,从因式 $cy-dx$ 得到另一条渐近线.从而,最高次部分的因式为实且相异时,二阶线有两对伸向无穷的分支,每对都由一个状如 $u=\frac{A}{t}$ 的方程表示.

§ 222

现在设两因式相重,即

$$\alpha y^2+\beta xy+\gamma x^2=(ay-bx)^2;$$

作变换

$$y=\frac{au+bt}{g},x=\frac{at-bu}{g},$$

得

$$g^2u^2+\frac{(\delta a-\varepsilon b)u}{g}+\frac{(\delta b+\varepsilon a)t}{g}+\zeta=0.$$

t 无穷时,得

$$u^2+\frac{(\delta b+\varepsilon a)t}{g^2}=0,$$

该方程状如 $u^2=At$,表示两条抛物分支,即曲线本身和它的渐近线都是抛物线.如果 $\delta b+\varepsilon a=0$,则方程成为

$$g^2u^2+\frac{\delta gu}{a}+\zeta=0,$$

这是两条相平行的直线的方程,是整个二阶方程可分解为两个线

性因式的情形.

这样,我们的方法对于不曾讨论过的二阶线也可以确定其类别.

§ 223

下面用该方法考察三阶线.三阶线的通用方程为

$$\alpha y^3+\beta y^2x+\gamma yx^2+\delta x^3+\varepsilon y^2+\zeta yx+\eta x^2+\theta y^2+\iota x+\kappa=0.$$

最高次部分为 $\alpha y^3+\beta y^2x+\gamma yx^2+\delta x^3$,次数为奇数,因而它或者有一个实因式,或者三个因式全是实的.可能的情况是

I

只有一个实线性因式.

II

三个因式全是实的,且不重.

III

二重因式.

IV

三重因式.

由于不管有无重因式,我们都只需对一个因式 $ay-bx$ 进行计算,因而我们可以照做过的那样,改变坐标轴的位置,使通用方程变为

$$\alpha t^2u+\beta tu^2+\gamma u^3+\delta t^2+\varepsilon tu+\zeta u^2+\eta t+\theta u+\iota=0,$$

其最高次部分 $\alpha t^2u+\beta tu^2+\gamma u^3$ 有因式 u.

情况 I

§ 224

最高次部分只有一个实线性因式，这是在 β^2 小于 $4\alpha\gamma$ 时，$t=\infty$ 我们有 $\alpha u+\delta=0$，这是渐近直线方程. 从该方程得 $u=c$，我们有

$$\alpha t^2(u-c)+t(\beta c^2+\epsilon c+\eta)+\gamma c^2+\zeta c^2+\theta c+\iota=0,$$

该方程表示的是渐近线，从而由 $\beta c^2+\epsilon c+\eta$ 是否为零得到状如

$$u-c=\frac{A}{t},u-c=\frac{A}{t^2}$$

的两类渐近线，也即情况 I 之下，三阶线有两类.

1

第一类，有单一的渐近线

$$u=\frac{A}{t}.$$

2

第二类，有单一的渐近线

$$u=\frac{A}{t^2}.$$

情况 II

§ 225

三个因式全是实的，且不重，这是在方程

$$\alpha t^2u+\beta tu^2+\gamma u^3+\delta t^2+\epsilon tu+\zeta u^2+\eta t+\theta u+\iota=0$$

中的 β^2 大于 $4\alpha\gamma$ 的时候. 这种情况下，每一个因式都给出前节的

结果,也即都给出状如 $u=\frac{A}{t}$ 或 $u=\frac{A}{t^2}$ 的两个双曲分支.因而这种情况下共给出四类形状不同的三阶线.每一类有彼此倾角任意的三条渐近直线.这四类是

3

第三类,有三条状如 $u=\frac{A}{t}$ 的渐近线.

4

第四类,有两条状如 $u=\frac{A}{t}$ 和一条状如 $u=\frac{A}{t^2}$ 的渐近线.

第五类,有一条状如 $u=\frac{A}{t}$ 和两条状如 $u=\frac{A}{t^2}$ 的渐近线(参见 § 227).

第六类,有三条状如 $u=\frac{A}{t^2}$ 的渐近线.

§ 226

我们来考虑这每种类型是否都实际可能,为此取最高次部分有三个因式的通用方程

$$y(\alpha y-\beta x)(\gamma y-\delta x)+\varepsilon xy+\zeta y^2+\eta x+\theta y+\iota=0,$$

方程中虽无 x^2 项,但并不影响其一般性.由进行过的讨论知,因式 y 给出状如 $u=\frac{A}{t}$ 的渐近线,只要 η 不等于零.我们来考虑因式 $\alpha y-\beta x$ 给出的渐近线,为此令 $y=\alpha u+\beta t$, $x=\alpha t-\beta u$.为简单起见,令 $\alpha^2+\beta^2=1$,这总是允许的,这样,方程变为

$$
\begin{aligned}
&\beta(\beta\gamma-\alpha\delta)t^2u+[2\alpha\beta\gamma-(\alpha^2-\beta^2)\delta]tu^2+\alpha(\alpha\gamma+\beta\delta)u^3+\\
&+\beta(\alpha\varepsilon+\beta\zeta)t^2+[2\alpha\beta\gamma+(\alpha^2-\beta^2)\varepsilon]tu+\alpha(\alpha\zeta-\beta\varepsilon)u^2+\\
&+(\alpha\eta+\beta\theta)t+(\alpha\theta-\beta\eta)u+\\
&+\iota=0.
\end{aligned}
$$

因式 $\alpha y-\beta x$ 成为 u. t 无穷,得

$$u=\frac{\alpha\varepsilon+\beta\zeta}{\alpha\delta-\beta\gamma}=c$$

将含 t 第二项中的 u 换成这个值,我们看到,只要

$$\frac{\alpha\eta+\beta\theta}{\beta}+\frac{(\alpha\varepsilon+\beta\zeta)(\gamma\varepsilon+\delta\zeta)}{(\alpha\delta+\beta\gamma)^2}=0$$

不成立,从因式 u 或 $\alpha y-\beta x$ 就得到状如 $u=\frac{A}{t}$ 的渐近线.类似地,只要

$$\frac{\gamma\eta+\delta\theta}{\delta}+\frac{(\alpha\varepsilon+\beta\zeta)(\gamma\varepsilon+\delta\zeta)}{(\alpha\delta+\beta\gamma)^2}=0$$

不成立,因式 $\gamma y-\delta x$ 就给出状如 $u=\frac{A}{t}$ 的渐近线.

§ 227

由此我们清楚地看到,η 和刚才的这个表达式是可以同时不为零的,即第三类是可以确实存在的.至于第四类,先令 $\eta=0$,我们就得到一条状如 $u=\frac{A}{t^2}$ 的渐近线.另外两个表达式相同,因而只要

$$\theta+\frac{(\alpha\varepsilon+\beta\zeta)(\gamma\varepsilon+\delta\zeta)}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}=0$$

不成立,剩下的两条渐近线,其形状就都为 $u=\frac{A}{t}$.我们得到结论,第四类是可能的.但是,如果 $\eta=0$,那么,另外两个表达式中只要有一个为零,则另一个必为零,因此状如 $u=\frac{A}{t^2}$ 的渐近线,有第二

条，则必有第三条，即第五类不可能. $\eta=0$ 时，得

$$\theta=\frac{-(\alpha\varepsilon+\beta\zeta)(\gamma\varepsilon+\delta\zeta)}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2},$$

所以第六类是可能的，从这两种情况我们得到五类三阶线，前面列的第五类应该去掉.

5

第五类，有三条状如 $u=\frac{A}{t^2}$ 的渐近线.

情况Ⅲ

§ 228

最高次部分有二重因式 u^2，即情况Ⅱ方程中 αt^2u 为零得情况Ⅲ，情况Ⅲ的通用方程为

$$\alpha tu^2-\beta u^3+\gamma t^2+\delta tu+\varepsilon u^2+\zeta t+\eta u+\theta=0,$$

最高次部分含二重因式 u^2 和单因式$(\alpha t-\beta u)$. 单因式产生状如 $u=\frac{A}{t}$ 或 $u=\frac{A}{t^2}$ 的渐近线，取决于

$$(\alpha\delta+2\beta\gamma)(\alpha^2\varepsilon+\alpha\beta\delta+\beta^2\gamma)-\alpha^3(\alpha\eta+\beta\zeta)$$

不为零的成立与否.

§ 229

至于二重因式，γ 不为零成第一种情况. 此时 $t=\infty$ 得 $\alpha u^2+\gamma t=0$，这是状如 $u^2=At$ 的抛物线方程. 由此得两类新的三阶线.

6

第六类,有状如 $u=\frac{A}{t}$和 $u^2=At$ 的渐近线各一条.

7

第七类,有一条状如 $u=\frac{A}{t^2}$的渐近线和一条状如 $u^2=At$ 的渐近抛物线.

§ 230

现在假定 $\gamma=0$. 第三个因式 $\alpha t-\beta u$ 给出状如 $u=\frac{A}{t^2}$的渐近线,条件是

$$\delta(\alpha\epsilon+\beta\delta)=\alpha(\alpha\eta+\beta\zeta).$$

这个等式不成立时,渐近线的形状是 $u=\frac{A}{t}$. 因而我们有方程

$$\left.\begin{array}{l}+\alpha tu^2-\beta u^3\\+\delta tu+\epsilon u^2\\+\zeta t+\eta u\\+\theta\end{array}\right\}=0.$$

令 $t=\infty$,得 $\alpha u^2+\delta u+\zeta=0$.

如果 $\delta^2<4\alpha\zeta$,则给不出任何渐近线,从本情况我们得到下面两类.

8

第八类,有一条状如 $u=\frac{A}{t}$的渐近线.

9

第九类，有一条状如 $u=\frac{A}{t^2}$的渐近线.

§ 231

如果方程 $\alpha u^2+\delta u+\zeta=0$ 的两个根都为实数，且相异，即 $\delta^2>4\alpha\zeta$，那么，我们有两条相平行的渐近直线，形状都为 $u=\frac{A}{t}$，因而这种情况也给出两类线：

10

第十类，有一条状如 $u=\frac{A}{t}$的渐近直线和两条形状也为 $u=\frac{A}{t}$的相平行的渐近线.

11

第十一类，有一条状如 $u=\frac{A}{t^2}$的渐近线和两条相平行的状如 $u=\frac{A}{t}$的渐近线.

§ 232

设方程 $\alpha u^2+\delta u+\zeta=0$ 的两个根相等，即 $\delta^2=4\alpha\zeta$ 或 $\alpha u^2+\delta u+\zeta=\alpha(u-c)^2$，则

$$\alpha t(u-c)^2=\beta c^3-\epsilon c^2-\eta c-\theta,$$

由此得到状如 $u^2=\frac{A}{t}$的渐近线. 从这种情况我们得到两类线

12

第十二类,有状如 $u=\frac{A}{t}$ 和 $u^2=\frac{A}{t}$ 的渐近线各一条.

13

第十三类,有状如 $u=\frac{A}{t^2}$ 和 $u^2=\frac{A}{t}$ 的渐近线各一条.

情况IV

§ 233

最高次部分的三个因式全相等时,方程的形状为

$$\alpha u^3+\beta t^2+\gamma tu+\delta u^2+\varepsilon t+\zeta u+\eta=0.$$

先考虑项 βt^2 的有无.有,即 βt^2 不为零,则曲线有一条状如 $u^3=At^2$ 的渐近抛物线,我们得到

14

第十四类,只有一条状如 $u^3=At^2$ 的渐近抛物线.

§ 234

没有项 βt^2,即 $\beta t^2=0$,则

$$\alpha u^3+\gamma tu+\delta u^2+\varepsilon t+\zeta u+\eta=0.$$

如果这里的 γ 和 ε 都不为零,那么,令 $t=\infty$ 得 $\alpha u^3+\gamma tu+\varepsilon t=0$. 设 γ 不等于零,则该方程包含两个方程:$\alpha u^2+\gamma t=0$ 和 $\gamma u+\varepsilon=0$. 前一个表示状如 $u^2=At$ 的渐近抛物线.置 $\frac{-\varepsilon}{\gamma}=c$,后一个给出

$$\gamma t(u-c)+\alpha c^2+\delta c^2+\zeta c+\eta=0.$$

这是状如 $u=\frac{A}{t}$ 的渐近双曲线方程. 由此得

15

第十五类, 有状如 $u^2=At$ 的渐近抛物线和状如 $u=\frac{A}{t}$ 的渐近直线各一条, 且抛物线的轴平行于渐近直线.

§ 235

$\gamma=0$, 则方程成为

$$\alpha u^3+\delta u^2+\varepsilon t+\zeta u+\eta=0.$$

这里 ε 不能为零, 否则所给线将不是曲线. t 为无穷, 则 u 必无穷, 由此得 $\alpha u^3+\varepsilon t=0$, 这给出

16

第十六类, 有一条状如 $u^3=At$ 的渐近抛物线.

§ 236

牛顿分三阶线为 72 种, 我们的分法分 72 种为 16 类. 两种分法的差别在于, 我们只考虑趋向无穷的分支的性质, 而牛顿同时考虑曲线在有限区域中的性质. 牛顿分成的种数比我们分成的类多得多, 我们的分法能也只能对牛顿分了类的曲线进行分类.

§ 237

为了更好地了解各类曲线的形态和性质, 下面我们列出各类

的最简通用方程，和各类所包含的牛顿的种次.

第一类

$$y(x^2-2mxy+n^2y^2)+ay^2+bx+cy+d=0,$$

其中 $m^2<n^2, b\neq 0$.

包含牛顿的第 33,34,35,36,37,38 种.

第二类

$$y(x^2-2mxy+n^2y^2)+ay^2+cy+d=0,$$

其中 $m^2<n^2$.

包含牛顿的第 39,40,41,42,43,44,45 种.

第三类

$$y(x-my)(x-ay)+ay^2+bx+cy+d=0,$$

其中 $b\neq 0, mb+c+\frac{a^2}{(m-n)^2}\neq 0$. $nb+c+\frac{a^2}{(m-n)^2}\neq 0, m\neq n$.

包含牛顿的第 1,2,3,4,5,6,7,8,9 种，$a=0$ 时还包含第 24,25,26,27 种.

第四类

$$y(x-my)(x-ny)+ay^2+cy+d=0,$$

其中 $c+\frac{a^2}{(m-n)^2}\neq 0, m\neq n$.

包含牛顿的第 10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21 种，$a=0$时还包含第 28,29,30,31 种.

第五类

$$y(x-my)(x-ny)+ay^2-\frac{a^2y}{(m-n)^2}+d=0,$$

其中 $m\neq n$.

包含牛顿的第 22,23,和 32 种.

第六类

$$y^2(x-my)+ax^2+bx+cy+d=0,$$

其中 $a\neq 0, 2m^3a^2-mb-c\neq 0$.

包含牛顿的第46,47,48,49,50,51,52种.

第七类

$$y^2(x-my)+ax^2+bx+m(2m^2a^2-b)y+d=0,$$

包含牛顿的第53,54,55,56种.

第八类

$$y^2(x-my)+b^2x+cy+d=0,$$

其中 $c\neq -mb^2$, $b\neq 0$.

包含牛顿的第61和62种.

第九类

$$y^2(x-my)+b^2x-mb^2y+d=0,$$

其中 $b\neq 0$.

包含牛顿的第63种.

第十类

$$y^2(x-my)-b^2x+cy+d=0,$$

其中 $c\neq mb^2$, $b\neq 0$.

包含牛顿的第57,58,59种.

第十一类

$$y^2(x-my)-b^2x+mb^2y+d=0,$$

其中 $b\neq 0$.

包含牛顿的第60种.

第十二类

$$y^2(x-my)+cy+d=0,$$

其中 $c\neq 0$.

包含牛顿的第64种.

第十三类

$$y^2(x-my)+d=0,$$

包含牛顿的第65种.

第十四类

$$y^3 + ax^2 + bxy + cy + d = 0,$$

其中 $a \neq 0$.

包含牛顿的第 67,68,69,70,71 种.

第十五类

$$y^3 + bxy + cy + d = 0,$$

其中 $b \neq 0$.

包含牛顿的第 66 种.

第十六类

$$y^3 + ay + bx = 0,$$

其中 $b \neq 0$.

包含牛顿的第 72 种.

§ 238

如果考虑曲线在有界区域中的形状,我们的 16 类里的多数都再分为几种,牛顿的 72 种就是这么产生的.对四阶和更高阶线,我们的每类所含牛顿的种数更多.

第十章

三阶线的基本性质

§ 239

类似于二阶线，三阶、四阶和更高阶线，其基本性质也都可以从通用方程推出. 我们考虑三阶线的最通用方程

$$\alpha y^3+\beta y^2x+\gamma yx^2+\delta x^3+\varepsilon y^2+\zeta yx+\eta x^2+\theta y+\iota x+\kappa=0.$$

该方程表示以 x,y 为坐标，轴及纵标倾角都任意的一切三阶线.

§ 240

只要 $\alpha\neq 0$，每一横标 x 就都对应一个或三个实纵标. 假定是三个，则这三纵标间关系，显然可从方程得到. 令 $\alpha=1$，方程成为

$$y^3+(\beta x+\varepsilon)y^2+(\gamma x^2-\zeta x+\theta)y+\delta x^3+\eta x^2+\iota x+\kappa=0,$$

由此得，对应于同一个横标 x 的三个纵标，和等于 $-\beta x-\varepsilon$，两两乘积之和 $=\gamma x^2+\zeta x+\theta$，三个的相乘积 $=-\delta x^3-\eta x^2-\iota x-\kappa$. 即使有两个纵标为虚数，这种关系也依然成立. 但从复数的和、复数乘积的和都得不到有助于了解曲线形状的东西.

§ 241

设给定的三阶线是关于轴 AZ 的，如图 44 所示，LMN，lmn 是

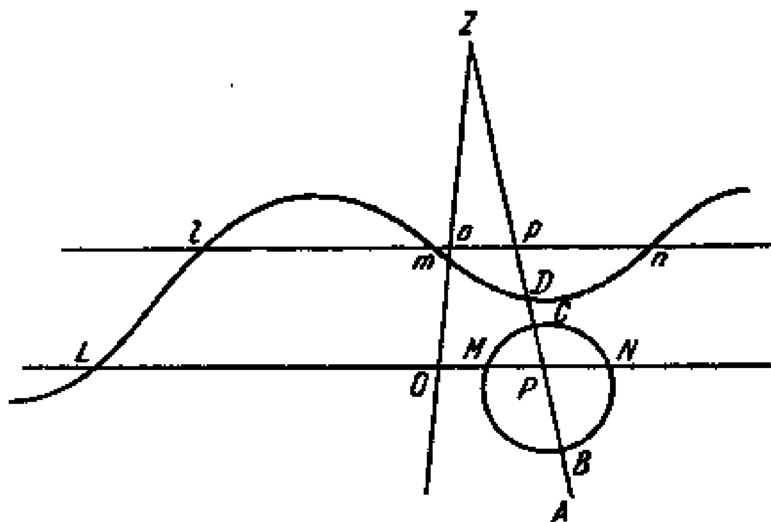


图 44

依给定角画出的纵标线，与给定三阶线的交点都是三个．记横标 $AP = x$，则对应于它的纵标有三个值，PL，PM，$-PN$．且 $PL + PM - PN = -\beta x - \varepsilon$．取

$$PO = z = \frac{PL + PM - PN}{3},$$

则 O 为中点，即 $LO = MO + NO$．由于 $z = -\frac{\beta x + \varepsilon}{3}$，点 O 在直线 OZ 上，OZ 与任一条平行于 LMN 的纵标线 lmn 的交点 O 都满足 $lo + mo = no$．

这类似于二阶线直径的性质．如果 O，o 分别位于两条相平行且都与曲线有三个交点，又 O，o 都使得一面的两个纵标之和等于另一面的第三个纵标，则过 O，o 的直线以同样的方式分每一条平行于这两条纵标线的纵标线．因而过 O，o 的直线是三阶线的一条直径．

§ 242

二阶线的直径相交于一点，我们来看三阶线直径间的关系. 考虑对于同一根轴 AP 倾角不同的另一种纵标线. 记横标为 t，纵标为 u，我们有 $y = nu, x = t - mu$，代这两个值入通用方程

$$y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \epsilon y^2 + \zeta yx + \eta x^2 + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

得到方程

$$\left.\begin{array}{l}
+ n^3u^3 + \beta n^2u^2t + \gamma nut^2 + \delta t^3 + \epsilon n^2u^2 + \zeta nut + \eta t^2 + \theta nu + \iota t + \kappa \\
- \beta mn^2u^3 - 2\gamma mnu^2t - 3\delta mut^2 \qquad - \zeta mnu^2 - 2\eta mut \quad - \iota mu \\
+ \gamma m^2nu^3 + 3\delta m^2u^2t \qquad\qquad\qquad + \eta m^2u^2 \\
- \delta m^3u^3
\end{array}\right\} = 0.$$

从该方程我们看到，横标为 t 时，记新直径上点的坐标为 v，则

$$3v = \frac{-\beta n^2 t + 2\gamma mnt - 3\delta m^2 t - \epsilon n^2 + \zeta mn - \eta m^2}{n^3 - \beta mn^2 + \gamma m^2 n - \delta m^3}.$$

§ 243

设图 45 上点 O 为这两个直径的交点，从点 O 向轴 AZ 引平行于原纵标和新纵标的直线 OP 和 OQ，则 $AP = x$，$PO = z$，$AQ = t$，$OQ = v$. 此时我们有

$$z = nv, x = t - mv,$$

因而

$$v = \frac{z}{n}, t = x + \frac{m}{n}z.$$

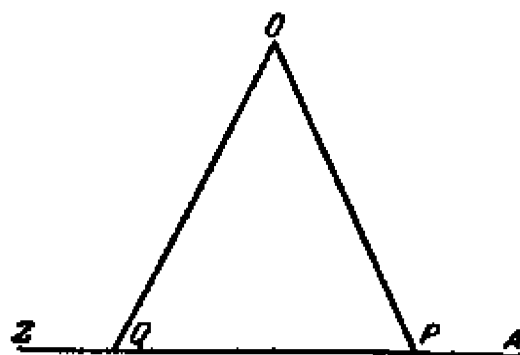


图 45

这样，首先我们有 $3z = -\beta x - \epsilon$，进而有

$$3v = -\frac{\beta x}{n} - \frac{\varepsilon}{n},\ t = x - \frac{\beta m x}{3n} - \frac{\varepsilon m}{3n}.$$

代这两个值入前面的方程,得

$$\left.\begin{aligned}
&-\beta n^2 x + \beta^2 mnx - \beta\gamma m^2 x + \frac{\beta\delta m^3 x}{n}\\
&-\varepsilon n^2 + \beta\varepsilon mn - \gamma\varepsilon m^2 + \frac{\delta\varepsilon m^3}{n}\\
&+\beta n^2 x - \frac{\beta^2 mnx}{3} - \frac{\beta\varepsilon mn}{3} + \varepsilon n^2\\
&-2\gamma mnx + \frac{2\beta\gamma m^2 x}{3} + \frac{2\gamma\varepsilon m^2}{3} - \zeta mn\\
&+3\delta m^2 x - \frac{\beta\delta m^3 x}{n} - \frac{\delta\varepsilon m^3}{n} + \eta m^2
\end{aligned}\right\} = 0,$$

也即

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\beta^2 mnx - \frac{1}{3}\beta\gamma m^2 x - 2\gamma mnx + 3\delta m^2 x\\
&+\frac{2}{3}\beta\,\varepsilon mn - \frac{1}{3}\gamma\varepsilon m^2 - \zeta mn + \eta m^2
\end{aligned}\right\} = 0.$$

§ 244

可见直径的交点 O 依赖于纵标对轴的倾角.这倾角决定于量 m 和 n.因此,如果称直径的交点为中心,则三阶线不一定有中心.但可以找到有中心的三阶线.分别令方程中含 mn 和含 mm 的项的和为零,使得到的两个 x 值相等,得

$$x = \frac{3\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta^2 - 6\gamma} = \frac{3\eta - \gamma\varepsilon}{\beta\gamma - 9\delta}.$$

要使这一等式成立,则要求

$$\begin{aligned}
&6\beta^2\eta - 2\beta^2\gamma\varepsilon - 18\gamma\eta + 6\gamma^2\varepsilon =\\
&3\beta\gamma\zeta - 2\beta^2\gamma\varepsilon - 27\delta\zeta + 18\beta\delta\varepsilon
\end{aligned}$$

或

$$\beta\gamma\zeta - 2\beta^2\eta - 9\delta\zeta + 6\gamma\eta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma^2\varepsilon = 0,$$

由此得

$$\eta = \frac{\beta\gamma\zeta - 9\delta\zeta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma^2\varepsilon}{2\beta^2 - 6\gamma}.$$

当 η 取这个值时，所有的直径就相交于同一点. 也即这样的三阶线有中心，其坐标为

$$AP = \frac{3\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta^2 - 6\gamma},\ PO = \frac{-\beta\zeta + 2\gamma\varepsilon}{2\beta^2 - 6\gamma}.$$

§ 245

第一项系数 α 不为 1 时，如果有中心，我们来求这中心的坐标，此时三阶线的最通用方程为

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \varepsilon y^2 + \zeta x y + \eta x^2 + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

当

$$\eta = \frac{\beta\gamma\zeta - 9\alpha\delta\zeta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma^2\varepsilon}{2\beta^2 - 6\alpha\gamma}$$

时曲线有中心，记为 O，O 的坐标为

$$AP = \frac{3\alpha\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta^2 - 6\alpha\gamma},\ PO = \frac{2\gamma\varepsilon - \beta\zeta}{2\beta^2 - 6\alpha\gamma}.$$

因而，一条与曲线有三个交点的纵标线，如果它被分点分成这样两部分，一部分的两个纵标值之和等于另一部分第三个纵标值，那么通过分点与中心的直线，将以同样的方式分所有平行于这条纵标线的纵标线.

§ 246

把上面所讲用到我们列出的各类方程上去，那么，显然 $\alpha = 0$

时，第一到五类有中心，中心在横标原点. 第六、七类没有中心，因为系数 α 不能为零. 第八到十三类有中心，都在横标原点. 最后三类的中心在无穷远处. 因而它们的直径都相平行.

§ 247

对三个纵标值，前面讨论了它们的和，现在来看看它们的积，至于两两之积的和，没有发现它有什么值得注意处. 从 § 239 的通用方程得

$$-PM\cdot PL\cdot PN=-\delta x^3-\eta x^2-\iota x-\kappa.$$

为了从该表达式得到结果，我们注意，$y=0$ 时有 $\delta x^3+\eta x^2+\iota x+\kappa=0$. 该方程的根给出轴 AZ 与曲线的交点，记这交点为 B,C,D，则

$$\delta x^3+\eta x^2+\iota x+\kappa=\delta(x-AB)(x-AC)(x-AD),$$

从而

$$PL\cdot PM\cdot PN=\delta\cdot PB\cdot PC\cdot PD,$$

如果另取一条与第一条平行的纵标线 lmn，则

$$PL\cdot PM\cdot PN:PB\cdot PC\cdot PD=pl\cdot pm\cdot pn:pB\cdot pC\cdot pD.$$

这完全类似于二阶线积的性质，四阶、五阶和更高阶线也都具有类似的性质.

§ 248

假定三阶线有三条渐近直线 FBf,GDg,HCh，如图 46. 三阶线方程可以分解为状如 $py+qx+r$ 的三个线性因式的时候，三阶线成为这三条渐近线，成为复合线，可以由一个特殊方程给出. 该特殊方程与三阶线方程最高次项相同，继而由于渐近线的位置由方程的第二项决定，所以渐近线方程与三阶线方程第二项也相同. 因

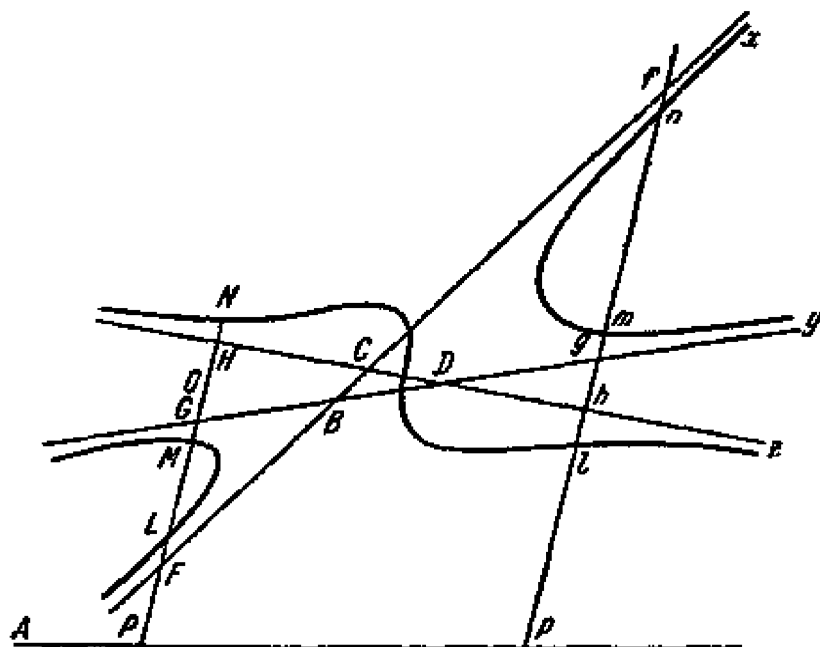


图 46

此，如果三阶线关于轴 AP，横标 $AP=x$，纵标 $PM=y$ 间方程形状为

$$y^3+(\beta x+\varepsilon)y^2+(\gamma x^2+\zeta x+\theta)y+\delta x^3+\eta x^2+\iota x+\kappa=0,$$

则渐近线关于同一根轴 AP，横标 $AP=x$，纵标 $PG=z$ 间的方程形状为

$$z^3+(\beta x+\epsilon)z^2+(\gamma x^2+\zeta x+B)Z+\delta x^3+\eta x^2+Cx+D=0,$$

系数 B,C,D 要使得该方程可分解成三个线性因式.

§ 249

如果画一条纵标线 PN，交曲线于 L,M,N，交渐近线于 F,G,H，那么，由曲线方程得

$$PL+PM+PN=-\beta x-\varepsilon,$$

由渐近线方程得

$$PF + PG + PH = -\beta x - \varepsilon.$$

由这两个等式得

$$PL + PM + PN = PF + PG + PH,$$

或

$$FL - GM + HN = 0.$$

如果画另外一条纵标线 pf,那么同样会得到

$$fn - gm + hl = 0.$$

也即,如果一条直线与曲线与渐近线的交点都是三个,那么这根直线上从渐近线上交点走向曲线上交点,方向相同的两段之和等于方向不同的另一段.

§ 250

从而,渐近线和收敛于渐近线的分支都是三条,这样的三阶线不能位于渐近线的同侧,如果两部分位于渐近线的一侧,则第三部

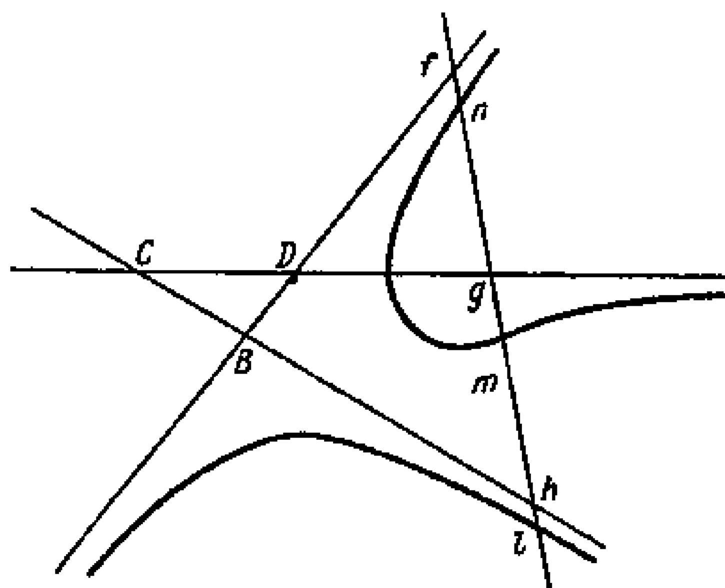


图 47

分必定位于另一侧.因而不会有图 47 上这样的三阶线.因为分别交渐近线和曲线于 f, g, h 和 l, m, n 的直线上,位于渐近线同侧的 fn, gm, hl 三段之和不可能为零.位于一侧的符号为正,位于另一侧的符号为负,位于同侧的符号相同,其和不能为零.

§ 251

由以上所讲我们清楚地看出,为什么三阶线不能同时有两条状如 $u=\frac{A}{t^2}$ 和一条状如 $u=\frac{A}{t}$ 的渐近直线.这是因为状如 $u=\frac{A}{t^2}$ 和 $u=\frac{A}{t}$ 的双曲分支,其逼近于自己渐近线的速度之比是无穷.事实上,假定图 46 上直线 fl 是在无穷远处,线段 fn, gm, hl 都成了无穷小.又假定分支 nx, my 的形状为 $u=\frac{A}{t^2}$,分支 lz 的形状为 $u=\frac{A}{t}$,那么线段 fn, gm 与 hl 相比为无穷小,因而 $gm=fn+hl$ 不可能成立.

§ 252

这样一来,渐近线的条数等于阶数的高阶线,不可能只有一条状如 $u=\frac{A}{t}$ 的渐近线,而其余的渐近线都是 t 的次数更高的,诸如 $u=\frac{A}{t^2}, u=\frac{A}{t^3}, \cdots$ 的.有一条状如 $u=\frac{A}{t}$ 的,则必有另一条形状和它类似的.同理,如果没有状如 $u=\frac{A}{t}$ 的渐近线,那也就不能只有一条状如 $u=\frac{A}{t^2}$ 的,要有,则至少是两条.这是因为对自己渐近线

的逼近速度，状如 $u=\frac{A}{t^3}$，$u=\frac{A}{t^4}$，…的双曲分支，远远地快于状如 $u=\frac{A}{t^2}$ 的双曲分支．这样在计算高阶线所含类别时，就可以容易地去掉一些不可能的情形，从而少做大量的计算．

§ 253

假定三阶线与某直线只有两个交点，而与所有平行于这第一条直线的直线，都或者只有两个交点，或者没有交点．任取一根轴，取纵标 y 平行于第一条直线，则该三阶线的方程，其形状为

$$y^2+\frac{(\gamma x^2+\zeta x+\theta)y}{\beta x+\varepsilon}+\frac{\delta x^3+\eta x^2+\iota x+\kappa}{\beta x+\varepsilon}=0.$$

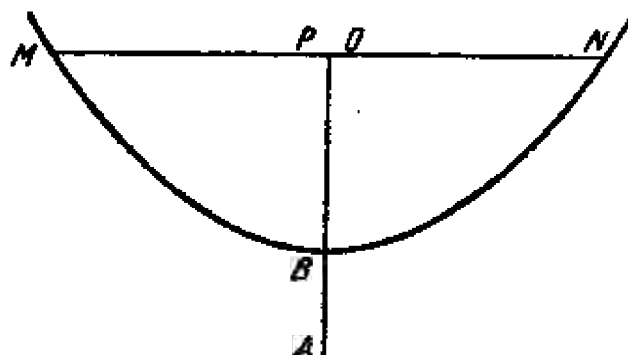


图 48

记横标 AP 为 x，则有两个纵标 y，PM 与 $-PN$，见图 48．由方程的性质我们有

$$PM-PN=\frac{-\gamma x^2-\zeta x-\theta}{\beta x+\varepsilon}.$$

记等分弦 MN 的点为 O，则

$$PO=\frac{1}{2}\frac{\gamma x^2+\zeta x+\theta}{\beta x+\varepsilon},$$

从而，令 $PO=z$，则

$$z(\beta x+\varepsilon)=\frac{1}{2}(\gamma x^2+\zeta x+\theta)$$

由此得知,等分平行于 MN 的弦的点 O,全都在双曲线上,这里要求 $\gamma x^2+\zeta x+\theta$ 不被 $\beta x+\varepsilon$ 整除,否则 O 在直线上.

§ 254

$\gamma x^2+\zeta x+\theta$ 被 $\beta x+\varepsilon$ 整除时,曲线有直径,也即有直线等分所有平行于 MN 的弦.这是全体二阶线所具有的性质.$\gamma x^2+\zeta x+\theta$ 被 $\beta x+\varepsilon$ 整除时,将 $x=\frac{-\varepsilon}{\beta}$ 代入,它应为零.因而,如果 $\gamma\varepsilon^2-\beta\varepsilon\zeta+\beta^2\theta=0$,则三阶线有直径.

§ 255

根据上面所讲,我们可以用最一般化的方法,定出三阶线有直径的所有情形.设通用方程为

$$\alpha y^3+\beta y^2x+\gamma yx^2+\delta x^3+\varepsilon y^2+\zeta yx+\eta x^2+\theta y+\iota x+\kappa=0,$$

则纵标 y 有三个或一个值,因而没有直径.改变对原轴的倾角,另取纵标 u,使 $y=nu$, $x=t-mu$.代入原方程,得

$$\left.\begin{aligned}&+\alpha n^3u^3+\beta n^2u^2t+\gamma nut^2+\delta t^3+\varepsilon n^2u^2+\zeta nut+\theta nu+\iota t+\kappa\\&-\beta mn^2u^3-2\gamma mnu^2t-3\delta mut^2-\zeta mnu^2-2\eta mut-\iota mu\\&+\gamma m^2nu^3+3\delta n^2u^2t+\eta m^2u^2\\&-\delta m^3u^3\end{aligned}\right\}=0.$$

在新纵标之下,为使曲线有直径,首先要纵标有两个值,即三次项不出现,由此得

$$\alpha n^3-\beta mn^2+\gamma m^2n-\delta m^3=0.$$

§ 256

还要 u 的系数

$$(\gamma n-3\delta m)t^2+(\zeta n-2\eta m)t+\theta n-\iota m.$$

被 u^2 的系数

$$(\beta n^2-2\gamma mn+3\delta m^2)t+\varepsilon n^2-\zeta mn+\eta m^2$$

除得尽. 即代

$$t=\frac{-\varepsilon n^2+\zeta mn-\eta m^2}{\beta n^2-2\gamma mn+3\delta m^2}$$

入 u 的系数得零. 由此得

$$\iota=\frac{\theta n}{m}-\frac{(\zeta n-2\eta m)(\varepsilon n^2-\zeta mn+\eta m^2)}{(\beta n^2-2\gamma mn+3\delta m^2)m}+\frac{(\gamma n-3\delta m)(\varepsilon n^2-\zeta mn+\eta m^2)^2}{(\beta n^2-2\gamma mn+3\delta m^2)^2m}.$$

§ 257

将上面所讲应用到我们的十六类上去,得:第一类没有直径. 第二类有一条直径,它等分平行于 x 轴的弦. 第三类没有直径. 第四类有一条直径,它等分平行于渐近线的弦. 第五类有三条直径,它们等分平行于每条渐近线的弦. 第六类不能有直径. 第七类恒有一条直径,它等分平行于一条渐近线的弦,这条渐近线产生于因式 $x-my$. 第八类有一条直径,它等分平行于轴的弦. 第九类有两条直径,一条是关于平行于轴的弦,一条是关于平行于另一根渐近线的弦. 第十类同于第八类. 第十一类同于第九类. 第十二类同于第八类. 第十三类同于第九类. 第十四类有一条直径,是关于平行于轴的弦的. 第十五、十六类没有与曲线交于两点的弦,因面没有直径. 直径的这些性质,牛顿已经得到,他的这项工作应该在这里指

出.

§ 258

对前面各类三阶线方程,虽然我们都假定 x,y 为直角坐标,但变换 x,y 为任何斜角坐标,并不改变曲线的类别.变直角坐标为任何斜角坐标时,一个方程给出的趋向无穷的分支的个数不变;当然这分支的性质也不变.双曲分支保持为双曲的,抛物分支保持为抛物的;双曲分支和抛物分支的种类也不变.可见,任何一个属于第一类的曲线,不管其方程是在直角坐标还是在斜角坐标之下,它都属于第一类.别的类也全是这样.

§ 259

既然坐标角可以任取,对前面给出的方程,我们可以换 y 为 υu,换 x 为 $t-\mu u$,其中 $\mu^2+\upsilon^2=1$.可选择坐标角,使方程简化.下面是化简了的斜角 t,u 之间的各类方程

第一类

$$u(t^2+n^2u^2)+au^2+bt+cu+d=0,$$

其中 $n\neq0,b\neq0$.

第二类

$$u(t^2+n^2u^2)+au^2+cu+d=0,$$

其中 $n\neq0$.

第三类

$$u(t^2-n^2u^2)+au^2+bt+cu+d=0,$$

其中 $n\neq0,b\neq0,\pm nb+c+\frac{a^2}{4n^2}\neq0$.

第四类

$$u(t^2 - n^2u^2) + au^2 + cu + d = 0,$$

其中 $n \neq 0, c + \frac{a^2}{4n^2} \neq 0.$

第五类

$$u(t^2 - n^2u^2) + au^2 - \frac{a^2u}{4n^2} + d = 0,$$

其中 $n \neq 0.$

第六类

$$tu^2 + at^2 + bt + cu + d = 0,$$

其中 $a \neq 0, c \neq 0.$

第七类

$$tu^2 + at^2 + bt + d = 0,$$

其中 $a \neq 0.$

第八类

$$tu^2 + b^2t + cu + d = 0,$$

其中 $b \neq 0, c \neq 0.$

第九类

$$tu^2 + b^2t + d = 0,$$

其中 $b \neq 0.$

第十类

$$tu^2 - b^2t + cu + d = 0,$$

其中 $b \neq 0, c \neq 0.$

第十一类

$$tu^2 - b^2t + d = 0,$$

其中 $b \neq 0.$

第十二类

$$tu^2 + cu + d = 0,$$

其中 $c \neq 0.$

第十三类

$$tu^2 + d = 0.$$

第十四类

$$u^3 + at^2 + cu + d = 0.$$

第十五类

$u^3 + atu + bt + d = 0$[1],

其中 $a \neq 0$.

第十六类

$$u^3 + at = 0.$$

第十一章

四 阶 线

§ 260

四阶线的通用方程为

$$\alpha y^4+\beta y^3x+\gamma y^2x^2+\delta yx^3+\varepsilon x^4+\zeta y^3+\eta y^2x+$$
$$+\theta yx^2+\iota x^3+\kappa y^2+\lambda yx+\mu x^2+\nu y+\xi x+o=0,$$

但是根据不同情况采用不同方式,利用改变坐标角、改换轴和原点的位置,可以把它化得更简单.为了用讲过的方法对四阶线进行分类,我们根据最高次部分的因式将方程分为下列八种情况:

Ⅰ.四个线性因式全是虚的;

Ⅱ.只有两个线性因式是实的,且不相等;

Ⅲ.只有两个线性因式是实的,且相等;

Ⅳ.四个线性因式全实,且相异;

Ⅴ.两个相等,另外两个不等;

Ⅵ.不同的两对,每对相等;

Ⅶ.三个相等;

Ⅷ.四个全相等.

情况 I

§ 261

最高次部分的四个线性因式全虚时,曲线没有伸向无穷的分支.我们是根据伸向无穷的分支分类的,所以本情况下的四阶线属同一类.于是我们有

第一类

曲线没有伸向无穷的分支,其方程的最简形状为

$$(y^2+m^2x^2)(y^2-2pxy+q^2x^2)+ay^2x+byx^2+cy^2+$$
$$+dyx+ex^2+fy+gx+h=0,$$

其中 $p^2<q^2$. 由于四次部分必定包含项 y^4 和 x^4,因而用所给坐标 x,y 加上或减去某个数的方法,可以消去三次部分中的 y^3 和 x^3.

情况 II

§ 262

只有两个因式是实的,且不相等时,用改变倾角和轴的位置的方法,可使这两个因式一个为 y,一个为 x. 即方程的形状为

$$yx(y^2-2myx+n^2x^2)+ay^2x+byx^2+cy^2+dyx$$
$$+ex^2+fy+gx+h=0,$$

其中 $m^2<n^2$.

四次部分中必定含有 y^3x 和 yx^3,因而可以消去三次部分中的 y^3 和 x^3. 从而曲线有两条渐近直线,其方程分别为 $y=0$ 和 $x=0$. 其性质依次由方程

$$n^2yx^3+ex^2+gx+h=0,$$

$$xy^3 + cy^2 + fy + h = 0$$

表示，这样我们得到

第二类

有两条渐近直线，状如 $u = \frac{A}{t}$，其中 $c \neq 0, e \neq 0$.

第三类

有两条渐近直线，形状分别为 $u = \frac{A}{t}$ 和 $u = \frac{A}{t^2}$，方程为

$$yx(y^2 - 2myx + n^2x^2) + ay^2x + byx^2 + cy^2 + dyx + fy + gx + h = 0,$$

其中 $c \neq 0, g \neq 0$.

第四类

有两条渐近直线，形状分别为 $u = \frac{A}{t}$ 和 $u = \frac{A}{t^3}$，包含于方程

$$yx(y^2 - 2myx - n^2x^2) + ay^2x + byx^2 + cy^2 + dyx + fy + h = 0,$$

其中 $c \neq 0$.

第五类

有两条渐近直线，都属 $u = \frac{A}{t^2}$ 型，包含于方程

$$yx(y^2 - 2myx + n^2x^2) + ay^2x + byx^2 + dyx + fy + gx + h = 0,$$

其中 $f \neq 0, g \neq 0$.

第六类

有两条渐近直线，形状分别为 $u = \frac{A}{t^2}$ 和 $u = \frac{A}{t^3}$，包含于方程

$$yx(y^2 - 2myx + n^2x^2) + ay^2x + byx^2 + dyx + fy + h = 0,$$

其中 $f \neq 0$.

第七类

有两条渐近直线，形状都为 $u = \frac{A}{t^3}$，含于方程

$$yx(y^2 - 2myx + n^2x^2) + ay^2x + byx^2 + dyx + h = 0,$$

以上各类 n^2 都大于 m^2.

情况Ⅲ

§ 263

只有两个因式是实的,且相等,此时方程为

$$y^2(y^2 - 2myx + n^2x^2) + ayx^2 - bx^3 + cy^2 + dyx + ex^2 + fy + gx + h = 0,$$

这里又是 $n^2 > m^2$. 只要 $b \neq 0$,该方程就给出

第八类

有一条 $u^2 = At$ 状的渐近抛物线.

如果 $b = 0$,那么 $x = \infty$ 时得

$$y^2 + \frac{ay}{n^2} + \frac{e}{n^2} + \frac{g}{n^2x} + \frac{h}{n^2x^2} = 0$$

从而 $a^2 < 4n^2e$ 时得

第九类

没有伸向无穷的分支.

如果 $b = 0, a^2 < 4n^2e$,且 $g \neq 0$,我们得到

第十类

有两条平行的状如 $u = \frac{A}{t}$ 的渐近线.

第十 a 类

有两条相重合的状如 $u = \frac{A}{t}$ 的渐近线.

如果 $b = 0, g = 0$,且 $a^2 > 4n^2e$,我们有

第十一类

有两条平行的状如 $u = \frac{A}{t^2}$ 的渐近线.

如果 $b=0, a^2=4n^2e$,但 $g\neq 0$,我们有

第十二类

有一条 $u^2=\frac{A}{t}$状的渐近线.

如果 $b=0, g=0, a^2=4n^2e$,且 $h<0$,我们有

第十三类

有一条 $u^2=\frac{A}{t^2}$状的双曲渐近线.

$b=0, g=0, a^2=4n^2e$,而 $h>0$ 时,得

第十四类

没有伸向无穷的分支.

情况Ⅳ

§ 264

四次部分的四个因式全实,且相异时,方程的形状为

$yx(y-mx)(y-nx)+ay^2x+byx^2+cy^2+dyx+ex^2+fy+gx+h=0.$

曲线有四条渐近直线,其形状为 $u=\frac{A}{t}$,或 $u=\frac{A}{t^2}$,或 $u=\frac{A}{t^3}$. 根据 § 251 所讲得

第十五类

有四条双曲渐近线,形状全为 $u=\frac{A}{t}$.

第十六类

有四条双曲渐近线,三条状如 $u=\frac{A}{t}$,一条状如 $u=\frac{A}{t^2}$.

第十七类

有四条双曲渐近线,三条状如 $u=\frac{A}{t}$,一条状如 $u=\frac{A}{t^3}$.

第十八类

有四条双曲渐近线,$u=\frac{A}{t}$状,$u=\frac{A}{t^2}$状各两条.

第十九类

有四条双曲渐近线,$u=\frac{A}{t}$状两条,$u=\frac{A}{t^2}$状,$u=\frac{A}{t^3}$状各一条.

第廿类

有四条双曲渐近线,$u=\frac{A}{t}$状,$u=\frac{A}{t^3}$状各两条.

第廿一类

有四条双曲渐近线,形状全为 $u=\frac{A}{t^2}$.

第廿二类

有四条双曲渐近线,$u=\frac{A}{t^2}$状三条,$u=\frac{A}{t^3}$状一条.

第廿三类

有四条双曲渐近线,$u=\frac{A}{t^2}$状,$u=\frac{A}{t^3}$状各两条.

第廿四类

有四条双曲渐近线,形状全为 $u=\frac{A}{t^3}$.

情况Ⅴ

§ 265

四个因式,两个相等,另外两个不等时,方程为

$y^2x(y+nx)+ayx^2+bx^3+cy^2+dyx+ex^2+fy+gx+h=0.$

首先相等因式部分产生同于情况Ⅲ的各类,不相等部分产生

同于情况Ⅱ的各类,两部分组合产生 $7\times6=42$ 类.但这里面有两种是不可能的,即两条 $u=\frac{A}{t^2}$状的平行渐近线,第三条为 $u=\frac{A}{t}$状的,第四条或者为 $u=\frac{A}{t^2}$状的,或者为 $u=\frac{A}{t^3}$状的.这样剩下的就是 40 类,加上前面的 24 类,总共是 64 类.逐条处理,篇幅太长,时间也不允许.不逐条处理,当然不能断定它们都是实的.有谁感到需要,逐条进行处理,可能会对这分类作出订正.

情况Ⅵ

§ 266

不同的两对因式,每对相等.此时方程为

$$y^2x^2+ay^3+bx^3+cy^2+dyx+ex^2+fy+gx+h=0.$$

每对产生 7 类,组合成 49 类.但是由于 b 不能同时为正又为负,所以有两类不可能.这样本情况共产生 47 类.逐条处理,这数目也太大.到理在为止,我们共得到 111 类.

情况Ⅶ

§ 267

三个因式相等,此时方程为

$$y^3x+ayx^2+bx^3+cy^2+dyx+ex^2+fy+gx+h=0.$$

因式 x:$c\neq0$ 时,给出 $u=\frac{A}{t}$状渐近线;$c=0,f\neq0$ 时,给出 $u=\frac{A}{t^2}$状渐近线;$c=0,f=0$ 时,给出 $u=\frac{A}{t^3}$状渐近线.因式 y^3,除非 $b=$

0,都给出 $u^3=At^2$ 状抛物渐近线,如果 $b=0$,那么置 $x=\infty$ 得

$$y^3+ayx+dy+ex+g+\frac{cy^2+fy+h}{x}=0.$$

这里,如果 $e\neq0$,得 $y^3+ayx+ex=0$,由此,如果 $a\neq0$,得 $y^2+ax=0$ 和 $ay+e=0$. 从而,在 $u^2=At$ 状的抛物渐近线之外,还有一条双曲渐近线,其方程为

$$(ay+e)x-\frac{e^3}{a^3}-\frac{de}{a}+g+\frac{ce^2-afe+a^2h}{a^2x}=0.$$

$e^3+a^2de-a^3g\neq0$ 时,该渐近线为 $u=\frac{A}{t}$状;否则,为 $u=\frac{A}{t^2}$状. $a=0,e\neq0$ 时,得 $y^3+ex=0$,给出 $u^3=At$ 状的抛物渐近线. $e=0,a=0$ 时,得 $y^3+dy+g=0$,它给出的渐近线是:$u=\frac{A}{t}$状的一条或三条,或者一条 $u=\frac{A}{t}$状的和一条 $u^2=\frac{A}{t}$状的;或者一条 $u^3=\frac{A}{t}$状的. 总共是 8 类,与因式 x 产生的 3 类相组合,得 24 类. 加到前六种情况上去,共计 135 类.

情况Ⅷ

§ 268

四个因式全相等,此时因式为

$$y^4+ay^2x+byx^2+kx^3+cy^2+dyx+ex^2+fy+gx+h=0.$$

$k\neq0$ 时,得

第一百三十六类

有唯一的 $u^4=At^3$ 状抛物渐近线.

$k=0,b\neq0$,得 $y^4+byx^2+ex^2=0$. 由此得 $y^3+bx^2=0$ 和 $by+e=0$. 由渐近直线 $by+e=0$ 得

$$(by+e)x^2+\frac{e^4}{b^4}+\frac{ae^2x}{b^2}+\frac{ce^2}{b^2}-\frac{dex}{b}-\frac{ef}{b}+gx+h=0.$$

从而 $ae^2-bde+b^2g\neq0$ 时,得 $u=\frac{A}{t}$ 状的渐近线,否则,得 $u=\frac{A}{t^2}$ 状的.由此得

第一百三十七类

有一条 $u^3=At^2$ 状的渐近抛物线和一条 $u=\frac{A}{t}$ 状的渐近双曲线.也得到

第一百三十八类

有一条 $u^3=At^2$ 状的渐近抛物线和一条 $u=\frac{A}{t^2}$ 状的渐近双曲线.

§ 269

若 $k=0,b=0$,则

$$y^4+ay^2x+cy^2+dyx+ex^2+fy+gx+h=0.$$

$e\neq0$ 时得 $y^4+ay^2x+ex^2=0$.该方程,$a^2<4e$ 时不可能,$a^2>4e$ 时给出两条 $u^2=At$ 状的同轴抛物渐近线,$a^2=4e$ 时这两条抛物线重合.这样我们得到第 139,140,141 类.

$e=0$ 时得方程

$$y^4+ay^2x+cy^2+dyx+fy+gx+h=0;$$

$a\neq0$ 时其形状为

$$y^4+ay^2x+cy^2+dyx+gx=0.$$

由此得方程 $y^2+ax=0$ 和 $ay^2+dy+g=0$.这后一个方程,或者给出两个相同的实 y 值,或者给出两个不同的实 y 值,或者不给出实 y 值.第一种情形在一条渐近抛物线之外,还有两条 $u=\frac{A}{t}$ 状的平行渐近线;第二种情形一条 $u^2=\frac{A}{t}$ 状的渐近线;第三种情形没

有渐近线.这里我们又得到三类,这是第142,143和144类.

§ 270

$a=0$时方程的形状为

$$y^4+cy^2+dyx+fy+gx+h=0.$$

此时若$d\neq 0$,则曲线有一条$u^3=At$状的渐近抛物线和一条$u=\frac{A}{t}$状的渐近直线,含于方程$dy+g=0$中.最后,如果$d=0$,则曲线有一条$u^4=At$状的渐近抛物线.这样四阶线共有146类.但最后的几类,多数都可以进一步分成不同的类.

§ 271

从以上的讨论,我们清楚地看到,五阶和更高阶线,其类别的个数会是多么大的一个数.如果要像三阶线那样逐一列举分析的话,那不写成一大本书是办不到的.至于四阶线和更高阶线的基本性质,可以从通用方程,照三阶线那样推出,这里我们不讲.

第十二章

曲线的形状

§ 272

前几章我们根据方程讨论了曲线伸向无穷时的形状.但是要做到根据方程确定曲线在有界区域内的形状,这常常是极困难的.因为对每个有限横标,这都要我们从方程求出对应于它的全体纵标,并分清为实为虚,而对高阶方程,在很多情况下,这都是分析还做不到的.给定横标一个确定的值,纵标就成了方程的未知数,因而次数决定着方程求解的困难程度.轴和纵标倾角两者的选取,都可以化简方程,再有,横标纵标可以调换,因而可以取次数低的作纵标,这三点都可以使方程的求解变得容易一些.

§ 273

例如,为讨论第一类三阶线的形状,我们利用§259的最简方程,此时取次数为2的 t 为纵标,取 u 为横标,这样我们得到方程

$$y^2=\frac{2by+ax^2+cx+d-n^2x^2}{x},$$

它的解为

$$y=\frac{b\pm\sqrt{b^2+dx+cx^2+ax^3-n^2x^4}}{x},$$

其中 $b\neq0,n\neq0$.

§ 274

考虑函数 $b^2+dx+cx^2+ax^3-n^2x^4$,使它为正的 x 值对应两个 y 值;使它为零的 x 值对应一个 y 值,也即此时纵标 y 的两个值相等;使它为负的 x 值不对应 y 值,我们的这函数从正变到负,必须经过零(此时两个 y 值相等).因而应该对 $b^2+dx+cx^2+ax^3-n^2x^4$ 为零的情形特别加以注意.该函数至少在一正一负两点处为零,在这两点所成区间之外该函数的值为负,纵标值为虚数.

§ 275

假定表达式 $b^2+dx+cx^2+ax^3-n^2x^4$ 只有两个实因式,也即只在两处为零,记这两点为图 49 上的 P 和 S,在这两点处纵标都只有一个值.在区间 PS 内纵标有两个值,都是实的.在 PS 之外纵标值都是虚的,也即整个曲线位于纵标 Kk 和 Nn 之间.原点 A 处纵标是曲线的渐近线,两且曲线与这条纵标相交于一点.令 $x=0$,得

$$\sqrt{b^2+dx+cx^2+ax^3-n^2x^4}=b+\frac{dx}{2b},$$

从而

$$y=\frac{b\pm\left(b+\frac{dx}{2b}\right)}{x},$$

也即或者 $y=\infty$,或者 $y=-\frac{d}{2b}$.因而曲线的形状如图 50 所示.

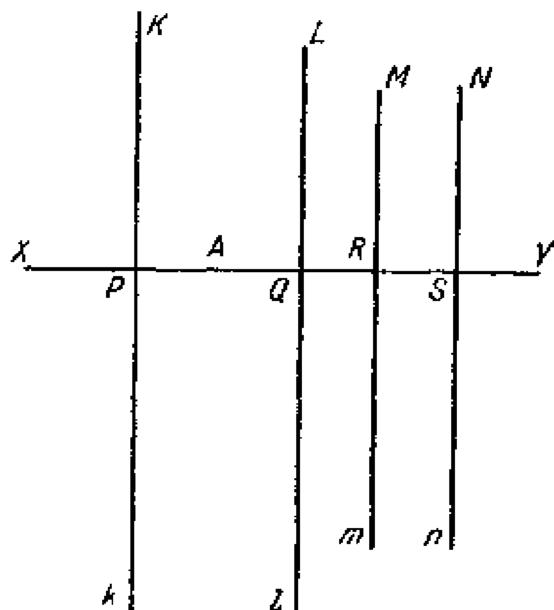


图 49

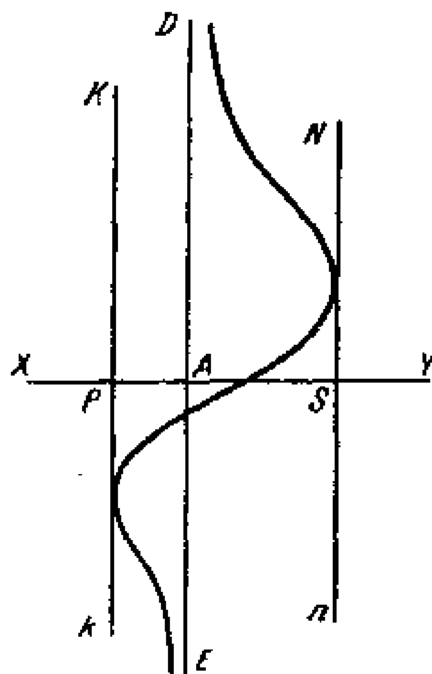


图 50

§ 276

假定表达式 $b^2+dx+cx^2+ax^3-n^2x^4$ 有四个相异的线性因式,也即它在四个点处为零,记这四个点为 P,Q,R,S,则在这四点处纵标都只有一个值.这样图 51 上,对应于轴 XP 部分的纵标为虚,PQ 部分的为实,QR 部分的又为虚,RS 部分又为实,最后从 S 向 Y 又为虚.即曲线由相分离的两部分组成,一部分在直线 Kk,Ll 之间,另一部分在直线 Mm,Nn 之间.原点 A 处纵标值为实,因而 A 必定位于 PQ 或 RS 内.也即,在本情况下,曲线的形状如图 51.它由相分离的两部分组成,另一部分为卵形线,称它为共轭卵形线.

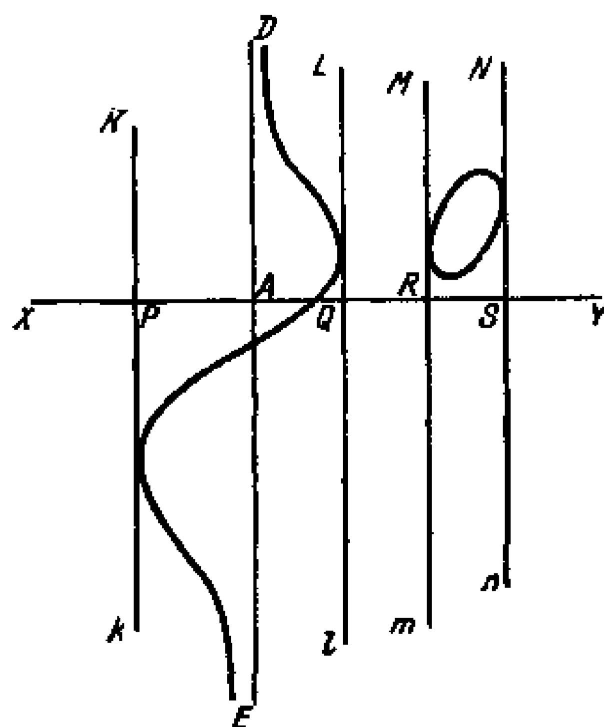


图 51

§ 277

如果两个根相等,则或 P 与 Q,或 Q 与 R,或 R 与 S 重合.如果 P,Q 重合,那么由 A 在 P,Q 之间,知两根都为 x,由 $b\neq0$ 知这不可能;如果 R,S 重合,则共轭卵形线成无穷小,化为共轭点.如果 Q,R 重合,则卵形线与另一部分相接,得到纽结曲线,如图 52 所示.三个根相等,即点 Q,R,S 重合,则纽结变为一个尖点,如图 53 所示.这样我们得到第一类的五种不同形状的曲线,同于牛顿所划分的种数.

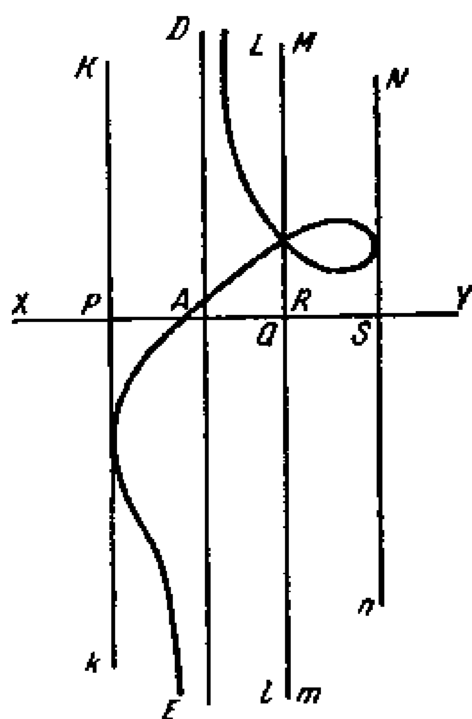


图 52

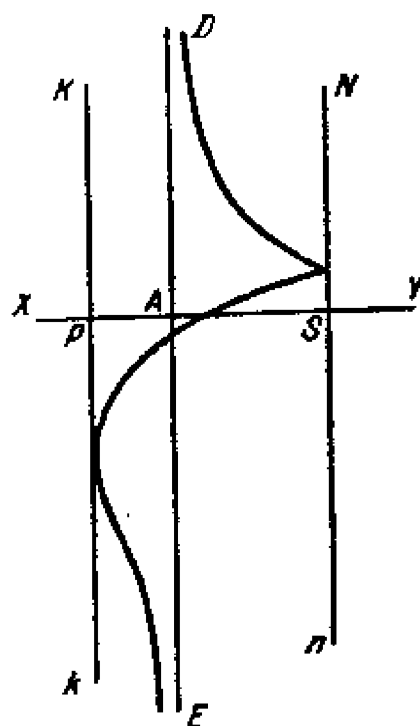


图 53

§ 278

牛顿用类似的方法对其他各类曲线也都进行了进一步划分.因为所有方程的两个坐标中,都至少有一个,其次数不高于 2,当一个坐标的次数为 1 时,曲线的形状很容易确定.此时方程的形状为 $y=P$,P 是坐标 x 的某个有理函数.如果 P 是分数函数,则分母在一处或几处为零时,y 为无穷,曲线有渐近线.

§ 279

设 $y=\frac{P}{Q}$，则方程 $Q=0$ 的实根给出上述无穷纵标，对该方程的任何一个根，比如 $x=f$，如果取横标 $x=f$，则 $Q=0$，y 就成为无穷. 显然，如果 $x>f$ 时 y 为正，则 $x<f$ 时 y 为负，纵标线是 $u=\frac{A}{t}$ 状的渐近线，单根都是这样. Q 有二重因式，设为 $(x-f)^2$ 时，那么 $x>f$ 和 $x<f$ 时纵标都是正的，$x=f$ 时得状如 $u^2=\frac{A}{t}$ 的渐近线. 如果分母 Q 有三重因式，设为 $(x-f)^3$，则横标从小于 f 变到大于 f 时，纵标变号，同于第一种情形.

§ 280

接下去状如 $y^2=\frac{2Py-R}{Q}$ 的方程就容易讨论了，这里 P,Q,R 都是横标 x 的整函数. 对横标的任何一个值都或者有两个纵标值，或者没有纵标值. $P^2>QR$ 时有两个纵标值，$P^2<QR$ 时没有纵标值. $P^2=QR$ 给出实纵标与虚纵标或者实纵标与零纵标的分界，此时 $y=\frac{P}{Q}$，也即纵标线只在一点处与曲线相接或相切，这样为确定曲线的形状，就应该考察方程 $P^2-QR=0$. 它的实根给出纵标与曲线在一点处相切的点. 我们在轴上标出这些点. 如果根都是单根，则这些点将横标分成若干部分，不同部分所对应的纵标虚实交替. 这样，曲线由相分离的几部分组成，部分数等于交替次数. 共轭卵形线即源于此.

§ 281

如果方程 $P^2 - QR = 0$ 的两个根相等，那么前面说的轴上的点中的两个重合．这时纵标为虚或为实的一个区间消失．为虚时曲线成为纽结曲线，如图 52 所示，为实时，共轭卵形线变为共轭点．如果有三个相等的根，那么纽结成无穷小，变为尖点，如图 53 所示．如果方程有四个相等的根，那么或者分离的两个卵形线聚为一点，或者尖点与纽结点合一，或者两个尖点反向连在一起．如果有五个相等的根，那几乎得不到新的形状．这时与尖点重合的不是一个纽结点，而是两个．甚至有更多个相等的根，也不构成新的形状．

§ 282

结点或曲线两个分支的交点也叫二重点，因为应该视直线在这种点处与曲线的交点为两个．如果还有另外一个分支通过这种点，则它为曲线的三重点．两个二重点相合，当然构成四重点．由此可以推知任何重数的点的产生和性质．聚为一点的卵形线(亦称共轭点)是二重点，共轭点连上曲线其余部分所成尖点也是二重点．

§ 283

如果用横标 x 表示纵标 y 的方程是三次或更高次的，那么这 y 就是 x 的多值函数，每个 x 值所对应的 y 值的个数，都或者等于 y 的次数，或者比 y 的次数少 2,4,6 等．纵标必定两个同时变虚，变虚之前这两个值相等．由虚变实的方式有多种，但它们都或者是已经讲过的情形，或者是讲过情形的组合．对有正有负的很多横标值，知道了它们对应的全体纵标，那么借助知道的这些点，就可以

画出曲线，确定其形状.

§ 284

我们用一个例子来解释前节所讲，这方程次数高，但纵标 y 可用二次方根表示. 设

$$2y = \pm\sqrt{6x - x^2} \pm \sqrt{6x + x^2} \pm \sqrt{36 - x^2}.$$

从该方程，每个横标对应 8 个纵标. 显然，$x < 0$ 和 $x > 6$ 时 y 为虚数. 由此知整个曲线在 $x = 0$ 和 $x = 6$ 之间. 依次令 x 等于 0,1,2,3,4,5,6，得

	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
$\sqrt{6x-x^2}$	0,000	2,236	2,828	3,000	2,828	2,236	0,000
$\sqrt{6x+x^2}$	0,000	2,646	4,000	5,196	6,325	7,416	8,485
$\sqrt{36-x^2}$	6,000	5,916	5,657	5,196	4,472	3,317	0,000
和	6,000	10,798	12,485	13,392	13,625	12,969	8,485
符号 \ y							
+ + +	3,000	5,399	6,242	6,696	6,812	6,484	4,242
− + +	3,000	3,163	3,414	3,696	3,984	4,248	4,242
+ − −	3,000	2,754	2,242	1,500	0,487	0,932	−4,242
+ + −	−3,000	−0,517	0,586	1,500	2,341	3,167	4,242

没列出的四种符号组合，它们对应的 y 值是列出值的反号数. 每个横标对应 8 个纵标，图 54 上是画出的曲线，由 *AFBEcagbcDA* 和 *afbECAGBCDac* 两部分交织而成，有两个尖点 A 和 a，有四个二重点，也即有四个分支相交的点，它们是 D, E, C 和 c.

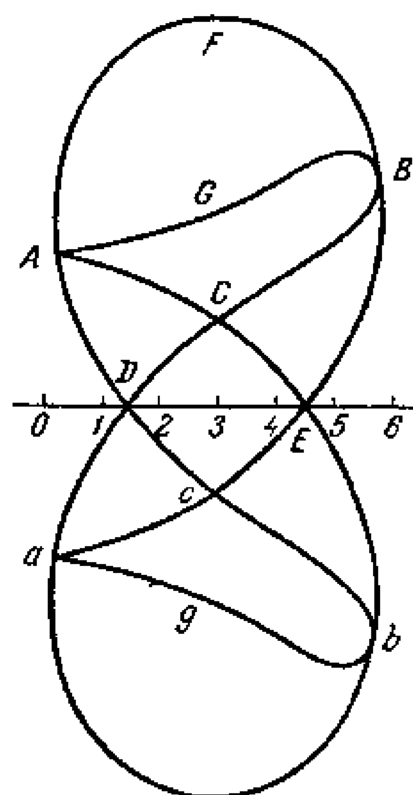


图 54

第十三章

曲线的性质

§ 285

前几章我们描述伸向无穷远分支性质时,所用方法是指出在无穷远处与曲线重合的直线或曲线,指出的曲线比原曲线要简单得多.本章我们仿照前面的做法,对有界区域中曲线的任一部分进行讨论.也即寻求直线或比所给曲线简单得多的曲线,使在很小范围内与原曲线重合.首先,显然曲线的切线在切点处与曲线重合,至少有两个公共点.也可以有另外的曲线,与曲线的给定部分符合得更好,有了这样的直线和曲线就可以清楚曲线任何一个局部的形状和性质.

§286

假定有了某曲线的 x,y 间方程.给横标一个值 $AP=p$,见图55,求出对应的 y 值.如果这 y 值不只一个,任取一个 $PM=q$,M 是曲线上一点,是曲线通过的一点.换 x,y 间方程中的x 和 y 为 p

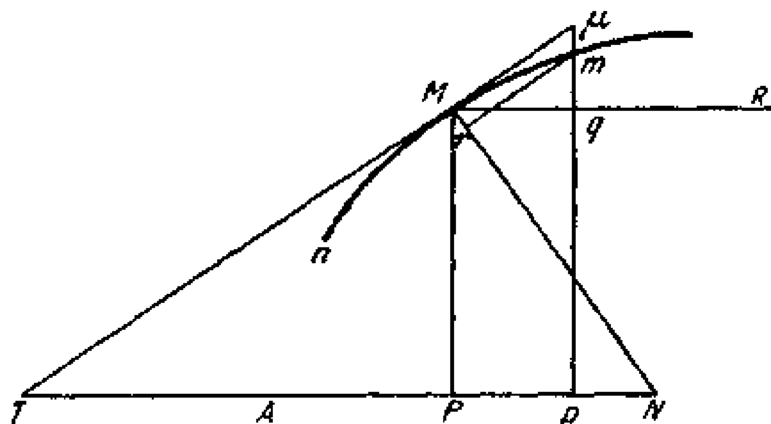


图55

和q，则方程的项相抵消，为零．为考察曲线上点 M 所在部分的性质，从 M 引平行于AP 的直线Mq．取 Mq 为轴，记新横标 Mq 为t，新纵标 qm 为u，由于点 m 也在曲线上，延长 mq 至原来的轴上p点，则换方程中的 x 和y 为$Ap=p+t$ 和$pm=q+u$，方程的项也抵消，为零．

§287

代换得到的结果，其中既不含 t 也不含u 的项相抵消，只剩下含新坐标 t 或u 的项．即结果方程为

$$0=At+Bu+Ct^2+Dtu+Eu^2+Ft^3+Ft^2u+Htu^2+\cdots,$$

其中 $A,B,C,D,\cdots$是常数，它们由原方程的常数和 p,q 构成．我们的 p,q 也为常数．新方程也表示所给曲线的性质，新方程的坐标以 Mq 为轴，以 M 为原点．

§288

首先，如果令 $Mq=t=0$，则 $qm=u=0$，此时点 m 与点M 重合．其次，我们要考察的只是曲线上靠近点 M 的很小的一部分，因

此我们把 t 取得尽可能的小.此时 $qm=u$ 的值也将极小.事实上我们要考察的是几乎要消失的弧 Mm 的性质.显然,取 t,u 为尽可能小的值,则 $t^2,tu,u^2;t^3,t^2u,tu^2,u^3;\cdots$,随着次数的增加,将一步一步地更小.因而可以舍去 $At+Bu$ 以外的项,得 $At+Bu=0$.这是过点 M 的直线 $M\mu$ 的方程.当点 m 很靠近点 M 时,这直线与曲线重合.

§ 289

此时直线 $M\mu$ 是曲线在点 M 处的切线,由此得到曲线上任何一点 M 处切线 μMT 的求法.由方程 $At+Bu=0$ 得

$$\frac{u}{t}=-\frac{A}{B}=\frac{q\mu}{Mq},$$

从而

$$q\mu:Mq=MP:PT=-A:B.$$

进而,由 $PM=q$ 得 $PT=-\frac{Bq}{A}$.称轴上 PT 这一部分为次切距.由此我们得到

求次切距的规则

先从方程求出对应于横标 $x=p$ 的纵标 $y=q$.代 $x=p+t$,$y=q+u$ 入方程,只保留代换结果中次数为 1 的项,去掉其余的项,得方程 $At+Bu=0$.从该方程得 A,B,最后得次切距 $PT=-\frac{Bq}{A}$.

例 I

设所给曲线为抛物线,方程为 $y^2=2ax$,这里 AP 为主轴,A 为顶点.

令 $AP=p,PM=q$,则 $q^2=2ap$,从而 $q=\sqrt{2ap}$.代 $x=p+t$,$y=q+u$ 入方程,得

$$q^2+2qu+u^2=2ap+2at.$$

根据规则，只保留 $2qu=2at$，从而

$$at-qu=0,\frac{u}{t}=\frac{a}{q}=-\frac{A}{B}.$$

由于 $q^2=2ap$ 得次切距 $PT=\frac{q^2}{a}=2p$，即次切距 PT 是横标 AP 的两倍.

例Ⅱ

设曲线为中心在 A 的椭圆，方程为

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\text{或 } a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

取 $AP=p,PM=q$，得 $a^2q^2+b^2p^2=a^2b^2$. 将 $x=p+t,y=q+u$ 代入方程，保留结果中次数为 1 的项，去掉所有其余的项，得

$$2a^2qu+2b^2pt=0,$$

从而

$$\frac{u}{t}=-\frac{b^2p}{a^2q}=-\frac{A}{B}.$$

最后得次切距

$$PT=-\frac{B}{A}q=-\frac{a^2q^2}{b^2p}=\frac{-a^2+p^2}{p}.$$

该表达式为负，这表明点 T 在另一面. 又，该表达式与前面我们给出的椭圆切线定义是相符合的.

例Ⅲ

设所给为第七类三阶线，其方程为

$$y^2x=ax^2+bx+c.$$

取 $AP=p,PM=q$，得 $pq^2=ap^2+bp+c$. 将 $x=p+t,y=q+u$ 代入方程，得

$$(p+t)(q^2+2qu+u^2)=a(p^2+2pt+t^2)+b(p+t)+c.$$

去掉可忽略的项，得 $2pqu+q^2t=2apt+bt$，从而

$$\frac{u}{t}=\frac{2ap+b-q^2}{2pq}=-\frac{A}{B}.$$

最后得次切距

$$PT = -\frac{B}{A}q = \frac{2pq^2}{2ap+b-q^2} = \frac{2ap^2+2bp+2c}{2ap+b-q^2}$$
$$= \frac{2ap^3+2bp^2+2cp}{ap^2-c}$$

或

$$PT = \frac{2p^2q^2}{ap^2-c}.$$

§ 290

用这种方法确定了曲线在点 M 处的切线，也就知道了曲线在点 M 处的方向．视曲线为点连续改变方向时所走过的路径，多有助益．画出曲线 Mm 的动点在 M 点处的方向是切线 $M\mu$．如果保持这个方向，那它画出的将是直线 $M\mu$，方向改变，画出的是曲线．因而要知道曲线，就要知道它每点处切线的位置．切线位置可用我们刚讲过的方法确定．如果方程有理且不含分式，确定切线位置将没有任何困难．我们的方程都是可化成有理且不含分式的．如果方程无理，或者含有分式，不能化为有理整式，也仍然可以利用刚讲过的方法，但要做些修正，这修正使微分学产生．因此曲线方程不是有理整式时，切线求法留给微分学．

§ 291

用前面的方法可以确定切线 $M\mu$ 对轴，或对平行于轴的直线 Mq 的倾角．如果坐标是直角的，则角 $Mq\mu$ 为直角，此时由 $q\mu : Mq = -A : B$ 得角 $qM\mu$ 的正切等于 $-\frac{A}{B}$；如果坐标是斜角的，那么从给定角 $Mq\mu$ 及边 Mq，$q\mu$ 的比，利用三角学知识可以求出角 $qM\mu$．显然，如果求得的方程 $At+Bu=0$ 中的 $A=0$，则角 $qM\mu$ 为零．从

而切线平行于轴 AP. 如果 $B=0$,则切线平行于纵标 PM,也即纵标 PM 是曲线上点 M 处的切线.

§ 292

求得了切线 MT,过切点 M 引切线的垂线 MN,则 MN 是曲线的法线. MN 的位置在任何情况下都易于确定,直角坐标时尤其容易. 此时三角形 $Mq\mu$, MPN 相似,从而

$$Mq:q\mu = MP:PN \text{ 或 } -B:A = q:PN,$$

进而

$$PN = -\frac{Aq}{B}.$$

轴上纵标线与法线之间的这一部分,即 PN,通常称它为次法距. 直角坐标时,次法距易于从次切距 PT 求得. 此时

$$PT:PM = PM:PN, \text{或 } PN = \frac{PM^2}{PT}.$$

又,角 APM 为直角时,切线

$$MT = \sqrt{PT^2 + PM^2},$$

法线

$$MN = \sqrt{PM^2 + PN^2},$$

或者,由 $PT:TM = PM:MN$,得

$$MN = \frac{PMTM}{PT} = \frac{PM}{PT}\sqrt{PT^2 + PM^2}.$$

§ 293

我们看到了,方程 $At + Bu = 0$中的 $A=0$时,切线平行于轴, $B=0$时,切线平行于纵标线. 再一种情况是 A, B 都为零,此时考虑§286方程中次数为2的项. 由于 $At + Bu$ 为零,次数为2的项不能略

去.考虑方程$0=Ct^2+Dtu+Eu^2$,略去了更高次项. t,u 无穷小时,与二次项相比较,更高次项可略去.从该方程,跟从通用方程一样,显然,令 $t=0$,则 $u=0$,即 M 是曲线上的点,这与原来的假设是一致的.

§ 294

这样方程 $0=Ct^2+Dtu+Eu^2$ 表示曲线在 M 点附近的情形.显然,如果 $D^2<4CE$,则只要 $t\neq0$,且 $u\neq0$,方程就是虚的.此时点 M 当然属于曲线,但它离开曲线其余部分而单独存在,是缩成了一点的共轭卵形线,是前章指出过的情形.此时谈不上切线,切线有相邻两点与曲线共有,直线不能是曲线的缩成一点部分的切线.这样,共轭点如果存在,可用此法得到,并把它与曲线其余的点区别开来.

§ 295

如果 $D^2>4CE$,则方程 $0=Ct^2+Dtu+Eu^2$ 可分解为状如 $\alpha t+\beta u=0$ 的两个方程,都表示曲线的性质.它们都给出点 M 处切线的位置,也即给出曲线上点 M 处的方向.可见,曲线的两个分支在点 M 处相交,即点 M 是二重点.如果,如图 56 所示,取 $Mq=t$,那么 $q\mu$, $q\nu$ 就是从方程得到的两个 u 值.而直线 $M\mu$, $M\nu$ 就是曲线点 M 处的两条切线.因而点 M 是两个分支的交点,方向分别为 $M\mu$ 和 $M\nu$.可视共轭点为二重

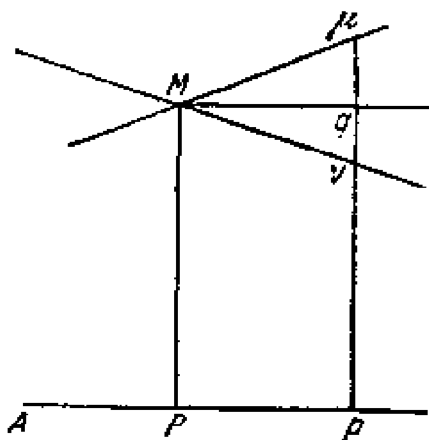


图 56

点，方程 $Ct^2+Dtu+Eu^2=0$ 恒指明二重点，这跟方程 $At+Bu=0$ 恒指明单重点是一样的.

§ 296

如果 $D^2=4CE$，则切线 $M\mu$，$M\nu$ 重合，角 $\mu M\nu$ 为零. 角 $\mu M\nu$ 为零表明，两个分支在点 M 处不仅相交，且方向相同，因而相切. 此时应该认为通过点 M 的直线交曲线于两点，即点 M 依然是二重点. 这样，只要 § 286 所得方程中开始的两个系数 A，B 为零，我们就可以断定曲线有二重点. 这二重点有三种类型：或者卵形线缩为一点，即共轭点；或者两个分支相交于结点；或者曲线的两个分支相切. 二重点的这三种类型，由方程 $0=Ct^2+Dtu+Eu^2$ 的三种情形决定.

§ 297

如果系数 A，B 为零的同时，系数 C，D，E 也为零，则取 t，u 次数和为 3 的项，得 $Ft^3+Gt^2u+Htu^2+Iu^3=0$. 如果该方程只有一个实线性因式，那么这因式指明，过点 M 有唯一的分支，并指明该分支的方向，即切线. 而剩下的两个线性虚因式指明点 M 为消失的卵形线. 如果三个因式都是实的，则曲线的三个分支或相交于点 M，或在点 M 处相切. 这决定于三个实因式相异或相等. 无论相交还是相切，点 M 都是曲线的三重点，并且应该认为过点 M 的直线与曲线有三个交点.

§ 298

如果再加上系数 F，G，H，I 也为零，那么为揭示曲线在点 M

处的性质,须考察方程中 t,u 次数和为 4 的项,此时点 M 为四重点.该四重点 M 处:或者两个共轭卵形线相合,这时四次方程的根全为虚数;或者曲线的两个分支与共轭点相交或相切,这时四次方程的根两实两虚;或者曲线的四个分支相交,这时四次方程的根全为实数;如果两个,三个或四个根相等,相应地,则两条,三条,四条分支的相交变为相切.类似地,如果 t,u 次数和为 4 的项也都为零,则应考虑次数和为 5 或次数和次数和更高的项.

§ 299

对不只经过点 M,且以点 M 为单重,二重,三重,或更多重点的曲线,其方程易于利用上面所得结果求出.记 $AP=p, PM=q$,设 $P,Q,R,S,\cdots$是坐标 x,y 的函数,则方程

$$p(x-p)+Q(y-q)=0$$

表示的是通过点 M 的曲线.这是因为只要 P 不含因式$y-q$,Q 不含因式 $x-p$,也即只要用除法消不去使曲线通过点 M 的因式$x-p,y-q$,那么我们令 $x=AP=p$,就得到 $y=PM=q$.显然,通过点 M 的曲线都包含在方程$p(x-p)+Q(y-q)=0$之中.如果该方程不是下面我们马上推出的多重点形状,点 M 就是单重点.

§ 300

如果点 M 为二重点,则过它的曲线的方程含于通用形式

$$P(x-p)^2+Q(x-p)(y-q)+R(y-q)^2=0$$

之中.这里假定这通用形式不能被除法破坏.由这通用形式显然可见,二阶线不能有二重点.因为要这通用形式为二阶方程,则必 P,Q,R 为常数,面那时这将不是曲线方程,面是两条直线的方程.P,Q,R 为状如$\alpha x+\beta y+\gamma$ 的一次函数时,方程表示的是以 M 为

二重点的三阶线.三阶线,只要它不是三条直线,它的二重点就不能多于一个.假定它有两个二重点,那么过这两点的直线就交三阶线于四点,这与三阶线的性质矛盾.四阶线可以有两个二重点,五阶线的二重点不能多于三个.

§ 301

若 M 是曲线的三重点,则曲线的性质由方程

$$P(x-p)^3+Q(x-p)^2(y-q)+R(x-p)(y-q)^2+S(y-q)^3=0.$$

表示.如果该方程确定的是一条曲线,那么其阶数必定大于 3.阶数等于 3,则必 P,Q,R,S 为常数,而那时方程有三个状如 $\alpha(x-p)+\beta(y-q)$ 的因式,是三条直线的方程.因而阶数低于 4 的曲线没有三重点.五阶线的三重点不能多于一个,否则将有交五阶线于六个点的直线.六阶线有两个三重点,这是可以的.

§ 302

如果方程的形状为

$$P(x-p)^4+Q(x-p)^3(y-q)+R(x-p)^2(y-q)^2+S(x-p)(y-q)^3+T(y-q)^4=0,$$

则 M 为曲线的四重点.有四重点的最简单的曲线是五阶线.八阶线或更高阶线可以有两个四重点.类似地,我们可以列出以点 M 为五重或任何重点的曲线的通用方程.

§ 303

如果点 M 是二重、三重、或任何别的重数的重点,则点 M 处

必定：或者重数那么多条分支相交或相切；或者相交分支的条数少于重数；而有一个或几个共轭点．具体的，可用前面讲过的方法确定．也即，将函数 $P, Q, R, S, \cdots$ 中的 x 和 y 换为 p 和 q，而将 $d-x$ 和 $y-q$ 换为 t 和 u．借助这样得到的方程，我们就可以确定曲线在点 M 处的状态及在点处相交的各分支的切线．

第十四章

曲线的曲率

§ 304

前章我们考察了曲线各点处指示方向的直线．进一步，现在我们考察曲线，它比原曲线简单得多，它的一部分与原曲线靠得很近，至少有很小的一段与原曲线相合．这样从简单曲线的性质可以得到原曲线的性质．这类似于对伸向无穷分支的考察方法．先考虑切线，再进一步考虑比原曲线简单的曲线，它更靠近原曲线，不只是相切，而是相合．而条曲线的这种关系叫密切．

§ 305

设给了直角坐标 x,y 间的一个方程，曲线如图 55 所示．我们来考虑靠近点 M 的极小的一部分 Mm 的性质，确定了横标 $AP=x$ 和纵标 $PM=y$ 之后，在新轴 MR 上取极小的横标 $Mq=t$，纵标 $q\mu=u$．这样我们有 $x=p+t$，$y=q+u$．将这两个值代入 x,y 间方程，得

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + \cdots$$

它表示同一曲线关于轴 MR 的性质. 由于新坐标 t, u 极小,所以前两项以外的项,与前两项相比,都可视为无穷小,都可略去.

§ 306

系数 A, B 不同时为零时,去掉其余的项,得方程 $0 = At + Bu$,它给出的直线在点 M 处与曲线相切,与曲线点 M 处的方向相同. 这样我们有 $Mq : q\mu = B : -A$. A, B 已给,因而曲线上点 M 处切线 $M\mu$ 的位置已知. 现在我们来看看,至少是在短距离之内,曲线 Mm 对直线 $M\mu$ 的偏离. 为此我们取法线 MN 为轴,并从点 m 引直角纵标 mr. 令 $Mr = r$, $rm = s$,则

$$t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{A^2 + B^2}},\quad u = \frac{-As - Br}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$r = \frac{-At - Bu}{\sqrt{A^2 + B^2}},\quad s = \frac{Bt - Au}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

由

$$-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + \cdots$$

知 r 与 t 及 u 比较为无穷小. 且 r 与 s 比较也为无穷小,这是因为 s 为 t, u 的一次函数,而 r 用 t, u 的二次或更高次幂表示.

§ 307

如果我们不略去二次部分 $Ct^2 + Dtu + Eu^2$,只略去它后面的项,那么结果会更靠近曲线 Mm. 此时我们得到 t, u 间的方程

$$-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2.$$

把前节求得的 t 和 u 值代入该方程,得

$$r\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{(A^2C + ABD + B^2E)r^2}{A^2 + B^2} +$$

$$+\frac{(A^2D-B^2D-2ABC+2ABE)rs}{A^2+B^2}$$

$$+\frac{(A^2E-ABD+B^2C)s^2}{A^2+B^2}$$

由 r 与 s 比较为无穷小知，r^2 和 rs 与 s^2 比较可略去．这样我们得到

$$s^2=\frac{(A^2+B^2)r\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E-ABD+B^2C}.$$

该方程表示的曲线与原曲线在点 M 处密切．

§ 308

也即所给曲线的极短的一段弧 Mm，与轴为 Mn，参数为

$$\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E-ABD+B^2C}$$

的抛物线的顶重合．我们称该抛物线顶点处的曲率为所给曲线点 M 处的曲率．曲线中圆的曲率我们最清楚，各点相同，都与自己的半径成反比．因而用与曲线有着相同曲率的圆，来定义曲线的曲率，最为方便．通常称这种圆为密切圆．因此我们要求出这样的圆，它的曲率等于抛物线顶点处的曲率．我们就用这个圆来代替密切抛物线．

§ 309

为了求出这样的圆，我们视圆的曲率为未知数，并照前面的方法用抛物线的曲率表示它．这样我们就可以反过来用密切圆代替密切抛物线．假定所给曲线 Mm 是半径为 a 的圆，其性质由方程 $y^2=2ax-x^2$ 表示．取 $AP=p$，$PM=q$，得 $q^2=2ap-p^2$．令

$$x=p+t,\ y=q+u,$$

得方程

$$q^2+2qu+u^2=2ap+2at-p^2-2pt-t^2,$$

由于 $q^2=2ap-p^2$,该方程化简为

$$0=2at-2pt-2qu-t^2-u^2.$$

与前面的方程相比较,得

$$A=2a-2p,B=-2q,C=-1,D=0,E=-1,$$

从面

$$A^2+B^2=4(a^2-2ap+p^2+q^2)=4a^2,(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}=8a^3,$$

$$A^2E-ABD+B^2C=-A^2-B^2=-4a^2.$$

由此得知半径为 a 的圆密切抛物线 $s^2=2ar$ 于顶点.反之,如果曲线有密切抛物线 $s^2=br$,则该曲线有半径 $=\frac{1}{2}b$ 的密切圆.

§ 310

前面我们已经求出了曲线 Mm 的一条密切抛物线

$$s^2=\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E-ABD+B^2C}r.$$

清楚地,该曲线在点 M 处的曲率等于半径为

$$\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E-ABD+B^2C)}$$

的圆的曲率.也即,该表达式给出密切圆的半径.密切圆的半径,通常称为密切半径,也称为曲率半径.这也就是说,从给定的 x,y 间的方程,我们可以推出 t,u 间的方程.从 t,u 间的方程,我们立即可以求出曲线在点 M 处的密切半径,也即点 M 处密切于曲线的圆的半径.去掉 t,u 间方程中 t,u 次数和大于 2 的项,得如下形状的方程

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2,$$

从该方程求得密切半径

$$= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{A^2 + B^2}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}.$$

§ 311

这里有一点不确定,即$\sqrt{A^2 + B^2}$可正可负,因而密切半径表达式可正可负.也即曲线的向点 N 的一因可凸可凹.为了变这不确定为确定,我们应该弄清曲线上点 m 是在切线 $M\mu$ 的 AN 一侧,还是在切线的另一侧.前一情况下曲线的向 N 面为凹,密切圆圆心在直线 MN 上,后一种情况下,圆心在直线 NM 的延长线上,在点 M 之外.可见,弄清 qm 是短于还是长于$q\mu$,不确定性即完全排除.短于,则曲线的向 N 而为凹,长于,则曲线的向 N 面为凸.

§ 312

但 $q\mu = -\frac{At}{B}$, $qm = u$,我们须弄清 $-\frac{At}{B}$比 u 大还是比 u 小. $m\mu$ 很短,令 $m\mu = \omega$,则 $u = -\frac{At}{B} - \omega$,代入 t, u 间方程,得

$$0 = -B\omega + Ct^2 - \frac{ADt^2}{B} - Dt\omega + \frac{A^2Et^2}{B^2} + \frac{2AEt\omega}{B} + E\omega^2;$$

该表达式中 ω 比 t 小很多,略去含 $t\omega$ 和含 ω^2 的项,得

$$\omega = \frac{(B^2C - ABD + A^2E)t^2}{B^3}.$$

当

$$\frac{B^2C - ABD + A^2E}{B^3}, \text{或} \frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$$

为正时，ω 为正，曲线向 N 的一面为凹．如果 ω 为负，则曲线向 N 的一面为凸．

§ 313

为了更清楚起见，我们对可能遇到的几种情形分别进行讨论．先设 $B=0$，此时纵标线 PM 是曲线 Mm 的切线，密切半径为$\frac{A}{2E}$．曲线如图 57 所示，凹面对 R，还是相反，凸面对 R，这可从方程 $0=At+Ct^2+Dtu+Eu^2$ 判定．事实上，由 $Mq=t$，$qm=u$ 知，与 u 相比较 t 为无穷小，与 u^2 相比较，略去含 t^2，tu 的项，得 $At+Eu^2=0$．由该方程我们看到，系数 A，E 反号，即$\frac{A}{E}$为负时，曲线凹面向 R．如果系数 A，E 同号，$\frac{A}{E}$为正，则曲线在切线的另一侧．此时应该横标 t 为负，对应的纵标 qm 才能为实数．

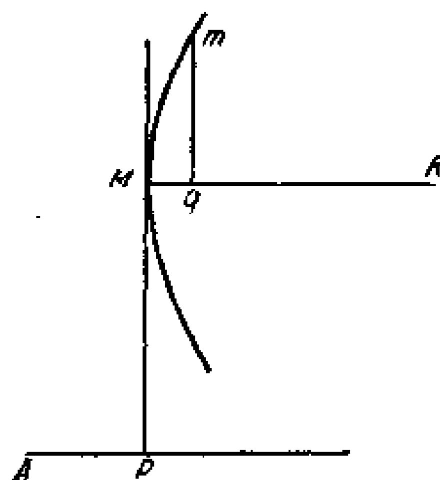


图 57

§ 314

设切线 $M\mu$ 倾斜于轴 AP，或倾斜于平行于轴的直线，如 § 286 图 55 所示．此时角 $RM\mu$ 为锐角，法线 MN 与轴的交点位于 P 右．这种情况下横标 t 对应正的纵标 u，因此系数 A，B 异号，分数$\frac{A}{B}$为负．我们知道，这样的情况下，如果

$$\frac{A^2E-ABD+B^2C}{B}$$

为正，或（因$\frac{A}{B}$为负）

$$\frac{A^2E-ABD+B^2C}{A}$$

为负，则曲线凹面向 N. 反之，如果

$$\frac{A^2E-ABD+B^2C}{B}$$

为负，或

$$\frac{A^2E-ABD+B^2C}{A}$$

为正，则曲线凸面向 N. 两种情况下，密切半径都

$$=\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E-ABD+B^2C)}.$$

§ 315

设 $A=0$，则如图 58 所示，直线 MR 平行于轴，并为曲线的切线. 与 t 比较，u 为无穷小，由此得 $0=Bu+Ct^2$. 可见 B，C 同号，即 BC 为正时，u 应该为负，因面曲线凹面向点 P. 根据前面导出的规则，$A=0$ 时 N 与 P 重合. 此时密切半径 $=\frac{B}{2C}$. 切线与轴的交点位于 P 右时（图 59），前面所给出的规则依然适用. 此时曲线凹面还是凸面向 N，由表达式

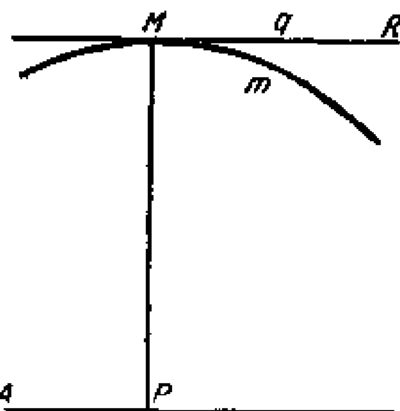


图 58

$$\frac{A^2E-ABD+B^2C}{B}$$

的正负决定.密切半径依然都

$$=\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E-ABD+B^2C)}.$$

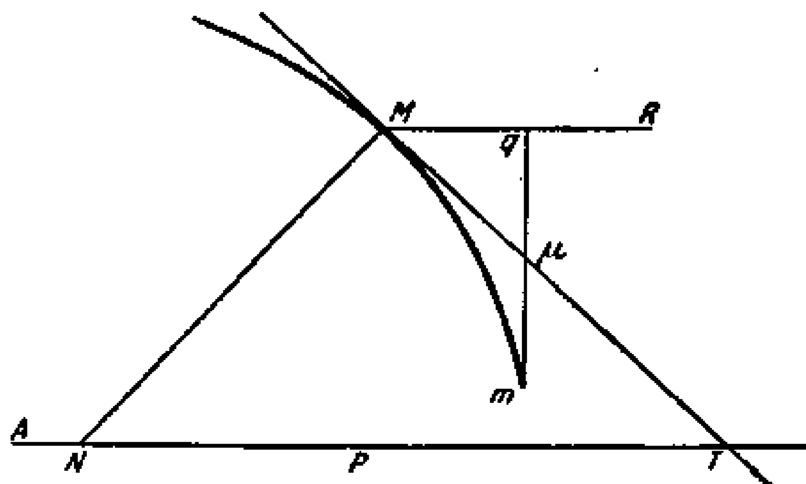


图 59

§ 316

设给定的曲线为椭圆,图 60 上是第一象限部分,中心为 A,横半轴 $AD=a$,与它共轭的半轴 $AC=b$.置横标 x 于轴 AD 上,并从中心 A 计算起,得椭圆方程

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

任取横标 $AP=p$,记对应纵标 $PM=q$,得

$$a^2q^2+b^2p^2=a^2b^2.$$

图 60

令 $x=p+t$, $y=q+u$,得

$$a^2q^2+2a^2qu+a^2u^2+b^2p^2+2b^2pt+b^2t^2=a^2b^2$$

或

$$2b^2pt+2a^2qu+b^2t^2+a^2u^2=0.$$

首先由于 t,u 的系数为正,法线 MN 交轴于 P 点之左,又由于 $A=2b^2p,B=2a^2q$,我们有

$$PM:PN=B:A=a^2q:b^2p,\ PN=\frac{b^2p}{a^2},$$

再由于 $C=b^2,D=0,E=a^2$,我们有

$$\frac{A^2E-ABD+B^2C}{B}=\frac{4a^2b^2(a^2q^2+b^2p^2)}{2a^2q}=\frac{4a^4b^4}{2a^2q},$$

该表达式为正,这表明曲线凹面向 N.

§ 317

由

$$A^2+B^2=4(a^4q^2+b^4p^2),A^2E-ABD+B^2C=4a^4b^4$$

得密切半径 $=\frac{(a^4q^2+b^4p^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$.但

$$MN=\sqrt{q^2+\frac{b^4p^2}{a^4}},$$

从而

$$\sqrt{a^4q^2+b^4p^2}=a^2\cdot MN,$$

进而密切半径等于 $\frac{a^2\cdot MN^3}{b^4}$.如果从中心 A 向法线 MN 引垂线 AO,那么由于 $AN=p-\frac{b^2p}{a^2}$ 和三角形 MNP,ANO 相似,得

$$NO=\frac{a^2b^2p^2-b^4p^2}{a^4MN},$$

$$MO=NO+MN=\frac{a^2q^2+b^2p^2}{a^2MN}=\frac{b^2}{MN},$$

从而 $MN=\frac{b^2}{MO}$,继而密切半径 $=\frac{a^2b^2}{MO^3}$.该表达式对轴 AD 和 AC 都适用.

§ 318

知道了曲线每点处的密切半径,曲线的性质也就完全清楚了.事实上,如果曲线被分成尽可能小的部分,每一部分就都可以看成以本部分的密切半径为半径的圆弧.这样我们就可以相当精确地画出曲线.方法是,得到了曲线通过的许多点之后,对每一点依次求出切线、法线和密切半径.那么位于两点之间的这些很小的部分,就可以用圆规画出.点取得越多,靠得越近,用这种方法画出的曲线就越精确.

§ 319

因为 § 286 图 55 上过点 M 的一小段曲线,与密切圆的一段弧重合,所以不只整个 Mm,而且连上 Mn 的这一段,曲率相同.事实上,由于描述曲线很小部分 Mm 的方程,是坐标 $Mr=r$, $rm=s$ 间的 $s^2=\alpha r$,所以每个极小横标 $Mr=r$ 都对应由方程决定的两个纵标,一正一负.因而曲线同时向 n 和 m 两个方向延伸,在密切半径 $\frac{1}{2}\alpha$ 为有限值处,在小范围内,每点两侧曲率都相同.此时曲线不会急剧改变,不会出现尖点,也不会 Mn 部分凸面向 N,而 Mm 部分凹面向 N.曲线上两侧一凸一凹的点叫拐点,或反向弯曲点.密切半径为有限值的点,既不能是尖点,也不能是拐点.

§ 320

从 t,u 间方程

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + \cdots$$

我们求得密切半径

$$= \frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}.$$

显然,如果 $A^2E - ABD + B^2C = 0$,则密切半径为无穷,即密切圆成为直线,曲率为零,曲线在一点两侧的两小部分在同一直线上.为对此情况下的直线进行详细考察,我们对 $Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + Iu^3$ 也作代换

$$t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{A^2+B^2}},\ u = \frac{-As - Br}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

与 $r\sqrt{A^2+B^2}$ 比较,含 r 的后继项都可忽略,去掉它们,得方程

$$r\sqrt{A^2+B^2} = \alpha s^2 + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \cdots.$$

§ 321

跟前面一样,从该方程我们立即得到密切半径 $= \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2\alpha}$.但 $\alpha = 0$ 时这密切半径为无穷.为更准确地考察曲线性质,取后继项 βs^3,得 $r\sqrt{A^2+B^2} = \beta s^3$. $\beta \neq 0$ 时,与 βs^3 比较,$\gamma s^4, \delta s^5, \cdots$ 都可去.这样点 M 处密切曲线的方程为

$$r\sqrt{A^2+B^2} = \beta s^3,$$

从这个方程,我们可以确定曲线在点 M 附近的形状. r 取负值时,对应的纵标 s 也为负,因而在点 M 附近曲线 $mM\mu$ 为蛇形,如图 61

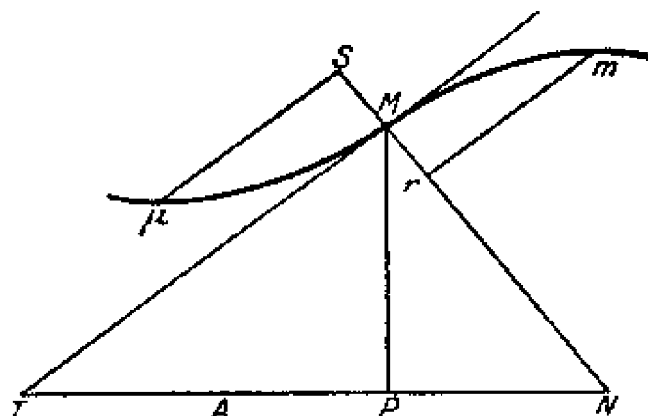


图 61

所示,也即点 M 为拐点.

§ 322

如果 α 为零,β 也为零,则曲线在点 M 附近的性质由方程

$$r\sqrt{A^2+B^2}=\gamma s^4$$

描述.由该方程使每个横标 r 对应两个纵标 s,一正一负,知曲线的两部分 Mm 和 $M\mu$ 在切线的同一侧,如图 62 所示.如果 α,β,γ 都为零,则曲线在点 M 附近的性质由方程

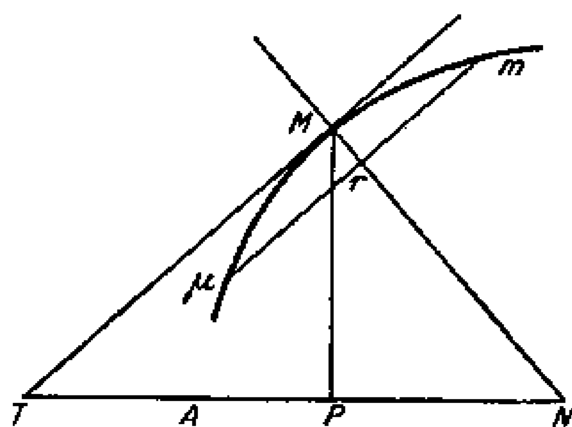


图 62

$$r\sqrt{A^2+B^2}=\delta s^5$$

描述,曲线又以点 M 为拐点,如图 61 所示.如果 δ 也等于零,则方程为

$$r\sqrt{A^2+B^2}=\epsilon s^6,$$

曲线又如图 62 所示,没有拐点.一般地,如果 s 的指数为奇数,则

曲线在点处有一个拐点;如果 s 的指数为偶数,则曲线在点 M 处没有拐点,如图 62 所示.

§ 323

我们讨论了点 M 为单重点的情形,即方程

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + \cdots$$

中系数 A,B 不同时为零的情形.如果 A,B 都为零,则曲线有两个或更多个分支在点 M 处相交,如图 56 所示.这时应该像前面做过的那样,分别对 M 点处每个分支的曲率和性质进行考察.设某个分支的切线方程为 $mt + nu = 0$.我们来求该分支的坐标 r,s 间方程.r 取在法线 MN 上,与 s 比较,r 为无穷小.因面我们令

$$t = \frac{-mr + ns}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad u = \frac{-ms - nr}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

代人方程,并去掉与保留项相比较为无穷小的项.那么,M 为二重点时得方程

$$rs = \alpha s^3 + \beta s^4 + \gamma s^5 + \delta s^6 + \cdots,$$

M 为三重点时得方程

$$rs^2 = \alpha s^4 + \beta s^5 + \gamma s^6 + \cdots,$$

类推.这些方程都可以化为

$$r = \alpha s^2 + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \cdots.$$

§ 324

从该方程我们看到,所考虑的分支在点 M 处的密切半径为 $\frac{1}{2\alpha}$,α 为零时它为无穷大.此时表示曲线性质的方程或为 $r = \beta s^3$,或为 $r = \gamma s^4$,或为 $r = \delta s^5$,$\cdots$.跟前面一样,从这些方程可以断定点

M 处有无拐点，s 的指数为奇数时有拐点，为偶数时没有. 各分支切线不同时，应该对过 M 的每一个分支进行这样的判断.

§ 325

如果点 M 处两条或更多条切线重合，则应换个方式进行讨论. 设 A,B 都为零，即方程为

$$0=Ct^2+Dtu+Eu^2+Ft^3+Gt^2u+\cdots,$$

且表达式 $Ct^2+Dtu+Eu^2$ 的两个线性因式相等，即点 M 处相交的两个分支有共同的切线. 设

$$Ct^2+Dtu+Eu^2=(mt+nu)^2.$$

参见图 55，我们变 t,u 间方程为 $Mr=r,rm=s$ 间方程. 为此，令

$$t=\frac{-mr+ns}{\sqrt{m^2+n^2}},\ u=\frac{-ms-nr}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

得方程

$$r^2=\alpha rs^2+\beta s^3+\gamma rs^3+\delta s^4+\epsilon rs^4+\zeta s^5+\cdots.$$

与第一项 r^2 相比较，略去了 r 的次数大于 1 的项.

§ 326

与 s 相比较 r 为无穷小，因而与项 βs^3 相比较，别的项都可略去. 这样，只要 $\beta\neq0$，曲线在点 M 附近的性质就由方程 $r^2=\beta s^3$ 描述. 由 $r=s\sqrt{\beta s}=s^2\sqrt{\frac{\beta}{s}}$，知点 M 处密切半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\beta}}$，进而由 M 处 s 可忽略，知密切半径为零. 因而点 M 处曲率为无穷大，也即点 M 处的这段曲线是无穷小圆的一部分. 由 r 反号时 s 不变，知曲线以 M 点为尖点，且被公切线 Mt 分为 $Mm,M\mu$ 两部分，两部分都凸面向 Mt，见图 63.

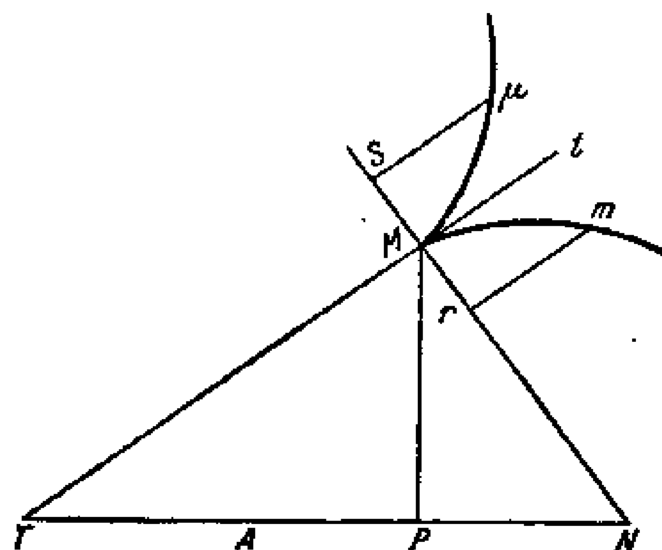


图 63

§ 327

如果 $\beta=0$,并 δs^4 在方程中出现,且与 δs^4 相比较,γrs^3 略去,

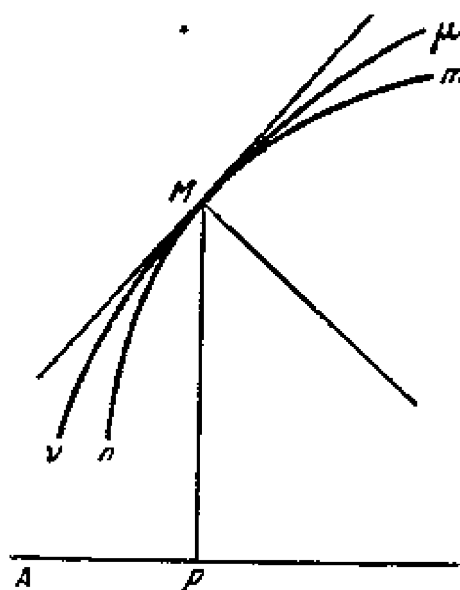


图 64

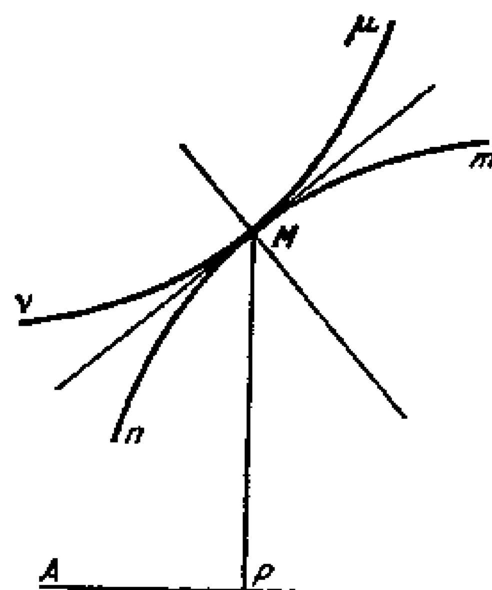


图 65

则曲线在点 M 附近的性质，由方程 $r^2=\alpha rs^2+\delta s^4$表示. $\alpha^2<-4\delta$ 时，有复因式，M 点为共轭点. $\alpha^2>-4\delta$ 时，方程分解为 $r=fs^2$, $r=gs^2$. 此时点 M 处两个分支相切，密切半径分别为$\frac{1}{2f}$和$\frac{1}{2g}$. 如果这两个分支凹面朝向相同，则曲线形状如图64所示，为两条内切圆弧；如果凹面朝向相反，则曲线形状如图65所示，为两条外切圆弧.

§ 328

如果 δ 也可略去，则方程或者能够或者不能够分解成另外两个方程. 能够时，得到在点 M 处相切的两个分支，其性质都由状如 $r=\alpha s^m$ 的方程表示. 种类数等于以 M 为单重点的分支的两两组合数. 称包含在方程 $r=\alpha s^m$ 中的这种分支为一阶分支. 不能够时，则表示曲线性质的方程，或者为 $r^2=\alpha s^5$，或者为 $r^2=\alpha s^7$，或者为 $r^2=\alpha s^9$, …. 这类分支，包括前面讨论过的 $r^2=\alpha s^3$，都叫二阶分支. 它们中的每一个都相当于在点 M 处有公切线的两个分支. 二阶分支的形状都如图 63 所示，即都同于方程 $r^2=\alpha s^3$ 所表示的，在点 M 处有尖点. 但有一点不同，M 点处的密切半径，方程 $r^2=\alpha s^3$ 的为无穷小，而其余的方程的都为无穷大. 事实上，从方程 $r^2=\alpha s^5$ 得 $r=s^2\sqrt{\alpha s}$，从而点 M 处的密切半径为$\frac{1}{2\sqrt{\alpha s}}$，因 $s=0$，这密切半径为无穷大.

§ 329

如果交于点 M 的三个分支的切线重合，那么在点 M，或者三个一阶分支相切，或者一个二阶分支与一个一阶分支相切，或者只有一个三阶分支通过. 表示三阶分支的方程为 $r^3=\alpha s^4$, $r^3=\alpha s^5$, r^3

$=\alpha s^7$，$r^3=\alpha s^8$，…．通用方程为 $r^3=\alpha s^n$，n 为大于 3 但不被 3 整除的整数．这些分支的形状，n 为奇数时，M 为拐点；n 为偶数时，如图 62 所示，M 不是拐点．此外，这些曲线在点 M 处的密切半径，$n<6$ 时为无穷小，$n>6$ 时为无穷大．

§ 330

类似地，如果交于点 M 的四个分支的切线相重合，那么在点 M，或者四个一阶分支，或者两个一阶分支和一个二阶分支，或者两个二阶分支，或者一个一阶分支和一个三阶分支相切．最后过点 M 的或者只是一个四阶分支．四阶分支的通用方程为 $r^4=\alpha s^n$，n 是大于 4 的奇整数．这些方程都像图 63 上二阶分支那样，给出一个尖点．M 处的密切半径，$n<8$ 时为无穷小，$n>8$ 时为无穷大．

§ 331

可以类似地对五阶和更高阶分支进行考察．5 阶，7 阶，9 阶，和一切奇阶分支，其形状都类似一阶分支，或者有一个拐点，或者没有拐点．6 阶，8 阶和一切偶阶分支，其形状都跟 2 阶和 4 阶分支一样，如图 63 所示，在 M 处有一个尖点．至于密切半径，因为这些弧的方程都为 $r^m=\alpha s^n$，其中 $n>m$，显然 $n<2m$ 时为无穷小，$n>2m$ 时为无穷大．

§ 332

这样我们可以把曲线分为三种类型．一、有连续曲率，既无拐点，也无尖点．首先，密切半径处处为有限值的曲线，属此类型．其次，密切半径为无穷大或无穷小，但不影响曲率连续，这样的曲线

也属此类型.例如,方程 $ar^m = s^n$ 表示的曲线就是,这里 m 为奇数,n 为大于 m 的偶数.二、有一个拐点,密切半径或为无穷大,或为无穷小,方程为 $ar^m = s^n$,m,n 都是奇数,且 $n > m$.密切半径,$n > 2m$ 时为无穷大,$n < 2m$ 时为无穷小.三、有一个尖点.尖点处两分支凸面相向、会合、相切并终止.方程为 $ar^m = s^n$,其中 m 为偶数,n 为奇数.密切半径或为无穷小,或为无穷大.

§ 333

曲线连续延伸,其可能的形状不外这三种类型.首先,连续曲

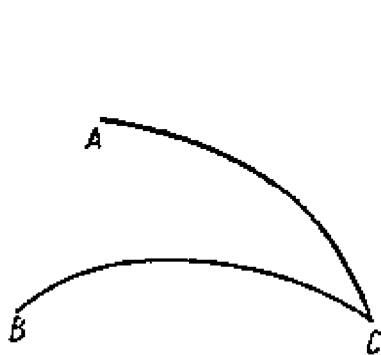


图 66

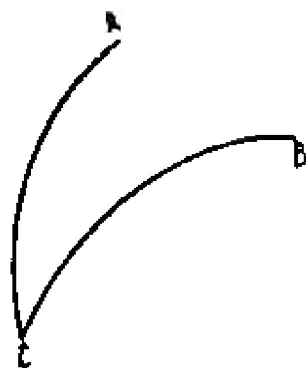


图 67

线的一个分支不能构成图 66 上点 C 处的有限角 ACB.其次,由于在尖点处两个分支凸面相向,所以不能有图 67 样的尖点.该尖点处,分支 AC 和 BC 有公切线,但 AC 的凹面迎着 BC 的凸面,凹面迎凸面表明曲线的这部分没画全.如果根据方程把它画全了,它的形状应该如图 64 所示.L'Hospital 称图 67 上那样的尖点为第二类尖点,有方法画出具有这种尖点的曲线.应该指出,一个方程所描述的曲线,用工具所能画出的常常只是它的一部分,而不是整个曲线.指出的这一点可避开关于第二类尖点的争论.

尽管像是有理由说第二类尖点不存在，但有第二类尖点的代数曲线，我们可以举出无穷多，其中甚至有四阶线. 例如方程

$$y^4 - 2y^2x - 4yx^2 - x^3 = 0$$

表示的就是. 该方程产生于 $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$. 虽然第一项为$\sqrt{x}$，但它的符号是确定的，必须为正，否则第二项$\sqrt[4]{x^3} = \sqrt{x\sqrt{x}}$为虚数. 这个例子启示我们，应该对前面举过的一些例子作认真的考察.

§ 334

如果两个分支于点 M 处有公切线，则如 § 327 图 64 所示，从点 M 伸出四段弧，即 $Mm, M\mu, Mn, M\nu$. 两分支由不同的方程刻画时，显然，属同一方程的两段，一段为另一段的延伸；两分支由同一方程刻画时，弧 Mm 的延伸，既可为 νM，亦可为 nM. 由于弧 Mn 和 $M\nu$ 的延伸都可以为 Mm，所以 Mn 与 $M\nu$ 互为对方的延伸. 因而，与任何另外两对弧一样，$mM, M\mu$ 也可视为一条连续曲线. 这时点 M 处有两个第二类尖点，$mM\mu$ 和 $nM\nu$.

§ 335

前节所讨论的分支，个数为 2，它们于点 M 处相切，无拐点，不构成尖点，且由同一方程刻画. 这分支个数可以更多，只要它们相切于点 M，且由同一方程刻画，它们中的每一个就都可视为其他任何一个的延伸. 当 r, s 间方程为

$$\alpha^2\gamma^{2m} - 2\alpha\beta\gamma^m s^n + \beta^2 s^{2n} = 0$$

时，情况就是这样. 此时分支由 $\alpha\gamma^m = \beta s^n$ 表示，从点 M 出发的四段弧中，任何两段都可视为连续曲线. 这样我们就得到许多第二类尖点. 也即对延伸的讨论，有时联系到第二类尖点，但考虑的不是方程表示的整个曲线，而只是一个或几个分支.

第十五章

有一条或几条直径的曲线

§ 336

我们讨论过,二阶线至少有一条正交直径,它分整个曲线为相似且相等的两部分.抛物线只有一条这样的直径,因而它由相似且相等的两部分组成.椭圆和双曲线各有两条这样的直径,都相交于中心成直角.因而这两种曲线都被分成四个相等且相似的弧或分支.过圆心的直线都分圆为相等且相似的两部分,又等弦所对的弧相等且相似,因而圆有无穷多个相等且相似的部分.

§ 337

现在我们考察一个曲线的两个或更多个部分的相似,导出这种具有两个或更多个相似部分的曲线的通用方程.先考虑直角坐标 x,y 间的方程,垂直相交于 C 的直线 AB,EF 将整个平面分为如图 68 所示的 Q,R,S,T 四部分.x,y 都取正值时得曲线的 Q 中部分;x 正 y 负,得曲线的 R 中部分;x 负 y 正,得曲线的 S 中部

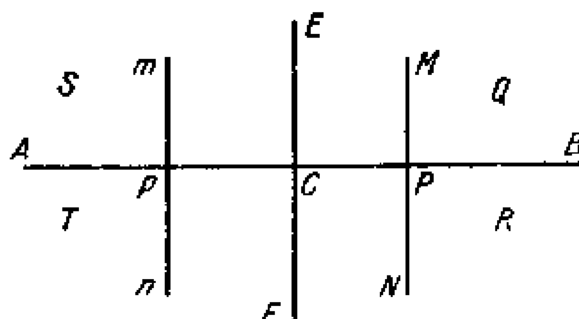


图 68

分;最后 x,y 都负时,得曲线的 T 中部分.

§ 338

如果换 y 为 $-y$ 方程不变,则曲线的 Q,R 中部分相等且相似.y 的偶次幂具有这种性质.可见,如果方程不含 y 的奇次幂,则曲线的 Q,R 中部分相等且相似.横标 $CP=x$ 所在的直线 AB 是这种曲线的直径.具有这种性质的代数曲线,其通用方程为

$$0=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta y^2+\varepsilon x^3+\zeta xy^2+\eta x^4+\theta x^2y^2+\iota y^4+\cdots,$$

可称该表达式为 x 和 y^2 的有理函数.如果 Z 为 x 和 y^2 的有理函数,则方程 $Z=0$ 表示的曲线被直线 AB 分成相似且相等的两部分.这种曲线的 S,T 中部分也相等且相似.

§ 339

换 x 为 $-x$ 方程不变,则该方程表示的曲线的 Q,S 中部分相等且相似.因而,如果 Z 是 x^2 和 y 的有理函数,则方程 $Z=0$ 表示的曲线被直线 EF 分成相等且相似的两部分.这种曲线,其方程的形状为

$$0 = \alpha + \beta y + \gamma x^2 + \delta y^2 + \varepsilon x^2 y + \zeta y^3 + \eta x^4 + \theta x^2 y^2 + \iota y^4 + \cdots.$$

该方程表示的曲线，S 中部分与 Q 中部分相似且相等，T 中部分与 R 中部分也相似且相等.

§ 340

如果同时换 x 为 $-x$，换 y 为 $-y$ 方程不变，则曲线的 Q，R 中部分分别与对顶的 T，S 中部分相似且相等. 设 $Z=0$ 是这样的曲线的方程. 首先，如果 Z 对 x，y 都是偶函数，或者 Z 是 x，y 的偶次齐次函数的和，则方程 $Z=0$ 具有上述性质. 其次，如果 Z 是 x，y 的奇次齐次函数的和，则 x，y 都换为负时，Z 变为 $-Z$. 于是由 $Z=0$ 得 $-Z=0$. 从而 Q 中部分与 T 中部分，R 中部分与 S 中部分相等且相似. 这样，本节曲线的通用方程有两个. 一个为

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma xy + \delta y^2 + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta x^2 y^2 + \theta x y^3 + \iota y^4 + \kappa x^6 + \cdots,$$

另一个为

$$0 = \alpha x + \beta y + \gamma x^3 + \delta x^2 y + \varepsilon x y^2 + \zeta y^3 + \eta x^5 + \theta x^4 y + \iota x^3 y^2 + \cdots.$$

§ 341

因而，有着相似且相等两部分的这种曲线分为两类. 一类是这两部分位于一条直线的两侧，正交于该直线的弦都被该直线平分. 该直线是曲线的正交直径，§ 338 和 § 339 讨论的是这种曲线. 另一类是曲线在对顶的 Q 和 T 或 R 和 S 中的部分相似且相等，过点 C 的每一条直线都将曲线分成错位相等的两部分. 上节讨论的是这种曲线. 为区别这两类相等起见，称第一类为直径相等，称第二类为错位相等. 错位相等时，有这样一个点 C，过它的弦被它平分.

称这种点 C 为中心. 称错位相等曲线为有中心,称直径相等曲线为有直径.

§ 342

前面讲了,函数 Z 中纵标 y 的次数都为偶数时,方程 $Z=0$ 表示的曲线以直线 AB 为直径;横标 x 的次数都为偶数时,则曲线以 EF 为直径. 如果函数 Z 中, x, y 两者的次数都为偶数,则直线 AB, EF 都是正交直径. 从而曲线的位于 Q, R, S, T 中的这四部分将相等且相似. 具有此种性质的曲线,其通用方程为

$$0=\alpha+\beta x^2+\gamma y^2+\delta x^4+\varepsilon x^2y^2+\zeta y^4+\eta x^6+\theta x^4y^2+\cdots.$$

§ 343

含于该方程的曲线有交于 C 相垂直的两条直径, AB 和 EF. 这些直线的阶数,必定或为 2,或为 4,或为 6,…. 奇阶线不能有相垂直的两条直径. 再则,由于该方程含于 § 340 的第一个方程之中,所以这些曲线也都有中心,这中心为 C. 因而过点 C 向两边延伸到曲线的线段被点 C 平分. 这样, Z 为 x^2 和 y^2 的有理函数时,方程 $Z=0$ 给出的曲线有两条直径.

§ 344

前面讨论了有两条直径的曲线的方程. 现在我们考察有多条直径的曲线的方程. 首先,容易证明,如果曲线只有两条直径,则这两条直径互相垂直. 这是因为具有两条直径的曲线,其方程都含于我们刚求得的方程之中. 假定某条曲线有两条直径 AB 和 EF,交于 C,但不垂直,如图 69 所示. 因为 EC 是直径,所以其两侧的曲

线相同，EC 的一侧有直径 AC，另一侧必有直径 GC，满足角 GCE = ACE．类似地，由 GC 为直径，知必有性质如 EC 的直径 IC，满足角 GCI = GCE．继而，角 ICL = ICG 时，直线 LC 为直径．这样地继续下去，每次我们都将得到新的直径，直至新直径与第一直径 AC 重合．当角 ACE 与直角的比为有理数时，这种重合必定出现．

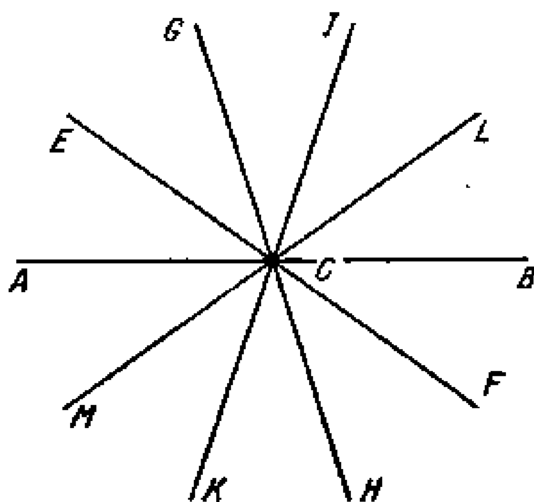


图 69

§ 345

角 ACE 与直角的比不为有理数时，直径的数目无穷，此时曲线为圆．圆的过中心的每条直线都是正交直径．正交直径，指它分曲线为相似且相等的两部分．由前面讲的可知，代数曲线不能有平行的两条直径．否则，照前面的作法将得到间距相等的无数条相平行的直径．这样一条直线与曲线有无穷多个交点．这是代数曲线所不能具有的性质．

§ 346

如果一曲线有几条直径，则它们必相交于同一点 C，且被等角分开．这几条直径分为两类，交替出现．直径 CG 的性质同于直径 CA．曲线取 CG 为轴的方程，同于取 CA 为轴的方程，隔一取一的

直径 $CA, CG, CL,\cdots$对曲线的关系相同.同样地,直径 $CE, CI,\cdots$对曲线的关系也相同.因此,如果直径条数有限,则角 ACG 除得尽四个直角,也即角 ACE 除得尽 $180°$,也称 $180°$为半圆,记为 π.

§ 347

参见图 70, 角 $ACE = 90° = \frac{1}{2}\pi$, 这是我们讨论过的、有两条相垂直的直径的情形.我们再次考察这些曲线, 但改用新法. 新法可用于考察有多条直径的曲线. 设曲线有两条直径 AB 和 EF. 在曲线上任取一点 M, 画出这 M 与中心 C 的连线 CM, 令 $CM = z$, 令角 $ACM = s$. 我们求 z, s 间的方程. 首先由直线 AC 为直径知, 换 s 为 $-s$ 时, s 的函数 z 应该不变, 这是因为取对角 $ACM = s$ 的负角 ACm, 我们有 Cm 等于 CM. 换 s 为 $-s$, s 的函数 $\cos s$ 不变. 因此, 如果 z 是 $\cos s$ 的某个有理函数, 则前面的要求将满足.

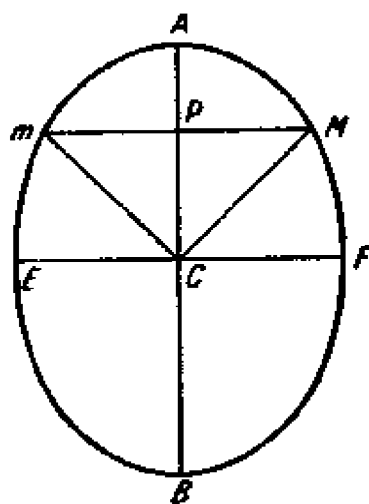


图 70

§ 348

置横标 $CP = x$,纵标 $PM = y$,则

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \cos s = \frac{x}{z}.$$

设以 CA 为直径的曲线的方程为 $Z = 0$,则 Z 应该是 z 和 $\frac{x}{z}$,或 z 和 x 的有理函数,由有理性,Z 也应该是 $x^2 + y^2$ 和 x 的有理函数.但

是;如果 Z 是 x^2+y^2 和 x 的函数,则 Z 就也是 y^2 和 x 的函数.事实上,令 $x^2+y^2=u$,由 Z 应该是 x 和 u 的函数,令 $u=t+x^2$,则 $t=y^2$,那么,Z 就是 t 和 x 的函数,也即 y^2 和 x 的函数.只要 Z 是 y^2 和 x 的函数,直线 CA 就是曲线 $Z=0$ 的直径.具有一条直径的曲线的这条性质,是我们前面已经求了出来的.

§ 349

依假定,我们的曲线有两条直径 AB 和 EF,因而 CB 是性质同于 CA 的直径.如果直线 $CM=z$ 以直径 CB 为参数,则由角 $BCM=\pi-s$,换 s 为 $\pi-s$ 时,s 的函数 z 应不变.$\sin s=\sin(\pi-s)$,因而函数 $\sin s$ 具有这一性质,但它不满足前面提出的条件.要求我们求出这样一个表达式,对于 $s,-s,\pi-s$,其值相同.$\cos 2s$ 满足这一要求

$$\cos 2s=\cos(-2s)=\cos 2(\pi-s).$$

因而,如果 Z 是 z 和 $\cos 2s$ 的有理函数,$Z=0$ 就是具有两条直径 AB 和 EF 的曲线的方程.但 $\cos 2s=\dfrac{x^2-y^2}{z^2}$,因而 Z 应该是 x^2+y 和 x^2-y^2,或 x^2 和 y^2 的函数,和前面求得的一致.

§ 350

现在我们考察具有三条直径 AB,EF 和 GH 的曲线.这三条直径交于同一点 C,交角 ACE,ECG,GCB 都为 $60°=\pi/3$,如图 71 所示.隔一取一的直径 CA,CG,CF 有相同的性质.因而,如果令 $CM=z$,角 $ACM=s$,则由 $GCM=\dfrac{2}{3}\pi-s$,知曲线方程 $Z=0$ 中的 Z 应该是这样的:Z 为 z 和某个量 ω 的函数.ω 依赖于 s,且换 s 为

$-s$或$\frac{2}{3}\pi - s$ 时 ω 不变，我们取 $\omega = \cos 3s$，因为

$$\cos 3s = \cos(-3s) = \cos(2\pi - 3s).$$

置坐标 $CP = x, PM = y$，得

$$\cos 3s = \frac{x^3 - 3xy^2}{z^3}.$$

因而 Z 应该是 $x^2 + y^2$ 和 $x^3 - 3xy^2$ 的有理函数.

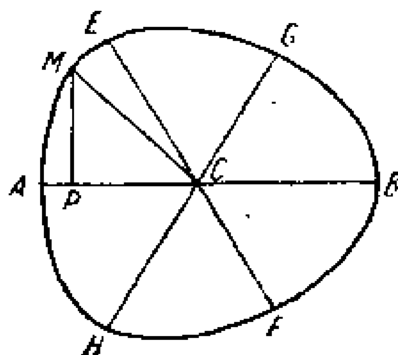


图 71

§ 351

如果令 $x^2 + y^2 = t, x^3 - 3xy^2 = u$，则有三条直径的曲线，其通用方程为

$$0 = \alpha + \beta t + \gamma u + \delta t^2 + \varepsilon tu + \zeta u^2 + \eta t^3 + \cdots,$$

它给出 x, y 的方程

$$0 = \alpha + \beta(x^2 + y^2) + \gamma x(x^2 - 3y^2) + \delta(x^2 + y^2)^2 + \cdots.$$

圆的方程为 $0 = \alpha + \beta x^2 + \beta y^2$，圆有无穷多条直径，圆也满足有三条直径的条件. 因而有三条直径的最简单的曲线是方程

$$x^3 - 3xy^2 = ax^2 + ay^2 + b^3$$

表示的三阶线. 这种三阶线有三条渐近线，这三条渐近线构成以 C 为中心的等边三角形，且都是 $u = \frac{A}{t^2}$ 状的，属于前面的第五类.

§ 352

如果曲线如图 72 所示，有四条直径：AB, EF, GH, IK，它们交

于一点 C，相邻两条的交角都为半直角 $=\frac{1}{4}\pi$，则直径 CA，CG，CB，CH 有相同的性质.令 $CM=z$，角 $ACM=s$，我们应该确定 s 的一个这样的函数，换 s 为 $-s$ 或 $\frac{2}{4}\pi-s$，它不变. $\cos 4s$ 是这样的函数.因而，如果 Z 是 z 和 $\cos 4s$ 或 x^2+y^2 和 $x^4-6x^2y^2+y^4$ 的函数，则方程 $Z=0$ 就给出有四条直径的曲线，令

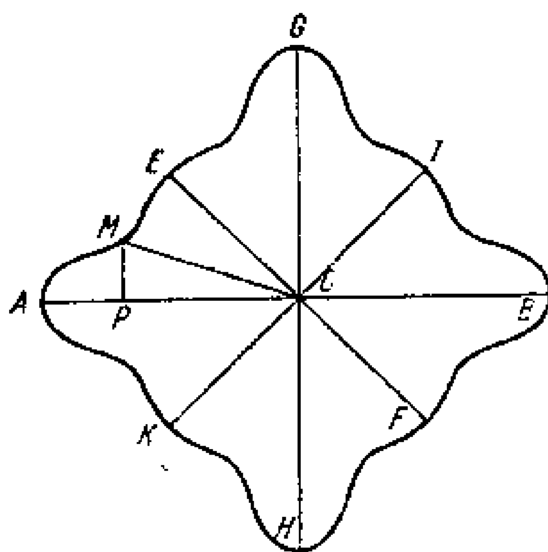


图 72

$$t=x^2+y^2,\ u=x^4-6x^2y^2+y^4,$$

则 Z 是 t 和 u 的函数.令 $v=t^2-u$，则 Z 是 t 和 v，也即 x^2+y^2 和 x^2y^2 的函数.也可以确定 Z 为 x^2+y^2 和 x^4+y^4 的函数.

§ 353

要方程 $Z=0$ 表示的曲线有五条直径，则 Z 应该是 z 和 $\cos 5s$ 的函数.取直角坐标 x,y 时，由

$$\cos 5s=\frac{x^5-10x^3y^2+5xy^4}{z^5}$$

得知，Z 应该是

$$x^2+y^2 \text{ 和 } x^5-10x^3y^2+5xy^4$$

的函数.从而，除掉圆，方程

$$x^5-10x^3y^2+5xy^4=a(x^2+y^2)^2+b(x^2+y^2)+c$$

表示的五阶线就是最简单的有五条直径的曲线.最高次部分的因式都为实的，因而该线有五条渐近线，围成以 C 为中心的正五边

形.

§ 354

从以上的讨论可以看出,一般地,如果 Z 是 z 和 $\cos ns$ 的函数,或者在直角坐标下,Z 是 x^2+y^2 和

$$x^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}y^4-\cdots$$

的一个有理函数,则方程 $Z=0$ 表示的曲线有 n 条直径,相邻直径的夹角都等于$\frac{\pi}{n}$.或者令

$$t=x^2+y^2,$$

$$u=x^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}y^4-\cdots,$$

则方程

$$0=\alpha+\beta t+\gamma u+\delta t^2+\varepsilon tu+\zeta u^2+\eta t^3+\theta t^2+\cdots$$

给出的曲线有 n 条直径.这样,我们可以求出有随便多少条直径的曲线,这些直径交于一点,且相邻两条的夹角都相等.当然,直径条数确定的代数曲线全都包含在我们的方程之中.

§ 355

有多条直径的曲线,必定有直径条数两倍那么多相似且相等的部分.例如,§ 348 图 70,有两条直径的曲线,有 4 个相似且相等的部分:AE,BE,AF,BF;§ 350 图 71,有三条直径的曲线,有 6 个相似且相等的部分:AE,GE,GB,FB,FH,AH;§ 352 图 72,有四条直径的曲线,有 8 个相似且相等的部分:AE,AK,GE,GI,BI,BF,

HF, HK. 相等部分的个数都是直径条数的两倍. 但是 § 341 我们说过,有这样的曲线,它们有相似的两个部分但无直径. 下面我们来寻求这种有相似且相等部分、但无直径的曲线.

§ 356

我们从图 73 上的曲线开始,它的位于对顶区域的两部分 AME 和 BKF 相等. 如果曲线只有两部分相等,则这两部分必对顶. 从相等部分的个数多于 2 的情形,可进一步看清这一点. 像做过的那样,令 $CM = z$,角 $ACM = s$. 显然,角 s 和 $\pi + s$ 对应相同的 z 值. 因为角 $ACM = \pi + s$ 时 $z = CK$,但 CK 应等于 CM. 我们要求出使角 s 和 $\pi + s$ 有同值的表达式. $\operatorname{tg} s$ 是这样的表达式,因为 $\operatorname{tg} s = \operatorname{tg}(\pi + s)$. 从而,如果 Z 是 z 和 $\operatorname{tg} s$,也即 $x^2 + y^2$ 和 $\frac{x}{y}$ 的函数,那么

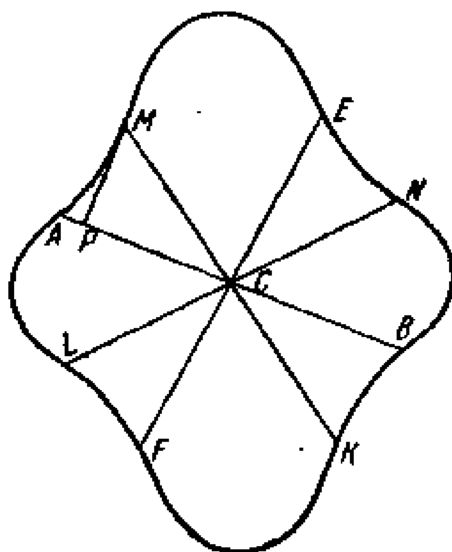


图 73

方程 $Z = 0$ 表示的就是我们所要的曲线. 令 $\frac{x}{y} = t$,则 $x^2 + y^2 = y^2(1 + t^2)$. 从而 Z 是 t 和 $y^2(1 + t^2)$,也即 t 和 y^2 的函数. 结果与我们前面得到的相同.

§ 357

正切是分数,为避免处理分数的麻烦,我们改用正弦和余弦. 由于

$$\sin 2s = \sin 2(\pi + s),\ \cos 2s = \cos 2(\pi + s),$$

取 Z 为 z, $\sin 2s$ 和 $\cos 2s$,也即 x^2+y^2, $2xy$ 和 x^2-y^2 的函数,则 $Z=0$ 即为所求.这里应该指出,如缺少 $\sin 2s$ 和 $\cos 2s$ 中的一个,则曲线有直径.我们得到 Z 应该是 x^2, y^2 和 xy 的函数,方程为

$$0=\alpha+\beta x^2+\gamma xy+\delta y^2+\varepsilon x^4+\zeta x^3y+\eta x^2y^2+\theta xy^3+\iota y^4+\cdots.$$

如果方程中不含 x 的项,那么除整个方程以 x,得

$$0=\beta x+\gamma y+\varepsilon x^3+\zeta x^2y+\eta xy^2+\delta y^2+\kappa x^5+\cdots.$$

这两个方程都是我们前面已经求了出来的.

§ 358

现在我们求如图 74 所示的,只含三个相似且相等部分 AM, BN 和 DL 的曲线.从点 C 到曲线作邻线夹角相等的三条直线 CM, CN, CL,则这三条直线相等.因面,令角 $ACM=s$,直线 $CM=z$,那么由角 $MCN=NCL=\frac{2}{3}\pi$,我们求由 s 确定的 z,使角

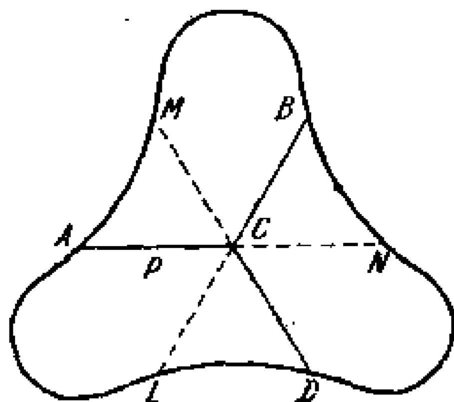


图 74

$$s, \frac{2}{3}\pi+s \text{ 和} \frac{4}{3}\pi+s$$

对应相同的 z 值. $\sin 3s$ 和 $\cos 3s$ 对这三个角都有相同的值.因此,如果 Z 是 x^2+y^2, $3x^2y-y^3$ 和 x^3-3xy^2 这三个量的有理函数,那么方程 $Z=0$ 就给出所要的所有曲线.从而这种曲线的通用方程为

$$0=\alpha+\beta(x^2+y^2)+\gamma(3x^2y-y^3)+\delta(x^3-3xy^2)+\varepsilon(x^2+y^2)^2+\zeta(x^2+y^2)(3x^2y-y^3)+\eta(x^2+y^2)(x^3-3xy^2)+\cdots.$$

这样，具有这种性质的三阶线含于下面这个方程之中

$$0=\alpha+\beta x^2+\beta y^2+\delta x^3+3\gamma x^2y-3\delta xy^2-\gamma y^3.$$

§ 359

参见图 73，如果曲线有四个相等的部分 AM，EN，BK 和 FL，那么从中心 C 到曲线引邻线夹角相等的四条直线，例如 CM，CN，CK 和 CL，则这四条直线相等．令角 $AMC=s$，直线 $CM=z$．由于角

$$MCN=NCK=KCL=90°=\frac{1}{2}\pi,$$

用 s 表示的 z 应该使角

$$s,\frac{1}{2}\pi+s,\pi+s,\frac{3}{2}\pi+s$$

对应的 z 值相同．表达式 $\sin 4s$ 和 $\cos 4s$ 具有这种性质．因而，如果 Z 是三个量

$$x^2+y^2,4x^3y-4xy^3 \text{ 和 } x^4-6x^2y^2+y^4$$

的某个函数，则方程 $Z=0$ 就给出具有四个相等部分的曲线．从而这类曲线的通用方程为

$$0=\alpha+\beta x^2+\beta y^2+\gamma x^4+\delta x^3y+\varepsilon x^2y^2-\delta xy^3+\gamma y^4+\cdots.$$

§ 360

没有直径、但有五个相等且相似部分的曲线，求法类似．这时方程 $Z=0$ 中的 Z 应该是下而这三个量的有理函数

$$x^2y^2,5x^4y-10x^2y^3+y^5,x^5-10x^3y^2+5xy^4.$$

一般地，如果相等部分的个数为 n，那么 Z 应该是下而这三个表达式的有理函数：x^2+y^2，

$$nx^{n-1}y-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^{n-3}y^3+$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{n-5}y^5-\cdots$$

和

$$x^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2+$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}y^4-\cdots.$$

如果后两个表达式中有一个不在方程中出现,那么曲线将有 n 条直径.

§ 361

有若干个相等部分的曲线分两类,有直径的和没有直径的.这两类包含了有两个或更多个相似相等部分的一切代数曲线.为证实这一点,我们假定一连续曲线有相似且相等的两部分 OAa 和 OBb,如图 75 所示.作点 A,B 的连线 AB,并以 AB 为底作顶角 C 等于角 O 的等腰三角形 ABC.由于角 OAC,OBC 相等,知曲线的 CAa,CBb 这两部分相似且相等.又由于连续规律,如果取角 $BCD,DCE,\cdots$ 都等于角 ACB,且 $CD=CE=CA=CB$,则曲线的 $Dd,Ee,\cdots$ 部分都相似且相等于 Aa,Bb.这样,只要角 ACB 与 360°之比不是无理数,相等部分的个数就是有限的,否则是无限的,从而曲线不是代数的.这是我们前面讨论过的没有直径的曲线.

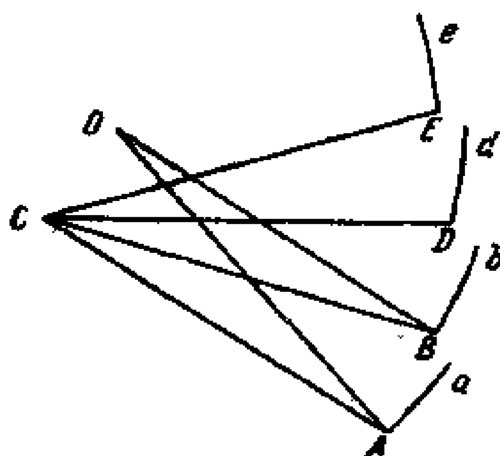


图 75

§ 362

如果相似且相等的两部分 OAa 和 OBb 在直线 AO 和 BO 的内侧，如图 76 所示，我们引相平行的直线 AR 和 BS，使角

$$OAR = OBS = \frac{1}{2}AOB.$$

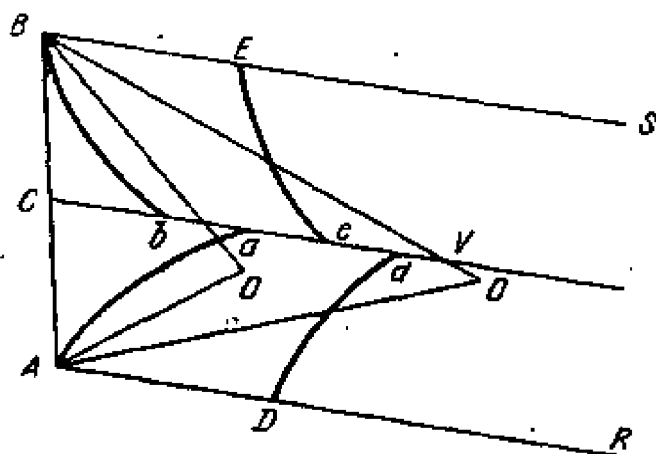


图 76

连 A，B 成直线 AB，过 AB 的中点 C 引直线 CV，使平行于 AR 和 BS，则 aA 和 bB 两部分关于直线 CV 相似且相等. 只要 $ba \neq 0$，那么弧 Bb 从 b 移到 a，则 Bb 相似且相等于另一侧的 aA；aA 从 a 移到 e，移动距离 $ae = ba$，则 aA 相似且相等于另一侧的 eE；继而 eE 相似且相等于另一侧的 dD. 这样该曲线有无穷多个相似且相等的部分，它们位于直线 CV 的两侧，也即这类曲线不是代数曲线.

§ 363

上节讨论的是直线 AB 倾斜于平行直线 AR 和 BS，或者三角形 AOB 的边 AO，BO 不相等的情形. 如果 $AO = BO$，则直线垂直于

平行线 AR, BS,也垂直于 CV. 这时的 CV 通过 O,因而此时点 a, b 重合. 又由于 aA 和 bB 相等且相似,知直线 CV 是曲线的直径,这属于我们讨论过的有直径的曲线. 从而有两个或更多个相似且相等部分的代数曲线全都包含在本章讨论的曲线之中.

第十六章

依据纵标性质求曲线

§ 364

设 P 和 Q 是横标 x 的两个有理函数,又设曲线方程为 $y^2-Py+Q=0$. 从而每个横标 x 或者不对应任何纵标,或者对应两个纵标. 对应的这两个纵标,和为 P,积为 Q. 因而,如果 P 为常数,则对应于同一个横标的两个纵标之和恒为常数,即曲线有直径. $P=a+nx$ 时情况同于 P 为常数. 此时直径的方程为 $z=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}nx$,这里的直径是广泛意义下的,不排除纵标为倾斜的. 如果 Q 为常量,则曲线与轴不相交. 如果 $Q=\alpha+\beta x+\gamma x^2$,又如果这右端表达式有两个实因式,则曲线与轴有两个交点,Q 是轴上两个区间的积,纵标的积与这两个区间的积的比为常数.

§ 365

圆锥曲线的性质,别的很多曲线也具有. 例如,双曲线取渐近线为轴时,对应于同一个横标的两个纵标之积为常数,方程 y^2-

$Py \pm a^2 = 0$ 表示的曲线都具有这种性质.又如,§87 图19,圆锥曲线,取交曲线于 E, F 的直线 EF 为轴时,积 $PM \cdot PN$ 与积 $PE \cdot PF$ 之比为常数.这条性质,方程

$$y^2 - Py + ax - nx^2 = 0$$

表示的每一条曲线也都具有.$y^2 - Py = ax - x^2$ 时我们有 $PM \cdot PN = PE \cdot PF$ 或 $pm \cdot pn = Ep \cdot pF$.圆的这条性质,不仅无数的高阶曲线具有,别的圆锥曲线也具有.事实上,令 $P = b + nx$,则方程为

$$y^2 - nxy + x^2 = ax + by.$$

该方程表示的:$n = 0$ 时为圆,角 EPM 是直角;$n^2 < 4$ 时,是椭圆;$n^2 > 4$ 时,是双曲线;$n^2 = 4$ 时,是抛物线.

§ 366

由此我们可以得到,对以 AB, EF 为轴或主直径的任一圆锥曲线 $AEBF$,参见图 77,任画两条与主轴成半直角、交于 h 的直线 pq 和 mn,则 $mh \cdot nh = ph \cdot qh$.这结论可从一条有名的性质推出.这性质为:过中心 C 引与主轴成半直角的直线 PQ 和 MN,则 $MC \cdot NC = PC \cdot QC$,且平行于这两条直线的直线都满足这条规律.因而我们有 $mh \cdot nh = ph \cdot qh$.应该指出,只要求直线 MN 和 PQ 对同一根主轴的倾角相同,即 $PCA = NCA$,那么由 $CP = CN$,任何平行于这两条直线的直线被交点分成的两段之积都相等,即 $mh \cdot hn = ph \cdot hq$.

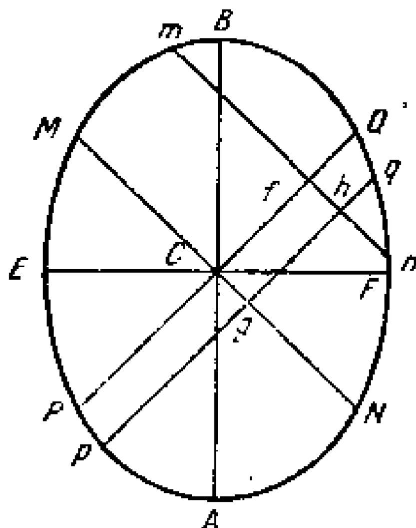


图 77

§ 367

方程 $y^2 - Py + Q = 0$ 使每一个横标对应两个纵标. 现在我们就来考虑有关这两个纵标的问题. 设横标 $AP = x$ 对应的两个纵标为 PM 和 PN. 参见图 78. 首先,我们寻求具有这样一种性质的所有曲线:

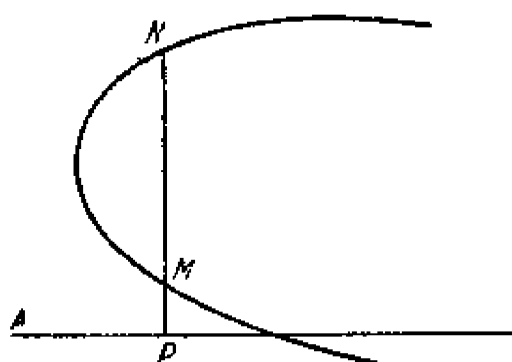


图 78

$$PM^2 + PN^2 = a^2,$$

a 为常数. 由

$$PM + PN = P \text{ 和 } PM \cdot PN = Q,$$

得

$$PM^2 + PN^2 = P^2 - 2Q$$

从而,令

$$P^2 - 2Q = a^2, \text{或 } Q = \frac{P^2 - a^2}{2},$$

曲线就具有所要的性质. 也即所求曲线的方程为

$$y^2 - Py + \frac{P^2 - a^2}{2} = 0.$$

令 $P = 2nx$,得到的是具有所要性质的圆锥曲线

$$y^2 - 2nxy + 2n^2x^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0,$$

这是以中心为原点的椭圆方程.

§ 368

由此得到椭圆的一条相当漂亮的性质. 参见图 79, $IGHK$ 为椭圆的外切平行四边形,边平行于椭圆的共轭直径 AB 和 EF, 切点

为 A,B,E,F. MN 是平行于直径的任何一根弦.平行四边形的对角线 GK,HI 与弦 MN 的交点分别为 P 和 p.我们有平方和 PM^2+PN^2 和 pM^2+pN^2 都恒为常数,等于 $2CE^2$.类似地,引平行于另一直径 AB 的弦 RS,则

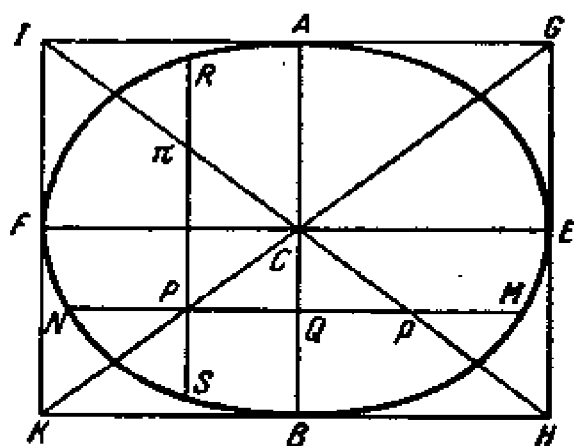


图 79

$$PR^2+PS^2=\pi R^2+\pi S^2=2CA^2.$$

我们进行证明.令 $CA=CB=a$, $CE=CF=b$, $CQ=t$, $QM=u$,则

$$a^2u^2+b^2t^2=a^2b^2.$$

但 $a:b=CQ(t):PQ$,且 $CP:CQ$ 为常数,记为 $m:1$.从而,令 $CP=x$, $PM=y$,则

$$x=mt,\qquad y=u+\frac{bt}{a},$$

或

$$t=\frac{x}{m},\qquad u=y-\frac{bx}{ma}.$$

代人,得

$$a^2y^2-\frac{2abxy}{m}+\frac{2b^2x^2}{m^2}=a^2b^2$$

令 $\frac{b}{ma}=n$,得

$$y^2-2nxy+2n^2x^2=b^2.$$

这是我们前而求出的证明 PM^2+PN^2 为常数的那个方程.

§ 369

现在我们求立方和 PM^3+PN^3 恒为常数的方程.参见 § 367

图 78,由 $PM + PN = P$,得

$$PM^3 + PN^3 = P^3 - 3PQ.$$

由此,令 $PM^3 + PN^3 = a^3$,则 $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$. 因而所求曲线的通用方程为

$$y^2 - Py + \frac{1}{3}P^2 - \frac{a^3}{3P} = 0,$$

这里的 P 可以是 x 的任何有理函数. 具有这种性质的最简单的曲线,是取 $P = 3nx$, $a = 3nb$ 时的三阶线

$$xy^2 - 3nx^2y + 3n^2x^3 - 3n^2b^3 = 0,$$

它属于我们前面划分的第二类.

§ 370

类似地,我们求 $PM^4 + PN^4$ 为常数的曲线. 由

$$PM^4 + PN^4 = P^4 - 4P^2Q + 2Q^2$$

得

$$P^4 - 4P^3Q + 2Q^2 = a^4,从而\ Q = P^2 + \sqrt{\frac{1}{2}p^4 + \frac{1}{2}a^4}.$$

因为 P 和 Q 都应该是 x 的有理,也即单值函数,所以要保证 y 对任何横标 x 都最多有两个值,量 $\sqrt{\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4}$ 必须有理. 但这不可能,所以函数 Q 恒为二值的. 从而纵标 y 是四值函数. 由方程 $y^2 - Py + Q = 0$ 得

$$y = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{-\frac{3}{4}P^2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4}},$$

可见 $\sqrt{\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4}$ 不取正号,y 就不可能是实的. 这样一来,虽然函数 Q 是二值的,但纵标 y 的值恒不多于二个,且其四次幂的和,

如问题所要求的,为常数.

§ 371

如果要求曲线满足对应于同一个横标的两个纵标的五次幂之和为常数,即 $PM^5+PN^5=a^5$,则应该有

$$P^5-5P^3Q+PQ^2=a^5.$$

从方程 $y^2-Py+Q=0$ 得 $Q=-y^2+Py$. 从而

$$P^5-5P^4y+10P^3y^2-10P^2y^3+5Py^4=a^5,$$

或

$$(P-y)^5+y^3=a^5.$$

如果要求 $PM^6+PN^6=a^6$,那么用同样的方法我们求得方程

$$(P-y)^6+y^6=a^6.$$

一般地,要曲线满足 $PM^n+PN^n=a^n$,则得到的方程为

$$(P-y)^n+y^n=a^n,$$

P 可以为 x 的任何单值函数. 这方程的含义是显然的. 因为两个纵标的和为 P,所以如果一个纵标为 y,则另一个为 $P-y$,由此直接得到

$$(P-y)^n+y^n=a^n.$$

§ 372

如果改消去 Q 为消去 P,为此将 $P=\frac{y^2+Q}{y}$ 代入表示 P、Q 关系的方程,那么当 $PM^n+PN^n=a^n$ 时,得方程

$$y^n+\frac{Q^n}{y^n}=a^n.$$

由于纵标的积为 Q,所以如果一个纵标为 y,则另一个为 $\frac{Q}{y}$. 由此

直接得到所求方程.这样,对 $PM^n + PN^n = a^n$ 的曲线,我们求得了两个方程,

$$(P - y)^n + y^n = a^n \text{ 和 } y^n + \frac{Q^n}{y^n} = a^n.$$

从后一个方程得

$$y^{2n} = a^n y^n - Q^n \text{ 和 } y^n = \frac{1}{2}a^n \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^{2n} - Q^n},$$

从而

$$y = \sqrt[n]{\frac{1}{2}a^n \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^{2n} - Q^n}},$$

该式是二值函数,并且只要 Q^n 是有理的,也即只要 Q^n 是单值函数,对于每一个横标 x,它给出的纵标个数都不多于 2.前一个方程 $y^n + (P - y)^n = a^n$ 的优点是次数低.

§ 373

这两个方程不仅适用于 n 为正整数的情形,也适用于负整数和分数的情形.对负整数指数

要求	结果方程
$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{1}{a}$	$aP = Py - y^2$ 或 $aQ + ay^2 = Qy$
$\frac{1}{PM^2} + \frac{1}{PN^2} = \frac{1}{a^2}$	$a^2y^2 + a^2(P - y)^2 = y^2(P - y)^2$ 或 $a^2Q^2 + a^2y^4 = Q^2y^2$
$\frac{1}{PM^3} + \frac{1}{PN^3} = \frac{1}{a^3}$	$a^3y^3 + a^3(P - y)^3 = y^2(P - y)^3$ 或 $a^3Q^3 + a^3y^6 = Q^3y^2$

等等.

对分数指数

要求	结果方程
$\sqrt{PM}+\sqrt{PN}=\sqrt{a}$	$\sqrt{y}+\sqrt{P-y}=\sqrt{a}$或$y=\sqrt{ay}+\sqrt{Q}$, 化为有理形式,为 $y^2-Py+\frac{1}{4}(a-P)^2=0$ 或 $y^2-(a-2\sqrt{Q})y+Q=0$
$\sqrt[3]{PM}+\sqrt[3]{PN}=\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{P-y}=\sqrt[3]{a}$ 或 $y^2-Py+\frac{1}{27a}(a-P)^3=0$ 或$\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{\frac{Q}{y}}=\sqrt[3]{a}$ 或 $y^2-(a-3\sqrt[3]{aQ})y+Q=0$

等等.

可见,照上面的方法,用一个通用方程可以包含所有满足

$$PM^n + PN^n = a^n$$

的代数曲线. n 可为正整数,可为负整数,可为分数.

§ 374

前面考虑的是一个横标值对应两个纵标值的曲线.现在我们考虑一个横标值对应三个纵标值的曲线.这种曲线的通用方程为

$$y^3 - Py^3 + Qy - R = 0,$$

其中 P,Q 和 R 都是 x 的某个单值函数.设对应于同一个横标 x 的三个纵标值为 p,q,r.当然其中必定有一个是实的,但我们这里主要考虑曲线上这三个纵标都为实数的部分.从方程的性质我们有

$$P = p + q + r, Q = pq + pr + qr, R = pqr.$$

因而如果要曲线满足 $p+q+r$,或 $pq+pr+qr$,或 pqr 为常数,那么要做的就是取 P,或 Q,或 R 为常数,而保留其余两个为任意.

§ 375

我们也可以求出 $p^n+q^n+r^n$ 处处为常数的曲线.上册给了

$$p+q+r=P,$$
$$p^2+q^2+r^2=P^2-2Q,$$
$$p^3+q^3+r^3=P^3-3PQ+3R,$$
$$P^4+Q^4+r^4=P^4-4P^2Q+2Q^2+4PR,$$
$$P^5+q^5+r^5=P^5-5P^3Q+5PQ+5P^5R-5QR$$

等等.如果 n 为负数,我们置 $z=\frac{1}{y}$,则方程化为

$$z^3-\frac{Qz^2}{R}+\frac{Pz}{R}-\frac{1}{R}=0,$$

它的三个根为$\frac{1}{p}$,$\frac{1}{q}$,$\frac{1}{r}$.此时我们有

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{Q}{R},$$
$$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{Q^2-2PR}{R^2},$$
$$\frac{1}{P^3}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{r^3}=\frac{Q^3-3PQR+3R^2}{R^3},$$
$$\frac{1}{P^4}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{r^4}=\frac{Q^4-4PQ^2R+4QR^2+2P^2R^2}{R^4},$$

等等.

每令一个这种表达式为常数,我们就得到函数 P,Q,R 之间的一个关系.利用这个关系,我们可以消去方程 $y^3-Py^2+Qy-R=0$ 里函数 P,Q,R 中的一个,得到所求曲线的方程.例如,求满足 $p^3+q^3+r^3=a^3$ 的曲线,得关系 $P^5-3PQ+3R=a^3$,将 $R=y^3$

$-Py^2+Qy$ 代入,得所求曲线的方程为

$$3y^3-3Py^2+3Qy+P^3-3PQ=a^3.$$

§ 376

当 n 为正整数和负整数时,利用所给公式,问题都容易解决.主要困难在 n 为分数的时候.假定我们求满足

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=\sqrt{a}$$

的曲线.该等式两边平方,利用 $p+q+r=P$,得

$$P+2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}=a$$

或

$$\frac{a-p}{2}=\sqrt{pq}+\sqrt{pr}+\sqrt{qr}.$$

该等式两边再平方,利用 $pq+pr+qr=Q$,得

$$\frac{(a-p)^2}{4}=Q+2\sqrt{p^2qr}+2\sqrt{pq^2r}+2\sqrt{pqr^2}=$$

$$=Q+2(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})\sqrt{pqr}=2\sqrt{aR}+Q,$$

由此得

$$(a-P)^2=4Q+8\sqrt{aR},$$

也即

$$Q=\frac{(a-P)^2}{4}-2\sqrt{aR}.$$

因而所求曲线的方程为

$$y^3-Py^2+\left(\frac{1}{4}(a-P)^2-2\sqrt{aR}\right)y-R=0,$$

有理化,并利用

$$R=\frac{(a^2-2aP+P^2-4Q)^2}{64a},$$

则所得方程成为

$$y^3 - Py^2 + Qy - \frac{(a^2 - 2aP + P^2 - 4Q)^2}{64a} = 0.$$

§ 377

但对更高次的根，这过程极为繁难. 我们来寻求另外的方法，这可以从下面的例子中得到启发. 假定我们求满足

$$\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{a}$$

的曲线. 令

$$\sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{pr} + \sqrt[3]{qr} = v$$

利用$\sqrt[3]{pqr} = \sqrt[3]{R}$，得

$$\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} + \sqrt[3]{r^2} = \sqrt[3]{a^2} - 2v$$

和

$$p + q + r = a - 3v\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{R} = P.$$

因而

$$\sqrt[3]{p^2q^2} + \sqrt[3]{p^2r^2} + \sqrt[3]{q^2r^2} = v^2 - 2\sqrt[3]{aR}$$

和

$$pq + pr + qr = Q = v^3 - 3v\sqrt[3]{aR} + 3\sqrt{R^2}.$$

求出了 P 和 Q 的表达式之后，取 v 为 x 的某个函数，我们就得到所求曲线的方程

$$y^3 - (a - 3v\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{R})y^2 + (v^3 - 3v\sqrt[3]{aR} + 3\sqrt[3]{R^2})y - R = 0.$$

§ 378

尽管繁难，但是可以得到问题的通用解. 事实上，方程 $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ 中的函数 y 表示三个纵标 p, q 和 r. 令 $p = y$，则

$$P = y + q + r, Q = qy + ry + qr,$$

或

$$q+r=P-y, qr=Q-y(q+r)=Q-Py+y^2.$$

由此得

$$q-r=\sqrt{P^2+2Py-3y^2-4Q},$$

从而

$$q=\frac{1}{2}(P-y)+\frac{1}{2}\sqrt{P^2+2Py-3y^2-4Q},$$

$$r=\frac{1}{2}(P-y)-\frac{1}{2}\sqrt{P^2+2Py-3y^2-4Q}.$$

因而满足 $p^n+q^n+r^n=a^n$ 的曲线，其方程为

$$y^n+\left[\frac{1}{2}(P-y)+\frac{1}{2}\sqrt{p^2+2Py-3y^2-4Q}\right]^n+$$

$$+\left[\frac{1}{2}(P-y)-\frac{1}{2}\sqrt{P^2+2Py-3y^2-4Q}\right]^n=a^n,$$

该方程把 n 为整数和分数的问题都解决了.

§ 379

利用这同一种方法可以解决有关三个纵标的大量的其他问题. 例如，可以换 a^n 为 x 的某个函数，也可以换 p,q,r 的幂的和为 p,q,r 的别的函数，但这里要求 p,q,r 的地位相同，即函数不因 p,q,r 的位置交换而改变. 比如，可以要求对应于同一个纵标 x 的这三个纵标 p,q,r 构成的三角形面积为常数. 该三角形的面积为

$$\frac{1}{4}\sqrt{2p^2q^2+2p^2r^2+2q^2r^2-p^4-q^4-r^4},$$

我们令它等于 a^2. 由于

$$p^4+q^4+r^4=P^4-4P^2Q+4PR+2Q^2,$$

$$p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2=Q^2-2PR,$$

我们有

$$16a^4 = 4P^2Q - 8PR - P^4,$$

从而

$$R = \frac{1}{2}PQ - \frac{1}{8}P^3 - \frac{2a^4}{p},$$

得所求方程为

$$y^3 - Py^2 + Qy - \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{8}P^3 + \frac{2a^4}{p} = 0.$$

如果取 P 为常数 $2b$,我们就还得到这些三角形的周长为常数.再取 $Q = mx^2 + nbx + ka^2$,得表示三阶线的方程

$$y^3 + mx^2y - 2by^2 + nbxy - mbx^2 + ka^2y - nb^2x + \frac{a^4}{b} - ka^2b + b^3 = 0.$$

这三阶线具有这样两条性质,一是对应于同一个横标 x 的三个纵标 p,q,r,和为常数,等于 $2b$,二是以这三个纵标为边的三角,面积为常数,等于 a^2.

§ 380

对应于同一横标的四个或更多个纵标的类似问题,也可以用同样的方法处理,不产生新的困难,因此我们转向另外的问题.转向考虑对应于不同横标的纵标之间的关系.参见图 80,设纵标 PM 和 QN 有着某种关系,PM 和 QN 对应的横标分别为 $AP = x$ 和 $AQ = -x$.又设 $y = X$ 是这条曲线的方程,X 是 x 的一个函数,对 x 它给出纵标 PM,对 $-x$ 它给出纵标 QN.如果 X 是 x 的偶函数,记为 P,则 $QN = PM$;如果 X 是 x 的奇函数,记为 Q,则 $QN = -PM$;如果 P 和 R 是 x 的偶函数,Q 和 S 是 x 的奇函数,又如果曲线的方程为 $y = \dfrac{P+Q}{R+S}$,则

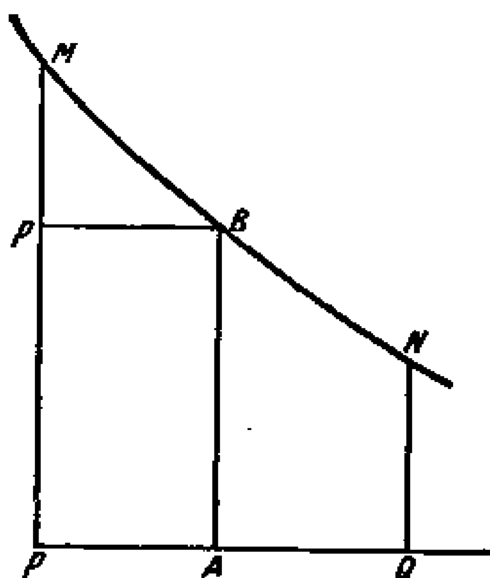


图 80

$$PM=\frac{P+Q}{R+S},QN=\frac{R-Q}{R-S}.$$

§ 381

我们求一条曲线,具有性质 $PM+QN$ 等于常数,等于 $2AB=2a$.显然 Q 为奇函数时,方程 $y=a+Q$ 满足要求.此时我们有 $PM=a+Q,QN=a-Q,PM+QN=2a$.令 $y-a=u$,即 $u=Q$.这是曲线 $y=a+Q$ 在直线 Bp 为轴,B 为原点之下对坐标 $Bp=x$,$pM=u$ 的方程.该曲线以点 B 为中心,位于对顶象限中的两部分相等.照下面这样画出的曲线 MBN 都满足我们的要求.取一条直线 PQ 作轴,从中心 B 向轴引垂线 BA,对 A 两边长度相等的横标 $AP=AQ$,使 $PM+QN$ 恒为常数,等于 $2AB$.

§ 382

以 B 点为中心对称的曲线,前面我们求出了它的在坐标 x,u 之下的两个方程

I

$$0=\alpha x+\beta u+\gamma x^3+\delta x^2u+\varepsilon xu^2+\zeta u^3+\eta x^5+\theta x^4u+\cdots,$$

II

$$0=\alpha+\beta x^2+\gamma xu+\delta u^2+\varepsilon x^4+\zeta x^3u+\eta x^2u^2+\theta xu^3+\cdots.$$

令这两个方程中的 $u=y-a$,我们得到 x,y 间的两个通用方程,它们表示的代数曲线都满足我们的要求.首先过 B 的任何一条直线都满足要求.其次,以 B 为中心的圆锥曲线也都合乎条件.此时横标 AP,AQ 都对应两个纵标(曲线为双曲线时取纵标线平行于另一条渐近线),我们有和相等的两对纵标.

§ 383

将纵标 PM,QN 之和换为同次幂的和,求法也类似.记这条件为 $PM^n+QM^n=2a^n$.显然,只要 Q 为 x 的一个奇函数,方程 $y^n=a^n+Q$ 就满足要求.因为

$$PM^n=a^n+Q \text{ 时 } QN^n=a^n-Q,$$

从而 $PM^n+QN^n=2a^n$.令 $y^n-a^n=u$,令 $u=Q$,就把以 B 为中心对称的曲线用坐标 x 和 u 表示了出来.换上节方程中的 u 为 y^n-a^n 就得到满足所提条件的曲线的通用方程.

§ 384

这类问题不产生什么困难,我们转向求这样的曲线 MBN,使

轴上与点 A 等距处的横标 AP 和 AQ 所对应的纵标 PM 和 QN 的乘积 $PM\cdot QN$ 为常数,设为 a^2. 这个问题有很多特殊的解,讨论通用解之前,先给出一个最重要的特殊解. 设 P 和 Q 分别为横标 $AP=x$ 的偶函数和奇函数,令纵标 $PM=y=P+Q$,则 x 为负时得 $QN=P-Q$. 依要求应该有

$$PM\cdot QN=P^2-Q^2=a^2 \text{ 或 } P=\sqrt{a^2+Q^2},$$

Q^2 是 x 的偶函数,因而$\sqrt{a^2+Q^2}$是偶函数,可作为 P,因而 $y=Q+\sqrt{a^2+Q^2}$是所求曲线的方程,Q 是一个奇函数.

§ 385

根号有两值,因而每个横标 x 都对应两个纵标,一正一负. 横标 AP 对应纵标

$$Q+\sqrt{a^2+Q^2} \text{和 } Q-\sqrt{a^2+Q^2},$$

横标 AQ 对应纵标

$$-Q+\sqrt{a^2+Q^2}\text{和 }-Q-\sqrt{a^2+Q^2},$$

可见曲线以 A 点为中心对称. 根号不能只取一种符号. 例如,取$\frac{a^2}{4x}-x$ 作奇函数 Q,则 a^2+Q^2 是完全平方,得到$\sqrt{a^2+Q^2}=\frac{a^2}{4x}+x$,是奇函数,不能作 P,P 应为偶函数. 我们取的奇函数 Q,必须使 a^2+Q^2 不是完全平方.

§ 386

类似地,如果令 $y=(P+Q)^n$,则 $QN=(P-Q)^n$,应该$(P^2-Q^2)^n=a^2$. 从而

$$P^2 = a^{\frac{2}{n}} + Q^2, P = \sqrt{a^{\frac{2}{n}} + Q^2},$$

只要它是无理的，就为偶函数．此时满足要求的曲线，其方程为

$$y = \left(Q + \sqrt{a^{\frac{2}{n}} + Q^2}\right)^n.$$

易于列出这样的曲线的方程．画一条曲线，它有以 A 为中心对称，也即有相似且相等的两段．记该曲线对应于横标 $AP = x$ 的纵标为 z，则 z 是 x 的奇函数，因而可以作为我们的 Q．从求得的方程得

$$y^{\frac{1}{n}} - Q = \sqrt{a^{\frac{2}{n}} + Q^2},$$

从而

$$Q = z = \frac{y^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{2}{n}}}{2y^{\frac{1}{n}}}$$

令$\frac{1}{n} = m$，代 $z = \frac{y^{2m} - a^{2m}}{2y^m}$入 z, x 间的给定方程，就得到所求曲线的 x, y 间方程．我们求出了 z, x 间的两个方程

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma xz + \delta z^2 + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 z + \eta x^2 z^2 + \theta xz^3 + \cdots$$

和

$$0 = \alpha x + \beta z + \gamma x^3 + \delta x^2 z + \varepsilon xz^2 + \zeta z^3 + \eta x^5 + \theta x^4 z + \cdots.$$

由 z 的任何倍数都可作 Q，我们略去除数 2，将 $z = y^m - \frac{a^{2m}}{y^m}$代入这两个方程，就得到符合条件的曲线的两个通用方程．

§ 387

设 R 同于 P 也是偶函数，S 同于 Q 也是奇函数，又设所求曲线的方程为

$$y = \frac{P + Q}{R + S} = PM,$$

则 $QN = \frac{P - Q}{R - S}$，应 $\frac{P^2 - Q^2}{R^2 - S^2} = a^2$．取 $y = \frac{P + Q}{R - S}a$，或者取 $y =$

$\left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^n a$ 都易于满足这条件.这取法可避免原来的每个横标对应两个或更多个纵标的不便,求出每个横标只对应一个纵标的曲线.满足这条件的最简单的线是方程 $y=\frac{b+x}{b-x}$表示的二阶线,这是双曲线.又,令 $Q=nx$,代入前面求得的方程 $y=Q+\sqrt{a^2+Q^2}$,得 $y^2-2nxy=a^2$,是双曲线.两种方法都得到双曲线是我们的问题的解.

§ 388

从前面所讲可见,换 x 为 $-x$,换 y 为$\frac{a^2}{y}$时所求曲线的方程应该不变.表达式

$$\left(y^n+\frac{a^{2n}}{y^n}\right)P \text{ 和} \left(y^n-\frac{a^{2n}}{y^n}\right)Q$$

都具有这种性质,其中 P 和 Q 分别为 x 的偶函数和奇函数.用任何多个这种表达式构成的方程,它们表示的曲线都满足要求.因而,如果 $M,P,R,T,\cdots$为 x 的任何偶函数,$N,Q,S,V,\cdots$为 x 的任何奇函数,那么我们有通用方程

$$0=M+\left(\frac{y}{a}+\frac{a}{y}\right)P+\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{a^2}{y^2}\right)R+\left(\frac{y^3}{a^3}+\frac{a^3}{y^3}\right)T+\cdots$$
$$+\left(\frac{y}{a}-\frac{a}{y}\right)Q+\left(\frac{y^2}{a^2}-\frac{a^2}{y^2}\right)S+\left(\frac{y^3}{a^3}-\frac{a^3}{y^3}\right)V+\cdots.$$

如果乘这通用方程以 x 的奇函数,则偶函数变奇函数,奇函数变偶函数,因而下面这样的方程也满足要求

$$0=N+\left(\frac{y}{a}+\frac{a}{y}\right)Q+\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{a^2}{y^2}\right)S+\left(\frac{y^3}{a^3}+\frac{a^3}{y^3}\right)V+\cdots$$
$$+\left(\frac{y}{a}-\frac{a}{y}\right)P+\left(\frac{y^2}{a^2}-\frac{a^2}{y^2}\right)R+\left(\frac{y^3}{a^3}-\frac{a^3}{y^3}\right)T+\cdots.$$

去分母,得下面两个 n 阶有理方程,n 不确定

Ⅰ

$$0 = a^n y^n M + a^{n-1}y^{n+1}(P+Q) + a^{n-2}y^{n+2}(R+S) + a^{n-3}y^{n+3}(T+V) + \cdots$$
$$+ a^{n+1}y^{n-1}(P-Q) + a^{n+2}y^{n-2}(R-S) + a^{n+3}y^{n-3}(T-V) + \cdots$$

Ⅱ

$$0 = a^n y^n N + a^{n-1}y^{n+1}(P+Q) + a^{n-2}y^{n+2}(R+S) + a^{n-3}y^{n+3}(T+V) + \cdots$$
$$- a^{n+1}y^{n-1}(P-Q) - a^{n+2}y^{n-2}(R-S) - a^{n+3}y^{n-3}(T-V) - \cdots.$$

§ 389

表达式

$$\left(y^n + \frac{a^{2n}}{y^n}\right)P \text{ 和} \left(y^n - \frac{a^{2n}}{y^n}\right)Q$$

中的 n 可以为分数.特别地将前节未去分母公式中的指数 1,2,3,4,…依次换为 $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2}$,…时得到的通用方程,其无理性可消去.事实上,此时我们有方程

$$0 = \frac{y+a}{\sqrt{ay}}P + \frac{y^3+a^3}{ay\sqrt{ay}}R + \frac{y^5+a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}}T + \cdots$$
$$+ \frac{y-a}{\sqrt{ay}}Q + \frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}}S + \frac{y^5-a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}}V + \cdots$$

或

$$0 = +\frac{y+a}{\sqrt{ay}}Q + \frac{y^3+a^3}{ay\sqrt{ay}}S + \frac{y^5+a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}}V + \cdots$$
$$+ \frac{y-a}{\sqrt{ay}}P + \frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}}R + \frac{y^5-a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}}T + \cdots$$

去分母,得

Ⅲ

$$0 = +a^n y^{n+1}(P+Q) + a^{n-1}y^{n+2}(R+S) + a^{n-2}y^{n+3}(T+V) + \cdots$$
$$+ a^{n+1}y^n(P-Q) + a^{n+2}y^{n-1}(R-S) + a^{n+3}y^{n-2}(T-V) + \cdots.$$

Ⅳ

$$0 = +a^n y^{n+1}(P+Q) + a^{n-1}y^{n+2}(R+S) + a^{n-2}y^{n+3}(T+V) + \cdots$$
$$- a^{n+1}y^n(P-Q) - a^{n+2}y^{n-1}(R-S) - a^{n+3}y^{n-2}(T-V) - \cdots.$$

§ 390

前面导出了四个方程,从每阶方程都可求出满足要求的线.首先,从一阶方程得过点 B 平行于轴 AP 的直线.对二阶,$n=1$ 时从前两个方程得 $\alpha axy + y^2 - a^2 = 0$,这是令 $N = \alpha x$,$P = 1$,$Q = 0$ 时从第二个方程得到的,第一个方程不给出任何曲线;$n = 0$ 时从后两个方程得到

$$y(\alpha + \beta x) \pm a(\alpha - \beta x) = 0.$$

对三阶,从前两个方程,$n = 1$ 时得

$$0 = \alpha y(\alpha + \beta x^2) + y^2(\gamma + \delta x) + a^2(\gamma - \delta x)$$

和

$$0 = \alpha ayx + y^2(\gamma + \delta x) - a^2(\gamma - \delta x),$$

从后两个方程,$n = 0$ 和 $n = 1$ 时得

$$0 = y(\alpha + \beta x + \gamma x^2) \pm (\alpha - \delta x + \gamma x^2)$$

和

$$0 = ay^2(\alpha + \beta x) + y^3 \pm a^2 y(\alpha - \beta x) \pm a^3.$$

类似地,可以求出满足要求的各阶线.

第十七章

依据其他性质求曲线

§ 391

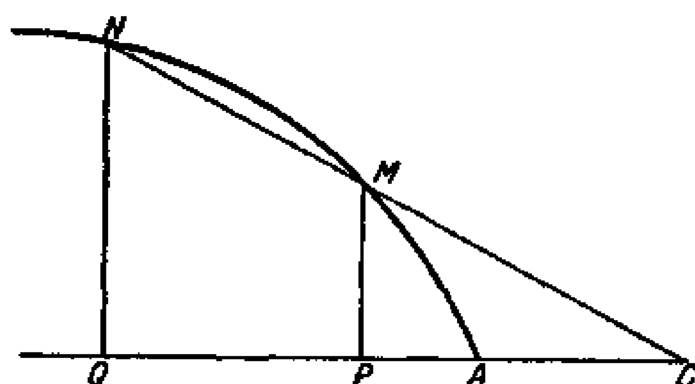


图 81

前章依纵标性质求曲线的直角或斜角坐标间方程. 本章求曲线方程, 不直接依据平行纵标, 而是依据其他性质. 例如, 依据从一点向曲线所引直线的性质. 参见图 81, 设这一点为 C, 从它向曲线引直线 CM 和 CA, 使这两条直线具有某种性质, 我们就依这两条直线的性质来求曲线的方程.

§ 392

用二元方程表示曲线的方法有很多种.这里我们取从给定点 C 到曲线的直线 CM 的长作为一个变元,当然另一个变元应能确定直线 CM 的位置.为此我们取过 C 点的一条直线 CA 作轴,取角 ACM 或这个角的某个函数作另一个变元.记直线 $CM=z$,记角 $ACM=\varphi$,使方程含有 φ 的正弦或正切.显然,如果有了 z 与 $\sin\varphi$ 或 $\mathrm{tg}\varphi$ 之间的方程,曲线 AMN 也就完全确定,因为对任何一个角 ACM 我们都有直线 CM 的长,因而也就决定曲线上一点.

§ 393

我们对曲线的这一表示方法做更详细些的考察.先设长度 z 等于角 φ 的正弦的某个函数.如果这个函数是单值的,则指明直线 CM 与曲线只交于一点,因为角 $ACM=\varphi$ 对应直线 CM 的唯一的值.但是如果角 φ 增加两个直角,则过点 C 的直线 CM 位置不变,只是方向相反.这样,虽然 z 是角 φ 的正弦的单值函数,但我们得到了直线 CM 与曲线的另一个交点.

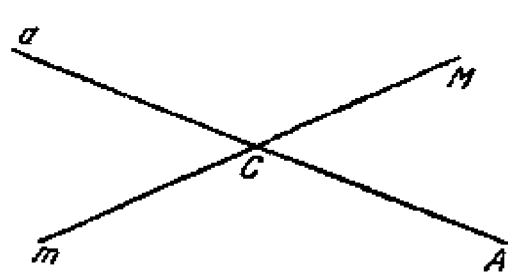


图 82

假设 P 是角 φ 的正弦的这样的函数,即 $z=P$,并由它得到了曲线上的点 M,如图 82 所示.现在我们使角 φ 增加两个直角,也即这个角的正弦变负,从而 P 变为 Q,得 $z=Q$.取 $Cm=Q$,得 CM 的延长线与曲线的另一个交点 m.

§ 394

这样,虽然 P 是角 φ 的正弦的单值函数,但是只要 $Q \neq -P$,过点 C、倾角 $ACM = \varphi$ 的直线 CM 就交曲线于 M 和 m 两点.因而,如果每条直线 CM 与曲线都只交于一点,则必函数 P 为 $\sin\varphi$ 的奇函数,为 $\cos\varphi$ 的奇函数也可以.也即,P 为角 $ACM = \varphi$ 的正弦或余弦的奇函数时,曲线 $z = P$ 与过 C 点的每条直线都只交于一点.

§ 395

与过点 C 的直线都只相交于一点的曲线,其方程为 $z = P$,P 为角 φ 的正弦和余弦的奇函数,也即这函数 P,当角 φ 的正弦和余弦的值都反号时,函数值也反号.这种曲线的直角坐标方程易于求出.参见图 81,如果自点 M 向轴 CA 引垂线 MP,又如果取 $CP = x$,$PM = y$,则 $\frac{y}{z} = \sin\varphi$,$\frac{x}{z} = \cos\varphi$,因而,如果 P 是 $\frac{x}{z}$ 和 $\frac{y}{z}$ 的奇函数,方程 $z = P$ 就包含满足要求的所有曲线.这种方程中最简单的是

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y},$$

更高次数的为

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y} + \frac{\varepsilon x^3}{z^3} + \frac{\xi x^2 y}{z^3} + \frac{\eta x y^2}{z^3} + \frac{\theta y^3}{z^3} + \frac{\iota x^2}{yz} + \frac{\kappa y^2}{xz} + \frac{\lambda yz}{x^2} + \cdots.$$

§ 396

除该方程以 z,则方程中 z 的次数全为偶数,而 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,因而换 z^2 为 x^2+y^2,消去 z 得到的是 x,y 间的有理方程.这有理方程是 x,y 的 -1 次函数,等于 1 或等于一个常数 C.设 P 为这样的函数,即 $c=P$,从而$\frac{1}{c}=\frac{1}{p}$,但$\frac{1}{p}$为 x,y 的一次函数.这样我们得到,如果 x,y 的一个一次函数等于常数,那么这个方程表示的曲线与过 C 点的直线就只有一个交点.

§ 397

设 P 和 Q 分别为 x,y 的 n 次和 $n+1$ 次函数,则$\frac{Q}{P}$为一次函数.这样,我们这里讨论的曲线就都含于方程$\frac{Q}{P}=c$ 或 $Q=cP$ 之中.也即我们的曲线,其通用方程为

$$\alpha x^{n+1}+\beta x^n y+\gamma x^{n-1}y^2+\delta x^{n-2}y^3+\varepsilon x^{n-3}y^4+\cdots=$$
$$=c(Ax^n+Bx^{n-1}y+Cx^{n-2}y^2+Dx^{n-3}y^3+\cdots),$$

n 为任何数.由此得与过点 C 的直线只有一个交点的各阶线,其方程依次为

Ⅰ

$$\alpha x+\beta y=c$$

Ⅱ

$$\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2=c(Ax+By)$$

Ⅲ

$$\alpha x^3+\beta x^2y+\gamma xy^2+\delta y^3=c(Ax^2+Bxy+Cy^2)$$

Ⅳ

$$\alpha x^4 + \beta x^3 y + \gamma x^2 y^2 + \delta x y^3 + \varepsilon y^4 = c(Ax^3 + Bx^2 y + Cxy^2 + Dy^2)$$

等等.

§ 398

Ⅰ是直线通用方程,直线与过给定点的直线最多都只有一个交点.Ⅱ是圆锥曲线通用方程.圆锥曲线通过点 C 时,这点 C 是通过点 C 的所有直线与圆锥曲线的共同交点,因而不作为交点计算.圆锥曲线与直线的交点不多于两个,所以过圆锥曲线上点 C 的直线与圆曲线的交点不多于一个.类似地,过点 C 的更高阶曲线与过点 C 的所有直线也都以 C 为共同交点,我们也不把它作为交点计算,因而上节方程所表示的曲线与过自身的点 C 的直线的交点都不多于一个.这样我们就列出了与过点 C 的直线的交点不多于一个的所有代数曲线的方程.

§ 399

下面我们考虑与过点 C 的直线或者有两个交点或者没有交点的曲线,没有交点时,决定交点的方程的根为虚数.由于对任何一个角 $ACM = \varphi$ 直线 $CM = z$ 都应该有两个值,所以它由二次方程确定.设

$$z^2 - Pz + Q = 0,$$

P, Q 是角 φ,或者角 φ 的正弦或余弦的函数.直线 CM 与曲线应该只相交于两点,为 M 和 N,所以不只 P, Q 应该是角 φ 的单值函数,并且角 φ 增加两个直角时也不应该得到任何新的交点.事情将是这样的,如果 P 是角 φ 的正弦和余弦的奇函数,也即让正弦和余弦取负值,则 P 也取负值,且此时 Q 应该是同一正弦和余弦的偶函数.

§ 400

记直角坐标 $CP = x, PM = y$,则

$$\frac{y}{z} = \sin\varphi, \qquad \frac{x}{z} = \cos\varphi,$$

因而 P 是$\frac{x}{z}$和$\frac{y}{z}$的奇函数,Q 是$\frac{x}{z}$和$\frac{y}{z}$的偶函数.由此得$\frac{P}{z}$是 x, y 的有理函数,是 -1 次齐次函数.类似地,$\frac{Q}{Z^2}$是 x, y 的有理函数,是 -2 次齐次函数.因而,如果 L, M, N 依次是 x, y 的 $n+2$ 次,$n+1$ 次和 n 次齐次函数,则分数$\frac{M}{L}$和$\frac{N}{L}$分别可代替$\frac{P}{z}$和$\frac{Q}{z^2}$.由 $z^2 - Pz + Q = 0$ 得 $1 - \frac{P}{z} + \frac{Q}{z^2} = 0$,从而与过点 C 的直线交于两点的直线,其通用方程为

$$1 - \frac{M}{L} + \frac{N}{L} = 0 \text{ 或 } L - M + N = 0,$$

其中

$$P = \frac{Mz}{L}, \qquad Q = \frac{Nz^2}{L} = \frac{N(x^2+y^2)}{L},$$

由 $z = \sqrt{x^2+y^2}$知,P 是 x, y 的无理函数,Q 是零次有理函数.

§ 401

现在容易求出与过给定点 C 的直线有两个交点或没有交点的任何阶线.例如,求二阶线,此时应置 $n = 0$,得圆锥曲线的通用方程

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 - \delta x - \varepsilon y + \zeta = 0.$$

因而过任何一点 C 的任何一条直线与圆锥曲线都或者有两个交

点，或者没有交点．然而有这样的情形，某条直线与这曲线只交于一点，但在过点 C 的无穷多条直线中这样的直线只有一条或两条，所以这种例外无关紧要．也可以把这种例外解释为另一个交点在无穷远处，这样这例外就完全不影响我们结论的普遍性．

§ 402

为了弄清这种例外究竟什么时候发生，我们化 x 和 y 间的方程为 z 和角 $ACM=\varphi$ 间方程．由于 $y=z\sin\varphi$ 和 $x=z\cos\varphi$，x 和 y 间的方程化为

$$z^2(\alpha(\cos\varphi)^2+\beta\sin\varphi\cos\varphi+\gamma(\sin\varphi)^2)-z(\delta\cos\varphi+\varepsilon\sin\varphi)+\zeta=0.$$

由此可见，z^2 的系数等于零时就只有一个交点．

$$\alpha+\beta\mathrm{tg}\varphi+\gamma\mathrm{tg}^2\varphi=0$$

时 z^2 的系数为零．如果该方程有两个实根，则这曲线与两条过 C 点的直线只有一个交点．但该方程的根决定我们曲线的渐近线．可见，双曲线与平行于渐近线的直线只交于一点，过 C 点的这样的直线只有两条．在抛物线时只有一根平行于其轴的直线是这种例外．但是如果圆锥曲线是椭圆，那么过任何一点的任何一条直线就都或者与椭圆不相交，或者只交于一点．

§ 403

置 $n=1$，得满足要求的三阶线的通用方程

$$\alpha x^3+\beta x^2y+\gamma xy^2+\delta y^3+\varepsilon x^2+\zeta xy-\eta y^2+\theta x+\iota y=0.$$

该方程包含的每一条三阶线，只要点 C 在它上面，它就满足要求．如果 $x=0$，则 $y=0$．类似地，满足要求的四阶线，点 C 不仅要在四阶线上，还必须是四阶线的二重点．也即，有二重点的四阶线，取二

重点为 C 时就满足要求. 但是如果点 C 是四阶线的三重点, 那么过它的直线与四阶线的交点就只有一个. 这属于开始时考虑过的那类曲线. 同样地, 如果 C 是三重点, 五阶线也可满足要求, 类推. 但要记住, 如果过点 C 的直线平行于渐近直线, 或平行于抛物渐近线的轴, 则都将只有一个交点, 另一个交点在无穷远处.

§ 404

各阶线与直线的交点的个数(包括虚交点和无穷远交点)都等于阶数. 我们前面所讲跟这条性质是相符合的. n 阶线与过点 C 的直线的交点个数, 包括实交点、虚交点、无穷远交点和 C 点本身, 总数也是 n. 因而 n 阶线与过 C 点的直线在 C 点之外的交点个数为 2, 则必 C 点为 $n-2$ 重点.

§ 405

有了以上结果, 对于 z 的两个值 CM, CN 之间的关系问题, 我们就容易或者给出解答, 或者证明给不出解答. 由于 z 的两个值 CM 和 CN 是方程 $z^2 - Pz + Q = 0$ 的两个根, 所以它们的和 $CM + CN = P$, 积 $CM \cdot CN = Q$. 首先, 我们求和 $CM + CN$ 为常数的曲线, 此时函数 P 应该为常数. 从与过点 C 的直线交于两点的曲线的讨论我们有

$$P = \frac{Mz}{L} = \frac{M\sqrt{x^2 + y^2}}{L},$$

(见 § 400). 该表达式中含有无理量, 不能是常数, 因而在我们的曲线中没有 $CM + CN$ 恒为常数的.

§ 406

但是如果把与过点 C 的直线只交于两点的曲线，换成与过点 C 的直线的交点多于两个的曲线，要求这交点中恒有满足 $CM+CN$ 为常数的 M 和 N 这样两个点．这样的曲线有无穷多．令 P 等于所说的常数 $CM+CN=a$，则 $z^2-az+Q=0$，Q 为函数$\frac{Nz^2}{L}$．该方程中含有无理量，有理化，得

$$a^2z^2=(z^2+Q)^2, \text{或 } a^2=z^2\left(1+\frac{N}{L}\right)^2,$$

或

$$a^2L^2=(x^2+y^2)(L^2+2LN+N^2),$$

其中 L 为 x 和 y 的 $n+2$ 次齐次函数，N 为 x 和 y 的 n 次齐次函数．令

$$L=x^2+y^2, \qquad N=\pm b^2,$$

代入得

$$a^2(x^2+y^2)=(x^2+y^2\pm b^2)^2,$$

它表示的是满足要求的最简单的曲线，是以 C 为圆心的两个同心圆，是四阶复合线．令

$$L=\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2, \qquad N=\pm b^2,$$

得

$$a^2(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)^2=(x^2+y^2)(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2\pm b^2)^2,$$

它表示的是六阶线，是满足要求的最简单的连续线．令 $\alpha=1,\beta=0,\gamma=0$，得

$$y^2+x^2=\frac{a^2x^4}{x^4\pm 2b^2x^2+b^4}$$

或

$$y=\frac{x\sqrt{a^2x^2-x^4\mp 2b^2x^2-b^4}}{x^2\pm b^2}.$$

§ 407

如果从满足要求的曲线中,把与过 C 点的直线的交点多于两个的曲线去掉,那就没有满足要求的曲线. 也即没有这样的连续曲线,过 C 点的直线与它只相交于两点 M 和 N,且 $CM+CN$ 为常数. 但是,如果我们改为要求 $CM\cdot CN$ 为常数,那么一个显然的解是圆,圆心位置任意. 具有这种性质的曲线有无穷多. 这时的 Q 应该为常数,它应该等于 $CM\cdot CN$,记为 a^2. $Q=\frac{Nz^2}{L}$是 x 和 y 的有理函数,不矛盾.

§ 408

令$\frac{Nz^2}{L}=a^2$ 或 $L=\frac{Nz^2}{a^2}=\frac{N(x^2+y^2)}{a^2}$,则满足要求的曲线的方程为

$$\frac{N(x^2+y^2)}{a^2}-M+N=0 \text{ 或 } Ma^2=N(x^2+y^2+a^2),$$

其中 M 和 N 都是 x 和 y 的齐次函数,次数为 $n+1$ 和 n. 由此得

$$\frac{M}{N}=\frac{x^2+y^2+a^2}{a^2}$$

为 x 和 y 的一次函数. 这是与过点 C 的直线只相交于两点 M 和 N,且乘积 $CM\cdot CN$ 恒为常数 a^2 这样的曲线的通用方程.

§ 409

由于$\frac{M}{N}$是 x 和 y 的一次齐次函数，所以最简情况是$\frac{M}{L}=\frac{\alpha x+\beta y}{a}$，由此得方程

$$x^2+y^2-a(\alpha x+\beta y)+a^2=0,$$

这是圆的方程，是直角坐标下圆的通用方程. 显然对任何一点 C 它都满足要求. 这是从欧几里得的《原本》中，也即从初等几何中已经知道了的. 圆以外的圆锥曲线都不满足要求. 阶数更高的各阶曲线中都有满足这种要求的曲线. 因而这样的曲线有无穷多条. 满足这种要求的三阶线的通用方程为

$$\frac{\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2}{a(\delta x+\varepsilon y)}=\frac{x^2+y^2+a^2}{a^2}$$

或

$$(\delta x+\varepsilon y)(x^2+y^2)-a(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)+a^2(\delta x+\varepsilon y)=0.$$

类似地，阶数更高的各阶曲线中都有满足这种要求的曲线.

§ 410

现在我们求与过点 C 的直线相交于两点，且这两点到 C 的距离的平方和为常数，即 $CM^2+CN^2=2a^2$ 的曲线. 由 $CM+CN=P$ 和 $CM\cdot CN=Q$，得 $CM^2+CN^2=P^2-2Q$，因而应该有

$$P^2-2Q=2a^2 \text{ 或 } Q=\frac{P^2-2a^2}{2}.$$

由 $P=\frac{Mz}{L}$, $Q=\frac{Nz^2}{L}$，我们有$\frac{2Nz^2}{L}=\frac{M^2z^2}{L^2}-2a^2$. 从而 $N=\frac{M^2}{2L}-\frac{a^2L}{z^2}$，由于 L,M 和 N 依次为 x 和 y 的 $n+2$, $n+1$ 和 n 次函数，该

方程是没有问题的. 取 L 和 M 为这样的函数时得

$$N=\frac{M^2}{2L}-\frac{a^2L}{z^2},$$

由此得所求曲线的通用方程为

$$L-M+\frac{M^2}{2L}-\frac{a^2L}{z^2}=0$$

或

$$2L^2(x^2+y^2)-2LM(x^2+y^2)+M^2(x^2+y^2)-2a^2L^2=0.$$

$M=0$ 时该方程给出的是以 C 为圆心的圆. 显然它满足我们的要求.

§ 411

$n+1=0$ 时, M 为常数, 记为 $2b$; L 为一次函数, 记为 $L=\alpha x+\beta y$. 这样我们得到四阶方程

$$(\alpha x+\beta y)^2(x^2+y^2-a^2)-2b(\alpha x+\beta y)(x^2+y^2)+2b^2(x^2+y^2)=0.$$

令

$$L=x^2+y^2, M=2(\alpha x+\beta y)a,$$

代入通用方程, 再除以 $2x^2+2y^2$, 得四阶线的另一个方程

$$(x^2+y^2)^2-2a(\alpha x+\beta y)(x^2+y^2)+2a^2(\alpha x+\beta y)^2-a^2(x^2+y^2)=0.$$

只要该方程不被 x^2+y^2 除得尽, 换 M 为 $2M$, 它化为

$$L^2(x^2+y^2)-2LM(x^2+y^2)+2M^2(x^2+y^2)-a^2L^2=0,$$

这是 $2n+6$ 次方程. 也即对任何偶数阶我们都得到了满足要求的曲线的方程. 又, 如果 L 被 x^2+y^2 除得尽, 即 $L=(x^2+y^2)N$, 其中 N 为 x 和 y 的任何 n 次齐次函数, 我们得到另一个通用方程

$$N^2(x^2+y^2)^2-2MN(x^2+y^2)+2M^2-a^2N^2(x^2+y^2)=0,$$

阶数为 $2n+4$. 这样对每个为偶数的阶,我们都得到两个方程,它们表示的曲线都满足要求.对阶数 6 这两个方程为

$$(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)^2(x^2+y^2-a^2)-2a(\delta x+\varepsilon y)(x^2+y^2)$$
$$[\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2-a(\delta x+\varepsilon y)]=0$$

和

$$(\delta x+\varepsilon y)^2(x^2+y^2)(x^2+y^2-a^2)=$$
$$2a(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)((\delta x+\varepsilon y)(x^2+y^2)-a(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma y^2).$$

奇阶线都不满足这里的要求.

§ 412

把平方和 CM^2+CN^2 为常数改为

$$CM^2+CM\cdot CN+CN^2$$

或更一般地

$$CM^2+n\cdot CM\cdot CN+CN^2$$

为常数,曲线的求法类似.由于

$$CM^2+nCM\cdot CN+CN^2=P^2+(n-2)Q,$$

我们令 $P^2+(n-2)Q=a^2$,得 $Q=\dfrac{a^2-P^2}{n-2}$,该方程并不带来什么困难.由

$$P=\frac{Mz}{L},Q=\frac{Nz^2}{L},$$

得

$$\frac{M^2z^2}{L^2}+\frac{(n-2)Nz^2}{L}=a^2,$$

解出 N 得

$$N=\frac{a^2L}{(n-2)z^2}-\frac{M^2}{(n-2)L}.$$

由方程为 $L-M+N=0$ 的曲线满足 $CM^2+nCM\cdot CN+CN^2$ 为常

数，得

$$(n-2)L^2z^2-(n-2)LMz^2+a^2L^2-M^2z^2=0,$$

或者由 $z^2=x^2+y^2$ 得

$$a^2L^2+(x^2+y^2)[(n-2)L^2-(n-2)LM-M^2]=0,$$

其中 L 和 M 都是 x 和 y 的函数，次数分别为 $m+2$ 和 $m+1$. 令 N 为任何 m 次齐次函数，并令 $L=(x^2+y^2)N$，得另一个通用方程

$$a^2(x^2+y^2)N^2+(n-2)(x^2+y^2)N^2-(n-2)(x^2+y^2)MN-M^2=0.$$

§ 413

$n=2$ 时，条件成为 $(CM+CN)^2=a^2$，方程为

$$a^2L^2=(x^2+y^2)M^2, \text{或 } M^2=a^2(x^2+y^2)N^2.$$

这两个方程都是齐次的，因而都至少包含两个 $\alpha y=\beta x$ 状的方程. 如此，要满足要求，过点 C 的直线的条数也必须至少为 2. 即问题无解. $(CM+CN)^2=a^2$，也即 $CM+CN=a$，此时问题无解，这是我们前面已经指了出来的. 如果取 $n=-2$，则成了要求差的平方 $(CM-CN)^2$ 为常数，也即要求差 MN 本身为常数. 此时得到两个方程

$$a^2L^2=(x^2+y^2)(2L-M)^2$$

和

$$a^2(x^2+y^2)N^2=[2(x^2+y^2)N-M]^2.$$

$N=1, M=2bx$ 时得到最简单的解，这时方程为

$$a^2(x^2+y^2)=4(x^2+y^2-bx)^2,$$

或者令 $a^2=8c^2$，得

$$(x^2+y^2)^2=2(c^2+bx)(x^2+y^2)-b^2x^2.$$

从而

$$x^2+y^2=c^2+bx\pm c\sqrt{c^2+2bx},$$

进而

$$y=\sqrt{c^2+bx+x^2\pm c\sqrt{c^2+2bx}}.$$

§ 414

因而与过点 C 的直线交于两点 M 和 N，且 MN 恒为常数，这样的曲线有无穷多条. 显然以 C 为圆心的圆都满足这里的要求，线段 MN 为圆的直径. 圆是 $M=0$ 时从通用方程得到的. 继圆之后，满足要求的方程为

$$a^2(x^2+y^2)=4(x^2+y^2-bx)^2,$$

和

$$a^2x^2=(x^2+y^2)(2x-2b)^2.$$

的四阶线. 为便于考察这些曲线的形状，我们回到 z 和角 φ 之间的方程. 由于 $x^2+y^2=z^2, x=z\cos\varphi, y=z\sin\varphi$，再令 $a=2c$，则第一个方程化为

$$c^2z^2=(z^2-bz\cos\varphi)^2, \text{或 } b\cos\varphi\pm c=z,$$

第二个方程化为

$$c^2(\cos\varphi)^2=(z\cos\varphi-b)^2, \text{或 } z=\frac{b}{\cos\varphi}\pm c.$$

利用这两个表达式可以容易地得到这些曲线的形状.

§ 415

为画出方程 $z=b\cos\varphi\pm c$ 所表示的曲线(图 83,84,85)，引过点 C 的直线 ACB，于 ACB 上先取 $CD=b$，再在 D 的两侧取 A, B，使 $DA=DB=c$，则这 A, B 都是所求曲线上的点. 过 C 任意地画一条直线 NCM，并从 D 向 NCM 引垂线 DL，在 NCM 上 L 的两侧取点 M 和 N，使 $LM=LN=c$，则这点 M, N 在所求曲线上，线段 MN

的长为 $2c$,符合于问题的要求.

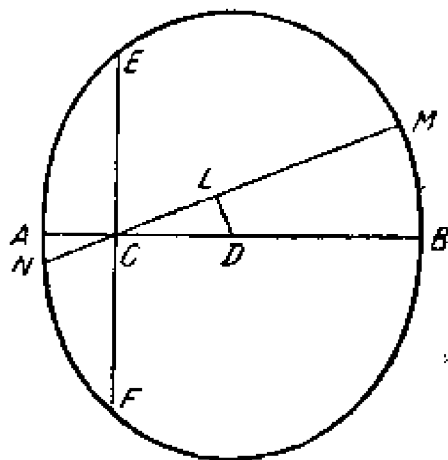


图 83

应该指出,如果 $CD = b < c$,则曲线在点 C 处有共轭点(§ 277),如图 83 所示.

如果 $b = c$,则曲线在 C 点处有尖点.线段 AC 的长为零,如图 84 所示.

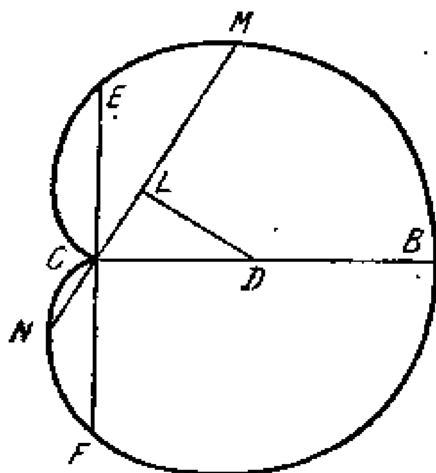


图 84

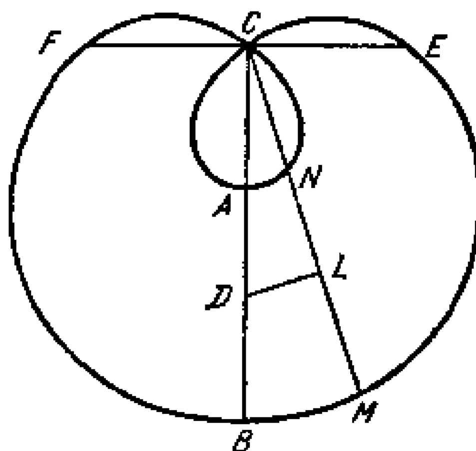


图 85

最后,如果 $b > c$,则点 A 在点 C 点 B 之间,曲线在点 C 处有结点,或二重点,如图 85 所示.这三条线都以 ACB 为直径,且垂直

于 ACB 的 ECF 的长为 $2c$.

§ 416

上节所作四阶线是封闭的,有界的,现在作满足同样条件的伸向无穷的四阶线,方程为 $z=\frac{b}{\cos\varphi}\pm c$. 参见图 86. 过点 C 画直线 CAB,取 $CD=b$,取 $DA=DB=c$,则点 A,B 在所求曲线上. 过 D 引

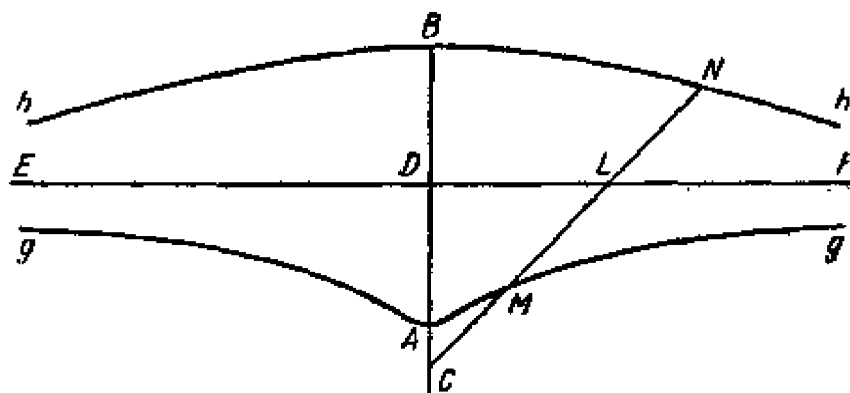


图 86

垂直于 AB 的直线 EDF. 任画直线 CL,则 $CL=\frac{b}{\cos\varphi}$,φ 为角 DCL. 在 CL 上 L 两侧取点 M,N,使 $LM=LN=c$,则 M,N 在所求曲线上. 这样画出的是古希腊尼科梅德斯(*Nicomedes*)的蚌线. C 为极点,EF 为渐近线,四个分枝在无穷远处与该渐近线重合. 称 hBh 部分为蚌线的外线,gAg 部分为蚌线的内线. 这两部分之外还有一个共轭点 C.

§ 417

前两节画出的是四阶线. 具有这种性质的更高阶线,需要多少条,都容易求得出. 只要 P 是角 φ 的正弦和余弦的奇函数,方程 z

$= bP \pm c$ 所表示的曲线就与过 C 点的直线相交于两点，记这两点为 M, N，线段 MN 就必定恒等于 $2c$. 这些曲线都属于蚌线类，并且代替直线 EF 可以取方程 $z = bP$ 表示的任何曲线作准线. 前面我们看到了这个方程所表示的曲线与过 C 点的直线都只有一个交点. 因此，由于长度 C 任意，对一条曲线 $z = bP$ 我们就可以画出无穷多条具有所要性质的曲线.

§ 418

参见图 87，作为例子，任画一条曲线 $CEDLF$，使过点 C 的直线与它都相交于一点，如 D，如 L. 那么在每一条这样的直线，例如 CL 上于交点 L 的两侧取线段 $LM = LN = c$，则 M, N 为所求曲线上的点. 让 CL 保持过 C 连续移动，可使点 M, N 画出曲线 $AMPCQBNRC$. 这曲线当然满足与过 C 的每一条直线的交点 M, N 都具有性质 MN 恒为常数. 这里应该指出，如果曲线 $CEDF$ 是过 C 点的圆，则画出的曲线为 § 414 求出的四阶线.

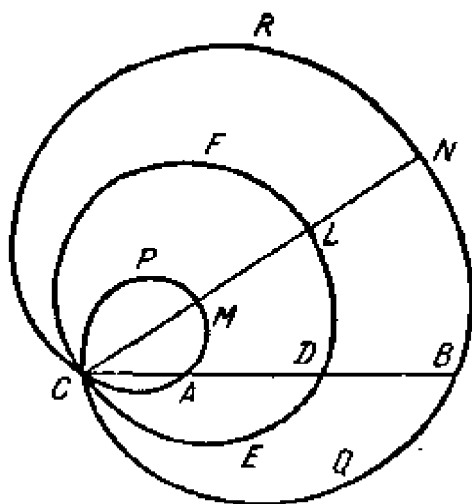


图 87

§ 419

前面我们解决了求这样的曲线 AMN 的问题，它与过 C 点的直线必相交于两点 M, N，使得 $CN - CM$ 或 $CM^2 - 2CM \cdot CN + CN^2$ 恒为常数. 我们再简单地考虑一下 $CM^2 + CM \cdot CN + CN^2$ 为常数的

情形. 令 § 412 方程中的 $n=1$,得

$$a^2L^2=(x^2+y^2)(L^2-LM+M^2),$$

其中 x 和 y 的函数 L,M 分别为 $m+1,m$ 次函数. 我们也得到方程

$$a^2(x^2+y^2)N^2=(x^2+y^2)^2N^2-(x^2+y^2)MN+M^2,$$

其中 M,N 都为 x,y 的齐次函数,且 M 的次数比 N 大 1.

§ 420

首先,令 $M=0$ 得到的是以 C 为圆心的圆. 此时过圆心 C 到曲线的直线都相等,满足要求. 其次,令第一个方程中的 $M=b,L=x$,得

$$a^2x^2=(x^2+y^2)(x^2-bx+b^2)$$

或

$$y^2=\frac{x^2(a^2-b^2+bx-x^2)}{b^2-bx+x^2}.$$

这种曲线中,除掉圆,这是最简单的. 再次,令第二个方程中的 $N=1,M=bx$,得

$$a^2(x^2+y^2)=(x^2+y^2)^2-bx(x^2+y^2)+b^2x^2$$

或

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}a^2\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}a^2bx-\frac{3}{4}b^2x^2},$$

也为四阶线,也满足要求.

§ 421

上面讨论的是 z 的两个值 CM,CN 的次数不高于 2 的问题. 现在我们讨论次数更高的问题. z 的两个值依然从方程 $z^2-Pz+Q=0$ 得到,其中

$$P=\frac{Mz}{L},Q=\frac{Nz^2}{L},$$

L,M,N 都是 x 和 y 的齐次函数,次数依次为 $n+2,n+1$ 和 n,x 为横标 CP,y 为纵标 PM.这里要讨论的第一个问题是,交点 M,N 满足 $CM^3+CN^3=a^3$.由方程 $z^2-Pz+Q=0$ 的性质得 $CM^3+CN^3=P^3-3PQ$,因而应该有 $P^3-3PQ=a^3$.由于 P^3 和 PQ 都是无理量,该等式不能成立.也即,没有满足 $CM^3+CN^3=a^3$ 的曲线.这结论是在只有两个交点的前提下推出的.如果允许交点个数多于 2,那么令 $Q=\frac{P^3-a^3}{3P}$,取 P 为角 φ 的正弦和余弦的任何函数,就可以求出满足要求的无穷多条曲线.

§ 422

如果要曲线满足

$$CM^4+CN^4=a^4,$$

则应该有

$$P^4-4P^2Q+2Q^2=a^4,$$

该方程不含无理量,求解可以进行.应该得到

$$Q=P^2\pm\sqrt{\frac{1}{2}P^4+\frac{1}{2}a^4},$$

该函数虽含根号,但可视为单值函数,因为$\sqrt{\frac{1}{2}P^4+\frac{1}{4}a^4}$取加号时所得 z 值为虚数.这样我们有

$$\frac{Nz^2}{L}=\frac{M^2z^2}{L^2}-\sqrt{\frac{M^4z^4}{2L^4}+\frac{1}{2}a^4},$$

由 $L-M+N=0$ 或

$$z^2-\frac{Mz^2}{L}+\frac{Nz^2}{L}=0,$$

得

$$z^2 - \frac{Mz^2}{L} + \frac{M^2z^2}{L^2} - \sqrt{\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4} = 0.$$

有理化得

$$\frac{z^4}{L^4}(L^2 - LM + M^2)^2 = \frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4$$

或

$$(x^2 + y^2)^2(2(L^2 - LM + M^2)^2 - M^4) = a^4L^4.$$

这是满足要求的曲线的通用方程.

§ 423

§ 372 中那个更为容易的方法也可以用来解决这类问题. 由于 $CM \cdot CN = Q$ 和 $Q = \frac{Nz^2}{L}$,如果记 CM, CN 中的一个为 z,则另一个为$\frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$,因而,条件为

$$CM^n + CN^n = a^n,$$

时得

$$u^b = \frac{uT}{u^2uN} + uz, \text{或 } z^n = \frac{a^nL^n}{L^n + N^m},$$

该方程, n 为偶数时有理,满足所提条件; n 为奇数时,应两边平方,使有理化. 这使交点个数加倍,不符合只交于两点的要求,也即无解. 例如,条件为

$$CM^2 + CN^2 = a^2,$$

得

$$z^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2L^2}{L^2 + N^2}.$$

由 $L - M + N = 0$ 知,这结果与 § 410 所得

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2L^2}{(L - M)^2 + L^2},$$

是一致的.一般地,对偶数 n,条件为 $CM^n+CN^n=a^n$ 时得

$$z^n=(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}=\frac{a^nL^n}{L^n+N^n}=\frac{a^nL^n}{L^n+(M-L)^n},$$

其中 L,M,N 都是 x 和 y 的函数,次数依次为 $m+2,m+1$ 和 m.

§ 424

这同样的解也可以利用 $CM+CN=P$ 得到.如果令 CM,CN 中的一个为 z,则另一个为 $P-z$.因而 CM^n+CN^n 应该为常数时,则 $z^n+(P-z)^n=a^n$.由

$$P=\frac{Mz}{L},Q=\frac{Nz^2}{L},$$

以及 $L-M+N=0$,得

$$z^n+\frac{z^n(M-L)^n}{L^n}=a^n,$$

也即

$$z^n=\frac{a^nL^n}{L^n+(M-L)^n},\text{或 } z^n=\frac{a^nL^n}{L^n+N^n}.$$

消去 L 得

$$z^n=\frac{a^n(M-N)^n}{(M-N)^n+N^n}.$$

n 为偶数时,这些方程都给出满足要求的曲线.n 为奇数时,当然有两个交点 M 和 N,满足 $CM^n+CN^n=a^n$.但是还有另外两个点也具有这一性质.也即每条过 C 的直线都双倍地满足要求.

§ 425

有了这些讨论,我们就可以比较容易地来解决一些相当困难的问题.比如,求一条曲线,过 C 点的每条直线都与它交于两点,

记为 M 和 N，这两点满足

$$CM^n + CN^n + \alpha CM \cdot CN(CM^{n-2} + CN^{n-2}) + \\ + \beta CM^2 \cdot CN^2(CM^{n-4} + CN^{n-4}) + \cdots = a^n.$$

设两个值中的一个 $CM = z$，则另一个

$$CN = \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}.$$

将这两个值代入上式，得所求曲线的方程

$$z^n(L^n + N^n + \alpha LN(L^{n-2} + N^{n-2}) + \beta L^2N^2(L^{n-4} + N^{n-4}) + \cdots) = a^nL^n.$$

由 $L - M + N = 0$，及 L, M, N 都是 x 和 y 的齐次函数，次数依次为 $m+2, m+1$ 和 m，得 $L = M - N$，或 $N = M - L$. 这样，在所给情况下我们可以得到无穷多个解.

§ 426

现在我们把考察对象改为与过定点 C 的直线都有三个交点的曲线. 这类曲线的通用方程为

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0,$$

其中 z 是曲线上任何一点到 C 的距离，P, Q, R 是角 $ACM = \varphi$，或者它的正弦和余弦的函数. 由于前面讲过的原因，为保证交点个数不多于 3，P 和 R 应该是 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 的奇函数，而 Q 应该是 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 的偶函数. 取直角坐标 $CP = x$，$PM = y$，则 $x^2 + y^2 = z^2$. 如果 K, L, M 和 N 都表示 x 和 y 的齐次函数，次数依次为 $n+3, n+2, n+1$ 和 n，则

$$P = \frac{Lz}{K}, Q = \frac{Mz^2}{K}, R = \frac{Nz^3}{K}.$$

这样得所求曲线的直角坐标通用方程

$$K - L + M - N = 0.$$

这方程清楚地告诉我们，C 点是曲线的 n 重点.

§ 427

首先,该方程包含所有的三阶线,这里要求点 C 不在曲线上.其次,该方程包含所有的四阶线,这里要求点 C 在曲线上.再次,具有一个二重点的五阶线属于该方程,这里要求点 C 为重点.类似地,更高阶线属于该方程,则必 $n+3$ 阶线具有一个 n 重点.

§ 428

设 p,q,r 是从方程

$$z^3-Pz^2+Qz-R=0$$

得到的三个 z 值,这里角 $CAM=\varphi$ 为任何值,那么由方程的性质我们有

$$P=p+q+r,Q=pq+pr+qr,R=pqr.$$

由 P,Q 不能用 x 和 y 有理表示,显见,谈不上 $p+q+r$ 或 pqr 为常数的曲线,也求不出 p,q,r 的奇函数为常数的曲线,但可以使它们的偶函数为常数.例如,使

$$pq+pr+qr=a^2,$$

此时我们有

$$Q=\frac{Mz^2}{K}=a^2$$

也即 $M(x^2+y^2)=a^2K$.代这个 K 值入方程 $K-L+M-N=0$,得满足要求的所有曲线的通用方程

$$M(x^2+y^2)-a^2L+a^2M-a^2N=0.$$

消去 M 得

$$(x^2+y^2)K-(x^2+y^2)L+a^2K-(x^2+y^2)N=0.$$

§ 429

用同样的方式可以解决另外一些类似的问题.例如,求与过点 C 的直线交于三点,且

$$p^2+q^2+r^2=a^2$$

的曲线.由

$$p^2+q^2+r^2=P^2-2Q,P=\frac{Lz}{K},$$

和

$$Q=\frac{Mz^2}{K},$$

得

$$\frac{L^2z^2}{K^2}-\frac{2Mz^2}{K}=a^2.$$

也即

$$(x^2+y^2)L^2-2(x^2+y^2)KM=a^2K^2.$$

与过点 C 的直线交于三点的曲线有通用方程 $K-L+M-N=0$,这里重要的一点是 x 和 y 的最高次数比最低次数高 3.为从这两个方程得到我们所要的方程,先乘 $K-L+M-N=0$ 以 $2(x^2+y^2)K$,再与刚得到的方程

$$(x^2+y^2)L^2-2(x^2+y^2)KM=a^2K^2$$

相加,得消去了 M 的方程

$$2(x^2+y^2)K^2-2(x^2+y^2)KL+(x^2+y^2)L^2-a^2K^2-2(x^2+y^2)KN=0.$$

其中次数最高项 $2(x^2+y^2)K^2$ 的次数为 $2n+8$,次数最低项 $2(x^2+y^2)KN$ 的次数为 $n+5$.最高最低之差为 3,具有重要的那一点.

§ 430

由于最高次项、最低次项都不能为零,为求最简单的曲线,我们令 $n=0, N=b^3, K=x(x^2+y^2), L=0$,得方程

$$2(x^2+y^2)^3x^2-a^2x^2(x^2+y^2)^2-2b^3x(x^2+y^2)^2=0,$$

除以 $2x(x^2+y^2)^2$,得

$$x(x^2+y^2)-\frac{1}{2}a^2x-b^3=0,$$

阶数为 3. 改 $L=0$ 为

$$L=2c(x^2+y^2),$$

得四阶方程

$$x^2(x^2+y^2)-2cx(x^2+y^2)+2c^2(x^2+y^2)-\frac{1}{2}a^2x^2-b^3x=0$$

或

$$x^2(x^2+y^2)+(2c-x)^2(x^2+y^2)=a^2x^2+2b^3x.$$

用类似的方法可得到很多满足条件的更高阶的曲线.

§ 431

也可以求出 $p^4+q^4+r^4$ 为常数的曲线. 由于

$$p^4+q^4+r^4=P^4+4P^2Q+2Q^2+4PR,$$

我们令

$$P^4-4P^2Q+2Q^2+4PR=c^4.$$

这样我们有

$$z^4(L^4-4KL^2M+2K^2M^2+4K^2LN)=c^4K^4$$

或

$$4K^2LNz^4=c^4K^4-z^4(L^4-4KL^2M+2K^2M^2),$$

解出 N,代入 $K-L+M-N=0$,得到的就是所要曲线的通用方

程.

§ 432

条件 $p^4+q^4+r^4=c^4$ 和 $p^2+q^2+r^2=a^2$ 可以同时被满足. 为此,应该有

$$z^2L^2-2z^2KM=a^2K^2,$$

或

$$2z^2KM=z^2L^2-a^2K^2.$$

由

$$4K^2LNz^4=c^4K^4-L^4z^4+4KL^2Mz^4-2K^2M^2z^4,$$

我们有

$$4K^2Lz^4=c^4K^4+L^4z^4-2a^2K^2L^2z^2-2K^2M^2z^4$$

和

$$4K^2LMz^4=2KL^3z^4-2a^2K^3Lz^2.$$

将 M 和 N 的这值代入方程 $K-L+M-N=0$,也即

$$4K^3Lz^4-4K^2L^2z^4+4K^2LMz^4-4K^2LNz^4=0,$$

得所求曲线的方程

$$4K^3Lz^4-4K^2L^2z^4+2KL^3z^4-2a^2K^3Lz^2-c^4K^4-$$
$$-L^4z^4+2a^2K^2L^2z^2+2K^2M^2z^4=0.$$

由

$$KMz^2=\frac{1}{2}L^2z^2-\frac{1}{2}a^2K^2,$$

我们有

$$2K^2M^2z^4=\frac{1}{2}L^4z^4-a^2K^2L^2z^2+\frac{1}{2}a^4K^4.$$

这就是说,所求曲线的通用方程为

$$8K^3Lz^4-8K^2L^2z^4+4KL^3z^4-4a^2K^3Lz^2-2c^4K^4-L^4z^4+$$
$$2a^2K^2L^2z^2+a^4K^4=0.$$

§ 433

由于 x 和 y 的齐次函数 K 的次数比 L 大 1，取 $K=z^2, L=bx$，可求出同时满足 $p^2+q^2+r^2=a^2$ 和 $p^4+q^4+r^4=c^4$ 的三交点最简曲线.所得方程为

$$8bxz^6-8b^2x^2z^4+4b^3x^3z^2-4a^2bxz^4-2c^4z^4-b^4x^4+2a^2b^2x^2z^2+a^4z^4=0.$$

由 $z^2=x^2+y^2$ 知该方程有理，表示的是七阶线，C 是它的四重点.令 $K=x, L=b$，可以得到满足条件的另一个七阶线.得到的方程为

$$8bx^3z^4-8b^2x^2z^4+4b^3xz^4-4a^2bx^3z^2-2c^4x^4-b^4z^4+2a^2b^2x^2z^2+a^4x^4=0,$$

也即

$$z^4=\frac{4a^2bx^3z^2-2a^2b^2x^2z^2+2c^4x^4-a^4x^4}{8bx^3-8b^2x^2+4b^3x-b^4}.$$

由此得

$$z^2=\frac{2a^2bx^3-a^2b^2x^2\pm x^2\sqrt{(2bx-b^2)[2c^4(b^2-2bx+4x^2)-2a^4(b^2-2bx+2x^2)]}}{b(2x-b)(4x^2-2bx+b^2)}.$$

§ 434

可以进一步考察与过点 C 的直线交于四点的曲线，并从中求出满足某些条件的曲线.但从前面的讨论中可知这不会遇到什么困难，这类问题的各种结果都可立即得到.如果解不存在也能立即判明，因而于此我们不再停留.下面转向关于曲线的另一个题目.

第十八章

曲线的相似性和仿射性

§ 435

每个曲线方程中，直角坐标 x，y 之外，还应包含一个或几个常量（§ 437 称常量为参数——中译者），比如 a，b，c 等，也称常量为线常量．曲线方程中常量变量次数之和，各项相等．如果一项为 n 个量（常量和变量）的积，则必其他各项都为 n 个量相乘．否则，不同类的量相比较，是无法进行的．因此，在每个曲线方程中，常量与变量一起，次数的和各项相等．常量可以取 1 或别的数．按照以上说法，一个方程中，如果没有常量，则必变量 x，y 次数的和，各项相同，也即必为齐次方程．我们讲了，齐次方程表示的不是曲线，而是交于一点的几条直线．

§ 436

我们先考虑变量 x 和 y 之外只含一个常量 a 的方程．x，y 和 a 这三个量的次数之和，各项相同．常量 a 不同的值给出不同的曲

线.这样的曲线有无穷多条,它们不同的只是大小,形状完全相似.我们称同一个方程所表示的这种曲线为彼此相似.它们之间的不同,不多于半径不同的圆之间的不同.

§ 437

为了清楚地认识这种相似,我们考虑一个完全确定的方程

$$y^3-2x^3+ay^2-a^2x+2a^2y=0.$$

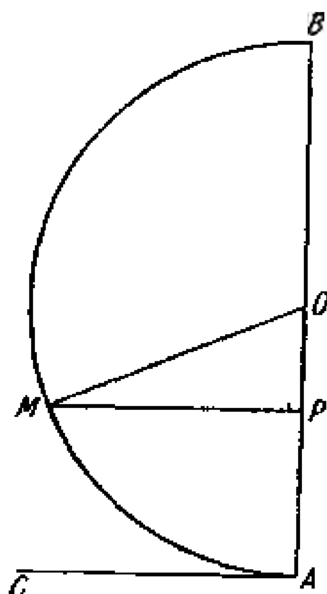


图 88

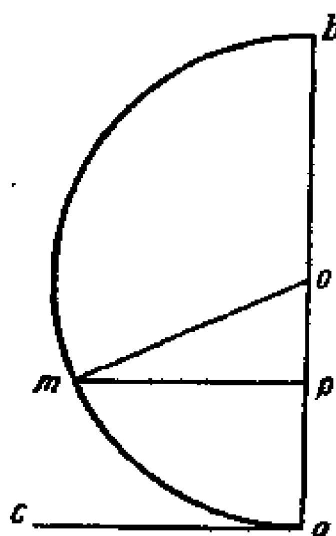


图 89

在变量 x 和 y 之外,它只含一个常量 a.我们称这个 a 为参数.图88上,直线 AB 为轴,坐标 $AP=x$,$PM=y$.设参数 a 的值为AC,又设 $AC=a$ 时方程给出的曲线为 AMB.现在我们给参数 a 以另外一个值ac,此时方程给出的曲线为 amb,如图 89 所示.我们称这里的曲线 AMB 和 amb 彼此相似.保持 $AC=a$,$AP=x$,$PM=y$,如果 $ac=\frac{1}{n}$、$AC=\frac{a}{n}$,则取 $ap=\frac{1}{n}$、$AP=\frac{x}{n}$,$pm=\frac{1}{n}$、$PM=\frac{y}{n}$.依次代 a,x,y 以$\frac{a}{n},\frac{x}{n},\frac{y}{n}$,则所得方程等于原方程各项都除以 n^3,即方

程不变.

§ 438

相似曲线具有一条极能说明其相似性的性质:如果横标 AP 与 ap 之比等于参数 AC 与 ac 之比,则纵标 PM 与 pm 之比也等于参数 AC 与 ac 之比.也即,如果取

$$AP:ap=AC:ac,$$

则

$$PM:pm=AC:ac.$$

由此得

$$AP:PM=ap:pm,$$

这告诉我们,相似曲线之间,除了大小,其它性质都相同.例如,如果取横标 AP, ap 同调,即其比等于参数 AC, ac 之比,则不只是纵标 PM, pm,而是用类似方式画出的一切对应线,其至弧 AM, am 之比,也都等于参数 AC, ac 之比.且对应面积 APM, apm 之比等于参数平方 AC^2, ac^2 之比.如果任取两个同调点 O, o,即 $AO:ao=AC:ac$,并从这两点分别向曲线画直线 OM, om,使角 AOM, aom 相等,则

$$OM:om=AC:ac.$$

最后,由于相似,同调点 M, m 处切线与轴所成角相等,且密切半径之比等于参数 AC 与 ac 之比.

§ 439

由此可见,方程 $y^2=2ax-x^2$ 表示的一切圆彼此相似.同样,方程 $y^2=ax$ 表示的全体曲线,也即全体抛物线彼此相似.由于在表示相似曲线的这些方程中,x, y, a 次数的和,各项相等,因而从

方程解出的 y 是量 a 和 x 的一次齐次函数,反之,如果 P 是量 a 和 x 的一次函数,则方程 $y=P$ 含有无数条彼此相似的曲线.参数 a 每取定一个值,就得到其中一条.同样地,从相似曲线的这类方程可以得到,横标 x 是 a 和 y 的一次齐次函数,参数 a 是 x 和 y 的一次齐次函数.

§ 440

任给一条曲线 AMB,都可另外画出无数条曲线 amb 与它相似.任取一个数,例如 $\frac{1}{n}$,作为同调部分间的比值.如果所给曲线 AMB 是对轴 AB 和直角坐标 AP, PM 画出的,那么在相似轴 ab 上我们取横标 ap,使 $AP:ap=1:n$,再自点 p 作垂线 pm,使 $PM:pm=1:n$.这样得到的 m 就在相似线 amb 上.点 M 和 m 是同调的.也可以从一个选定的点 O 出发来画相似线.取一个点 o 作点 O 的对应点.作角 $aom=AOM$,截取线段 om,使

$$OM:om=1:n,$$

这点 m 就在相似线 amb 上.用这种方法,对取定的任一个比 $1:n$ 都可画出相似线.人们制作了工具,用它可以画出与给定曲线以任比相似的曲线.

§ 441

不难从给定曲线的方程求出与它相似的曲线的方程.设给定曲线 AM 的方程是坐标 $AP=x$ 和 $PM=y$ 间的.我们来求与它相似的曲线 am 的方程.设相似曲线的横标 $ap=X$,纵标 $pm=Y$,则从 $x:X=1:n$, $y:Y=1:n$ 得

$$x=\frac{X}{n}, y=\frac{Y}{n}.$$

代这两个值入 x,y 间方程，得到的就是相似曲线的 X,Y 间方程．如果在新方程中只考虑坐标 X,Y 和字母 n，则各项次数都为零．如果用 n 的适当的幂乘方程，以便去掉分母，则得到的方程中，X,Y,n 的次数的和各项相等．前面我们讲了，相似曲线的方程中，两个坐标和由它的变化而得到不同相似曲线的那个常量，这三个量的次数的和，各项相等．这是判断一个方程所表示的是否为相似曲线的一个准则．

§ 442

相似曲线，同调的横标和纵标按相同的比伸长或缩短．如果横标按一个比伸缩，纵标按另一个比，这两个曲线就不是相似的．这样的两个曲线虽不相似，但有着某种关系．我们称它们为仿射．仿射包含相似，相似是仿射的特殊情形．纵标比、横标比相等的仿射是相似．任何曲线 AMB，我们都可以求出它无穷多个仿射线 amb（参见图 88,89）．求法是，先取横标 ap，使 $AP:ap=1:m$，再引纵标 pm，使 $PM:pm=1:n$．比不同，所得仿射线不同．同时改变比 $1:m$ 和 $1:n$，或只改变其中一个，我们就得到无穷多个仿射于原曲线 AMB 的曲线．

§ 443

假定所给曲线 AMB 由直角坐标 $AP=x$，$PM=y$ 间的方程表示．根据上节所讲，其仿射线 amb 由坐标 $ap=X$，$pm=Y$ 间方间方程表示．由两坐标间的关系

$$x:X=1:m,\ y:Y=1:n.$$

得

$$x=\frac{X}{m}, y=\frac{Y}{n}.$$

代这两个值入 x, y 间方程,得到的就是仿射线的 X, Y 之间的通用方程.为进一步考察所得方程的性质,我们假定所给曲线 AMB 的方程中,y 是 x 的函数,记为 P,即 $y=P$.这样,如果换 P 中 x 为 $\frac{X}{m}$,则 P 成为 X 和 m 的零次函数.即仿射线的通用方程中 $\frac{Y}{n}$ 是 X 和 m 的零次函数,也即 Y 和 n 的零次函数等于 X 和 m 的零次函数.

§ 444

相似曲线与仿射曲线的主要差别是:对一根轴或一个固定的点相似的曲线,对任何另外的同调轴,或任何另外的同调点,依然相似.而仿射曲线,对两根轴仿射,对另外的轴或另外的同调点,可以不仿射.还应该指出,跟彼此相似的曲线一样,彼此仿射的曲线也同阶同类.下面我们用几种大家熟悉的曲线作例子,对所说进行解释.

§ 445

设所给曲线为圆,方程为 $y^2=2cx-x^2$.为求相似于所给圆的曲线,将

$$x=\frac{X}{n}, y=\frac{Y}{n}$$

代入方程,得全体相似于圆的曲线的 X, Y 间通用方程

$$\frac{Y^2}{n^2}=\frac{2cX}{n}-\frac{X^2}{n^2},$$

也即

$$Y^2 = 2ncX - X^2.$$

由此显见,相似于圆的曲线都是圆,直径 $2nc$ 取值不同,圆不同.为求仿射于圆的曲线,代

$$x = \frac{X}{m}, y = \frac{Y}{n}$$

入圆的方程,得

$$\frac{Y^2}{n^2} = \frac{2cX}{m} - \frac{X^2}{m^2}$$

或

$$m^2 Y^2 = 2mn^2 cX - n^2 X^2.$$

这是椭圆的关于一根主轴的通用方程.由此可见,凡椭圆都与圆仿射,进而椭圆彼此仿射.用同样的方法可以得到,凡双曲线彼此仿射.椭圆有两根主轴,主轴之比相等的椭圆相似.同样,主轴之比相等的双曲线也相似.

§ 446

至于抛物线,方程为 $y^2 = cx$,显然相似于它的曲线是抛物线,抛物线彼此相似.我们来求仿射于抛物线的曲线.令

$$y = \frac{Y}{n}, x = \frac{X}{m},$$

得方程 $Y^2 = \frac{n^2 c}{m} X$.这也是抛物线方程.可见,仿射于抛物线的曲线同时也相似于抛物线.也即,对抛物线,相似与仿射范围相同.方程只有两项的曲线,如 $y^3 = c^2 x$, $y^3 = cx^2$, $y^2 x = c^3$ 等,情况都是这样.我们得到,双曲线之间,抛物线之间,仿射与相似都是同时的.别的曲线则不然.我们看到了,圆和椭圆,它们之间可以仿射而不相似.

§ 447

从 x,y 的方程,不管它含有多少个常量 $a,b,c,\cdots$,只要使每一个常量都取确定的值,我们就得到一条确定的曲线.如果只让常量中的一个,比如 a 变动,那么对每一个不同的 a 值得到一条不同的曲线,总数是无穷多条,且它们都相似.这是在别的常量都为确定值都不变动的前提之下,否则,这里的曲线就不相似.如果 a 之外,允许 b 也变动,那么对每一个固定的 a,由 b 的变动又得到无穷多个曲线.a,b 都变动时,我们得到的不同曲线的数目是无穷多个无穷多.如果 a,b 之外,常量 c 再变动,那么对每一对固定的 a 和 b,我们就又得到无穷多个曲线.这样允许变动的常量个数越多,我们得到的不同曲线的数目,其无穷的幂次就越高.

§ 448

对只让一个常量变动时,一个方程所产生的那无穷多个曲线,我们再作些考察.当轴和原点固定,这时方程给出的不只是无穷个曲线,还给出这每条曲线的位置.这无穷多曲线充满某个区域,也即这区域中每一点都有这无穷多曲线中的线通过.这无穷多曲线相似与否,可据前面所讲作出判断,可以有这样的情况,这无穷多曲线不只相似且相等,不同的只是位置.例如,a 变动时方程

$$y = a + \sqrt{2cx - x^2}$$

给出的无穷多个半径为 c,圆心在垂直于轴的一条直线上的圆就是.

§ 449

反之,如果依照某种规律,把一个曲线画在一个平面的无穷多个不同位置上,我们也可以求出一个方程,使得让方程中的一个常量变化,就得到画出的这无穷多个曲线,假定如图 90 所示,画在无穷多位置上的曲线是半径为 c 的圆.圆这无穷多个圆的规律是,让顶点 A, a 都在称为准线的一条给定曲线 Aad 上,且直径 ab 都平行于轴 AB.为了求出含这无穷多个圆的方程,取准线上任一点 a,从它向主轴画垂线 aK.记 $AK = a$.由于准线已给,我们有 Ka 过 a.记 $Ka = A$,则 A 是 a 的一个确定的函数.再从 a 引圆的直径 ab,使平行于主轴,这新圆的顶点 a 在准线上.从新圆上任取一点 m,画纵标 $mP = y$,对应横标为 $AP = x$.这样我们得到

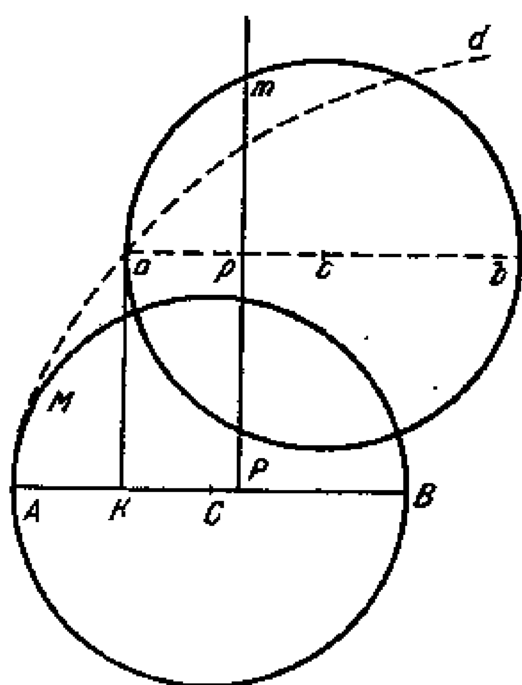


图 90

$$ap = x - a, pm = y - A.$$

如果令 $ap = t$, $pm = u$,那么由圆的性质我们有 $u^2 = 2ct - t^2$.将 $t = x - a$, $u = y - A$ 代入,得

$$(y - A)^2 = 2c(x - a) - (x - a)^2.$$

这是我们所说意义下沿准线 Aad 的圆的通用方程.让 A 所依赖的 a 变化,从该方程即可得所有的圆.

§ 450

类似地，如果把沿准线 Aad 画的圆，换为另一种曲线 amb，也使顶点或横标原点在准线上，轴保持平行，那就也可以求出包含画出的无穷多个这另一种曲线的方程. 设这另一种曲线的方程是坐标 $ap = t$，$pm = u$ 间的，并取平行于 ab 的直线AB 作所有曲线的主轴，也作准线 Aad 的主轴. 照用过的方法，令 $AK = a$，$Ka = A$，则 A 是 a 的函数. 记横标 $AP = x$，纵标 $Pm = y$，得 $t = x - a$，$u = y - A$. 将这两个值代入给定的方程，就得到包含所有曲线 amb 的通用方程. 对 a 的每一个确定的值，我们得到通用方程所表示的无穷多个曲线 amb 中的一个. 例如，如果曲线 amb 是方程为 $u^2 = ct$ 的抛物线，则顶点在准线 Aad 上，轴平行于直线 AB 的这无穷多个相等的抛物线的方程为

$$(y - A)^2 = c(x - a).$$

§ 451

前面我们让曲线顶点沿着作为准线的曲线移动时，保持曲线的轴相平行. 如果顶点依旧在准线上，但轴不是相平行，而是依另外的规律移动，那么含无穷多个这种曲线的方程，要更为一般. 为说得更清楚一些，先假定曲线的顶点 A 沿圆弧 Aa 移动时轴 ab 恒指向圆心 O，如图 91 所示. 这里是曲线 AMB 跟它的轴 BAO 一起绕点 O 所作的转动给出无穷多个曲线 AMB. 无穷多个这种曲线，也可用含有一个常数的方程表示.

图 91

§ 452

设不变的半径 $AO = aO = c$，可变动的角 $AOa = \alpha$. 从我们的一条曲线 amb 的任一点 m，向主轴 OAB 引垂线 mP，则 $OP = x$，$Pm = y$. 再从这 m 向 amb 的轴 ab 引垂线 mp，记 $ap = t$，$pm = u$. 假定 amb 的 t，u 间方程已给. 自 P 引平行于 Ob 的直线 Ps，交纵标 mp 的延长线于 s，则

$$ps = x\sin\alpha, \quad Op - Ps = x\cos\alpha,$$

又由角

$$Pms = AOa = \alpha,$$

得

$$Ps = y\sin\alpha \quad \text{И} \quad ms = y\cos\alpha.$$

由此得

$$Op = c + t = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad mp = u = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

这样，代

$$t = x\cos\alpha + y\sin\alpha - c, \quad u = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$

入所给 t,u 间方程,就得 x,y 间的通用方程,变动角 α 就得到所有的曲线 amb.

§ 453

设曲线 AMB 的顶点沿任何一条准线 AaL 移动.此时轴 ab 的移动使角 AOa 以某种方式依赖于点 a.参见图 92.例如顶点为 a 时,记 $AK=a$, $Ka=A$,记角 $AOa=\alpha$.由于准线已给,所以 A 是 a 的某个已知函数,角 α 的正弦和余弦也是 a 的函数.在这里的记号之下我们有

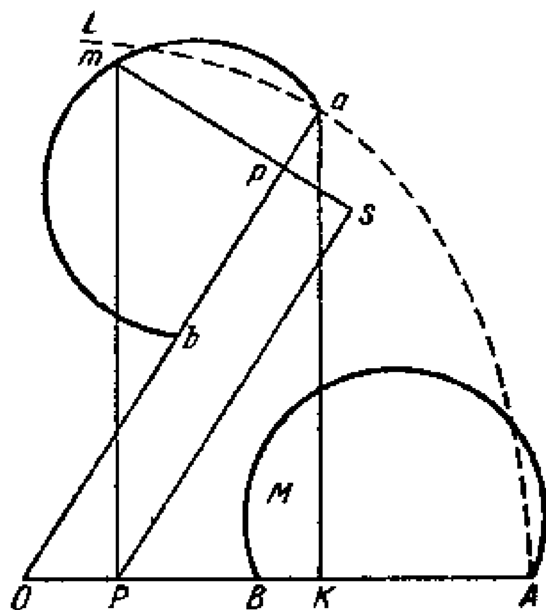


图 92

$$KO=\frac{A}{\mathrm{tg}\alpha},\quad Oa=\frac{A}{\sin\alpha}.$$

从 amb 的任一点 m 先向主轴 AO 引垂线 mP,再向 amb 的轴引垂线 mp,令 $AP=x$, $Pm=y$; $ap=t$, $pm=u$.假定原曲线坐标 t,u 间方程已给.从它我们可以求出变动曲线的 x,y 间通用方程.

§ 454

为此,自 P 向 mp 的延长线引垂线 Ps,它平行于曲线的轴 abO.由角 $Pms=AOa=\alpha$,知

$$Ps=y\sin\alpha,\quad ms=y\cos\alpha.$$

又由

$$OP = a + \frac{A}{\mathrm{tg}\alpha} - x,$$

得

$$ps = a\sin\alpha + A\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

和

$$Op - Ps = a\cos\alpha + \frac{A\cos\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} - x\cos\alpha.$$

从而

$$Op = a\cos\alpha + \frac{A\cos\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} - x\cos\alpha + y\sin\alpha = \frac{A}{\sin\alpha} - t,$$

进而

$$t = A\sin\alpha - a\cos\alpha + x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$

$$u = -a\sin\alpha - A\cos\alpha + x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

或

$$t = (x - a)\cos\alpha - (y - A)\sin\alpha,$$

$$u = (x - a)\sin\alpha + (y - A)\cos\alpha,$$

将这两个表达式代入 t, u 间方程,就得到所求的 x, y 间方程. 不管依什么规律将曲线 amb 在平面上画出无穷多次,用这里的方法都可以求出这无穷多个曲线的通用方程.

§ 455

这样我们就做到了,用一个方程表示只是位置不同的无穷多个相同曲线,这里原曲线的 t, u 间方程不含可变化的常数 a. 如果 t, u 间方程含有一个或几个依赖于 a 的常数,那么所得通用方程所包含的无穷多条曲线,就不一定全都相似. 如果 t, u 间方程中的 u 是 t 和 f 的一次齐次函数, f 依赖于 a,那么这无穷多个曲线全都相似,否则,将不全相似.

§ 456

作为具体说明，我们举个例子．如图 93 所示，AB，aB，amB，…是过点 B，圆心在 AE 上的无穷多个圆．这些圆类似于地图上的经线．从点 B 向直线 AC 引垂线，记 $BC = c$，这 c 是不变的．现在我们对这无穷多个圆中的一个 amB 进行考察．引纵标 mP，则 $CP = x$，$Pm = y$．对选定的一个圆，这半径是常量，但对所有的圆来说，这半径就是一个变量．记 $aE = BE = a$，则

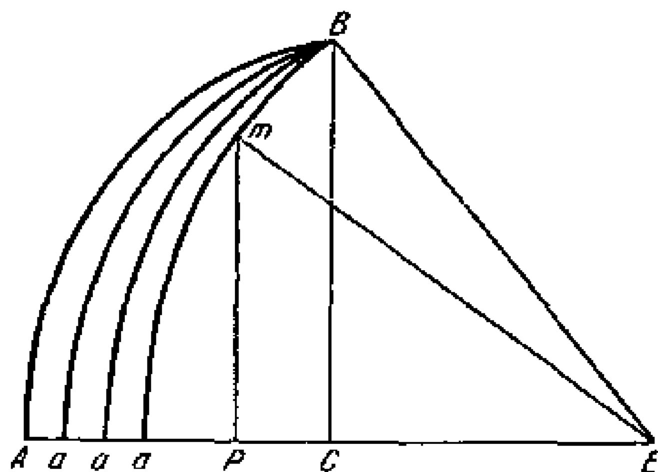


图 93

$$CE = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad PE = x + \sqrt{a^2 - c^2}.$$

由 $PE^2 + Pm^2 = a^2$，得

$$y^2 + x^2 + 2x\sqrt{a^2 - c^2} + a^2 - c^2 = a^2,$$

也即

$$y^2 = c^2 - 2x\sqrt{a^2 - c^2} - x^2.$$

如果把方程中应变化的常量取为线段 $CE = a$，则得到更为简单的方程

$$y^2 = c^2 - 2ax - x^2,$$

使 a 变化，就得到过点 B，圆心在直线 AE 上的所有的圆．类似地，可以用一个方程表示遵守某种规律的所有曲线，只要使本来不变化的常量适当地进行变化．

第十九章

曲线的交点

§ 457

曲线与直线的交点,前几章我们讨论过不只一次了,还证明了曲线与直线的交点个数,二阶线不能多于 2,三阶线不能多于 3,四阶线不能多于 4,类推.本章我们讨论两条曲线的交点个数.我们还是从直线开始,先讨论任一直线与已给曲线的交点,并拿这一讨论作为曲线交点讨论的准备.曲线交点的讨论广泛用于列高阶方程,列高阶方程是下一章的内容.

§ 458

设 AMm 为任给的一条曲线,其性质用直角坐标 $AP = x$, $Pm = y$ 的方程表示.现在任画一条直线 BMm(图 94).我们来确定这直线与曲线 AMm 的交点个数,并求出交点.为此,首先我们应求出这直线关于曲线所用坐标的方程,也即关于以 AP 为轴、A 为原点的直角坐标 x, y 的方程.直线方程的形状为 $\alpha x + \beta y = \gamma$.令 $x =$

0得 $y = AD = \frac{\gamma}{\beta}$,令 $y = 0$ 得 $x = -AB = \frac{\gamma}{\alpha}$,由此得该直线与轴的

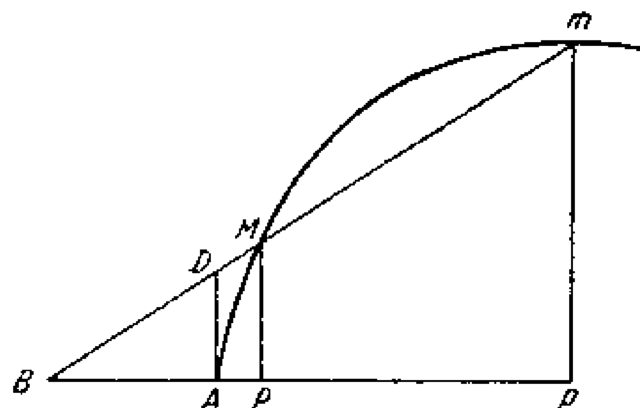


图 94

交点 B 处,交角的正切 $= \frac{AD}{AB} = -\frac{\alpha}{\beta}$. 这样我们就把曲线和直线用相同的坐标 x 和 y 表示了出来.

§ 459

对横标 x 的同一个值,从两个方程得到的 y 值,差别越小,表明在该 x 处两条线离得越近.如果得到的 y 值相同,则表明曲线与直线在该 x 处重合,即得到了一个交点.可见交点是其横标纵标同时满足这两个方程的点,求交点就是求同时满足这两个方程的横标 x 和纵标 y.如果从两个方程中消去 y,我们就得到一个变元 x 的方程.它的解就是横标 AP 和 Ap.从这两个横标得到纵标 PM 和 pm,也就得到了交点 M 和 m.

§ 460

直线 BMm 的方程为 $\alpha x + \beta y = \gamma$,解出 y,得 $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$.将这

个 y 代入曲线方程,得不含 y 只含 x 的方程.这新方程的实根为交点的横标,交点个数等于实根个数.表达式 $y=\frac{\gamma-\alpha x}{\beta}$ 中 x 的次数为 1,因而代它入以 x,y 为变量的曲线方程时,不会增加方程的次数,即新方程中 x 的次数等于或小于原方程的次数.代入时 x 的最高次幂可以消失.

§ 461

有了交点的横标 AP 和 Ap,利用它即可求出交点 M 和 m.画出点 P 和 p 处的纵标线,这两条纵标线与直线 BMm 的交点即所求交点 M 和 m.当然也可以通过求纵标线与曲线 AMm 的交点得到所求交点 M 和 m.但纵标线与曲线的交点可以不只一个,因而还要进一步判新哪一个是交点.直线 BMm 则不存在这个问题,它与纵标线的交点只有一个.如果两个 x 值相等,则交点 M 和 m 合为一点.此时直线 BMm 或者为曲线的切线,或者交曲线于二重点.

§ 462

消去了 y 得到的那个新的 x 的方程,如果它没有实根,则直线 BMm 与曲线既不相交也不相切.新方程的实根(可以不只一个)给出所有的交点.这每一个实根(横标)只对应直线 BMm 的一个实纵标,这实纵标也是曲线的对应纵标.因而得到的必定是交点.应该指出,对于两条曲线,新方程的实根不一定都给出交点.待后面考察了两条曲线的交点,我们就会明白这原因.

§ 463

参见图 95,任给两条相交曲线 MEm 和 MFm. 为求交点,先列出它们的直角坐标 x 和 y 的方程,这里轴为 AB,原点为 A. 交点处,两条曲线的横标纵标都相同. 从两个方程消去 y,得到单个变元 x 的新方程. 不管有多少个交点 M, m, m,它们的横标都由新方程给出. 也即交点 $M, m, m, \cdots$ 的横标是新方程的根.

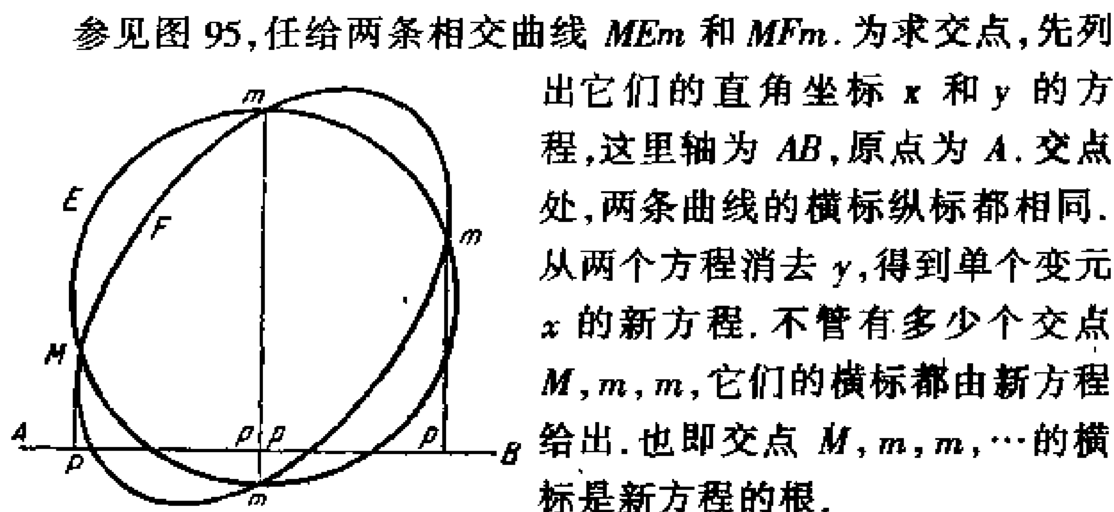


图 95

§ 464

有了交点的横标 AP, Ap 等,还不是那么容易地就可以求出交点. 两条曲线的 y 都是 x 的多值函数时,对同一个横标 AP,每条曲线都有多个纵标与之对应. 因而得从两组纵标中选出相等的,纵标的个数越多,挑选就越麻烦,但这麻烦可以避开. 方法是利用从两个方程消去 y 时那个用 x 表示 y 的表达式. 对求得的每一个 x 值,从这个表达式都可求出从点 P 到交点的纵标值,而不涉及两条曲线中任何一条的性质,也不涉及它们的共有性质.

§ 465

设一条曲线为抛物线,方程为

$$y^2-2xy+x^2-2ax=0,$$

另一条曲线为圆，方程为

$$y^2+x^2-c^2=0.$$

为消去 y，从第二个方程减去第一个，得

$$2xy+2ax-c^2=0.$$

从而

$$y=\frac{c^2-2ax}{2x}$$

由该式知，对得到的每一个 x 值，相应地都能得到一个实 y 值. 将求得的 y 的这个表达式代入第二个方程，得

$$c^4-4ac^2x+4(a^2-c^2)x^2+4x^4=0.$$

该方程的每一个实根都确实地给出一个交点. 令 $c=2a$，得

$$4a^4-4a^3x-3a^2x^2+x^4=0.$$

该方程的一个根为 $x=2a$. 消去这个根所对应的因式，得

$$x^3+2ax^2+a^2x-2a^3=0.$$

该方程也有一个实根. 对应于第一个和第二个实根的纵标都可从方程 $y=\frac{2a^2-ax}{x}$ 求出. 对应于第一个实根，即 $x=2a$ 的纵标为 $y=0$. 也即交点在轴上.

§ 466

由此清楚地看出，在消去 y 的过程中，只要从 x 和 y 的两个方程，能将 y 用 x 有理表出，那么消去了 y 的方程的每一个实根 x，就都对应一个真实交点. 如果在消去 y 的过程中做不到将 y 用 x 有理地表出，那么消去了 y 的方程的有的实根可能不对应真实的交点. 此时可以得到这样的 x 值，从哪根曲线上都求不出对应于它的实纵标. 这种情况发生时，不要怀疑为计算上有错. 对应于这种横标，两条曲线的纵标都为虚数. 两个虚数跟两个实数一样，也

可以相等或不等. 即使两个虚纵标相等,也得不到真实的交点.

§ 467

为了解释得更清楚,如图 96 所示,在同一条轴 BAE 上,先画出以 $2a$ 为参数的抛物线 EM,再在这抛物线 EM 的外面画一个半径为 c 的圆. 这两条曲线完全不相交,记它们间的距离 $AE = d$. 取 A 为原点,自 A 向 E 为正,向 B 为负. 此时抛物线的方程为 $y^2 = 2ax - 2ab$,圆的方程为 $y^2 = -2cx - x^2$. 为了求出交点,消去 y,得

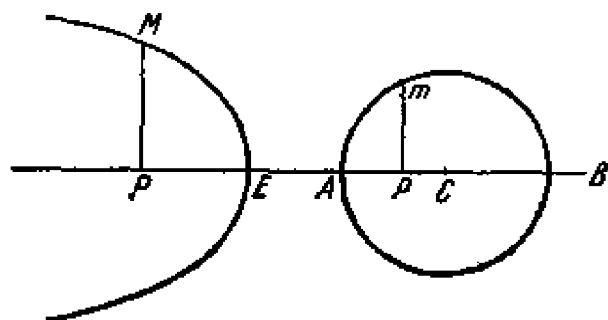


图 96

$$x^2 + 2(a + c)x - 2ab = 0,$$

从它得到 x 的两个实值,

$$x = -a - c \pm \sqrt{(a + c)^2 + 2ab},$$

一正一负. 虽然如此,但这两条曲线却完全地没有交点. 这里的抛物线和圆对应于这两个横标的纵标都是虚数,但相等. 将求得的 x 值代人,得

$$y = \sqrt{-2a^2 - 2ac - 2ab \pm 2a\sqrt{a^2 + 2ac + c^2 + 2ab}},$$

这个表达式当然是虚数.

§ 468

上节的例子表明,两条曲线可以具有虚交点. 它不是真实的交点,但可以按计算真实交点的算法把它求出来. 因此交点个数可以

少于消去了 y 的新方程的根的个数,甚至可以新方程有两个或更多个实根,而曲线完全没有交点.反之则不然,每一个交点必对应于新方程的一个实根 x.也即新方程的实根个数绝对地不会少于交点个数,但可以多于交点个数.一个实根是否对应于真实的交点,由对应 y 值的实虚决定.y 实则交点真实,y 虚则交点虚.

§ 469

这样交点数少于消去了 y 的新方程实根 x 的个数,只发生于两种情况之下.一种情况是,两个曲线方程中 y 的次数都全为偶数,因而主轴同时是两条曲线的直径.再一种情况是,从两个方程消去 y^2 时,同时也消去了 y,即 y 不能用 x 有理表示.例如,一个方程为

$$y^2 - xy = a^2,$$

另一个方程为

$$y^4 - 2xy^3 + x^3y = b^2x^2,$$

从第一个方程得

$$(y^2 - xy)^2 = a^4 \quad 或 \quad y^4 - 2xy^3 = a^4 - x^2y^2,$$

代入第二个方程,得

$$a^4 - x^2y^2 + x^3y = b^2x^2 \quad 或 \quad y^2 - xy = \frac{a^4 - b^2x^2}{x^2} = a^2,$$

从而

$$x^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2},$$

进而

$$x = \frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

这里看上去像是有两个交点,但这两个交点是否为真实交点,由从

方程 $y^2 - xy = a^2$ 得到的 y 值决定. 我们有

$$y^2 = \frac{\pm a^2 y}{\sqrt{a^2 + b^2}} + a^2,$$

它的根都为实数,因而有四个交点. 也即横标

$$x = \frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

中的每一个都对应两个真实的交点.

§ 470

轴同时为两条曲线的直径,或者消去 y 的高次幂时 y 的一次幂也被消去. 只要不是这两种情况,我们就都可以把 y 表示成 x 的有理函数. 从而消去了 y 的新方程的每一个实根就都对应一个真实的交点. 当然也就无需特别的注意. 如我们看到的,当一条线为直线时和纵标为横标的单值函数时,就都不需特别注意. 这两种情况下横标都不对应虚纵标,从而新方程的实根都给出真实交点. 在多数情况下,虽然两个方程都含有 y 的高于一次的幂,但在消去 y 时都可以得到 y 的有理函数,也即 y 的用 x 表示的单值函数.

§ 471

我们举过的抛物线和圆的那个例子,对应于求得的横标,两条曲线的纵标都是虚数. 当然交点也就都是虚的. 对应于求得的横标,即使一条曲线的纵标都是实数,交点也可以是虚的. 例如,三阶线

$$y^3 - 3ay^2 + 2a^2y - 6ax^2 = 0,$$

对所有的横标,其纵标都为实数,且 $x < \frac{a}{3}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ 时纵标有三个值.

考虑该三阶线与抛物线 $y^2-2ax=0$ 的交点.横标为负时,这抛物线的纵标为虚数,即横标为负时它与所给三阶线不相交.

§ 472

现在我们消去 y.由抛物线方程得 $y^2=2ax$,代人三阶线方程,得

$$2axy-6a^2x+2a^2y-6ax^2=0,$$

从而

$$y=\frac{6a^2x+6ax^2}{2a^2+2ax}=3x.$$

即所得方程被 $y-3x$ 除得尽.做除法得消去了 y 的方程 $2a^2+2ax=0$,由此得 $x=-a$. $x=-a$ 时抛物线的纵标为虚数.代 $x=-a$ 人三阶线方程,得

$$y^3-3ay^2+2a^2y-6a^3=0,$$

由该方程得实纵标 $y=3a$,另外两个纵标由方程 $y^2+2a^2=0$ 给出,是虚数.这两个虚纵标等于抛物线的对应虚纵标,得到两个虚交点.但由因式 $y-3x=0$ 得到两个真实交点.代 $y=3x$ 人抛物线方程,得 $9x^2-2ax=0$.从而,一个真实交点为原点,$x=0,y=0$.另一个为 $x=\frac{2a}{9},y=3x=\frac{2a}{3}$.

§ 473

这样,虽然消去 y 时得到的方程

$$2axy-6a^2x+2a^2y-6ax^2=0$$

只含 y 的一次幂,可以将 y 表示为 x 的有理函数,但我们得到了虚交点.前面我们是把 y 由 x 有理表示作为没有虚交点的判别准则

的.矛盾吗? 不.实际上,如果消去 y 时得到的方程没有因式,也就会有虚交点.去掉因式得到的方程就不再含 y,y 也就不能用 x 有理表出.当消去过程中得到的方程能分解成因式时,我们就应该分别对每个因式进行考虑.可以一个因式有虚交点,而另一个没有.

§ 474

进行了上面的讨论之后,下面我们讲两条给定曲线交点的具体求法.因为这求法涉及坐标 y 的消去,x 的次数不影响消去过程,所以我们只考虑两个方程中 y 的次数.设 $P,Q,R,S,T,\cdots$ 和 $p,q,r,s,t,\cdots$ 都是 x 的有理函数.首先假定我们求其交点的那两条曲线的方程为

Ⅰ

$$P+Qy=0,$$

Ⅱ

$$p+qy=0.$$

分别乘Ⅰ,Ⅱ以 p 和 P,相减,再除以 y,得

$$pQ-Pq=0.$$

该方程只含变量 x 和常数.它的实根为交点的横标,对应的纵标可从

$$y=-\frac{p}{q}=-\frac{P}{Q},$$

求出.因而,如果两条曲线的纵标 y 都能表示成 x 的有理,也即单值函数,则没有虚交点.

§ 475

设一条曲线的 y,跟前面一样,可表示成 x 的单值函数,而另

一条的 y 可表示成 x 的二值函数. 即

Ⅰ

$$P + Qy = 0,$$

Ⅱ

$$p + qy + ry^2 = 0.$$

分别乘Ⅰ,Ⅱ以 p 和 P,相减,再除以 y,得

Ⅲ

$$pQ - Pq - Pry = 0 \text{ 或} (Pq - pQ) + Pry = 0.$$

分别乘Ⅰ,Ⅲ以 Pr 和 Q,相减得不含 y 的方程

$$P^2r - PQq + pQ^2 = 0.$$

该方程的每一个根都给出对应交点的横标. 对应的纵标为

$$y = -\frac{P}{Q} = \frac{pQ - Pq}{Pr},$$

都是实数,交点是真实的.

§ 476

保持一条曲线的纵标为 x 的单值函数,设另一曲线的纵标由一个三次方程表示,也即设它为 x 的三值函数. 这两个方程为

Ⅰ

$$P + Qy = 0,$$

Ⅱ

$$p + qy + ry^2 + sy^3 = 0.$$

分别乘Ⅰ,Ⅱ以 p 和 P,相减,再除以 y,得

Ⅲ

$$(Pq - pQ) + Pry + Psy^2 = 0.$$

将从Ⅰ求出的 $y = -\frac{P}{Q}$ 代入,去分母,得

$$PQ^2q - pQ^3 - P^2Qr + P^3s = 0$$

或

$$Q^3p - PQ^2q + P^2Qr - P^3s = 0,$$

代 $y = -\frac{P}{Q}$ 入 Ⅱ 也得到这一结果. 求出这最后方程的所有实根,并依 $y = -\frac{P}{Q}$ 求出对应的实纵标,得到实根个数那么多真实交点.

§ 477

类似地,保持 Ⅰ 的纵标为 x 的单值函数,换 Ⅱ 为 y 的四次或更高次方程,y 也是容易消去的. 设方程为

Ⅰ

$$P + Qy = 0,$$

Ⅱ

$$p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0.$$

从 Ⅰ 得 $y = -\frac{P}{Q}$,代入 Ⅱ 得只含 x 和已知量的方程

$$Q^4p - PQ^3q + P^2Q^2r - P^3Qs + P^4t = 0.$$

从该方程的每一个实根都得到一个实纵标 $y = -\frac{P}{Q}$. 因而实根给出同样数目的真实交点.

§ 478

设两条曲线的方程都是 y 的纯二次方程,即不含 y 的一次项,其形状为

Ⅰ

$$P + Ry^2 = 0,$$

Ⅱ

$$p + ry^2 = 0.$$

消去 y^2,得

$$Pr - Rp = 0.$$

该方程的实根中使 $-\frac{P}{R}$和 $-\frac{p}{r}$都为正数的,给出真实交点.对每一个这样的实根,$y^2 = -\frac{P}{R} = -\frac{p}{r}$给出 y 的一正一负两个实值.因而 $Pr - Rp = 0$ 的每一个这样的根对应两个交点,这两个交点至轴的距离相等,因为轴是这两条曲线的直径. $Pr - Rp = 0$ 的根中使 $-\frac{P}{R} = -\frac{p}{r}$为负数的,对应的 y 为虚数,因而给出的交点为虚的.

§ 479

设 y 的两个二次方程都具有含 y 的项,即其形状为

Ⅰ

$$P + Qy + Ry^2 = 0,$$

Ⅱ

$$p + qy + ry^2 = 0.$$

为消去 y,分别乘Ⅰ和Ⅱ以 p 和 P,相减,再除以 y,得

Ⅲ

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y = 0.$$

再分别乘Ⅰ和Ⅱ以 r 和 R,相减,得

Ⅳ

$$(Pr - Rp) + (Qr - Rq)y = 0.$$

由Ⅲ和Ⅳ得

$$y = \frac{Qp - Pq}{Pr - Rp} = \frac{Rp - Pr}{Qr - Rq},$$

从而

$$(Qp - Pq)(Qr - Rq) + (Pr - Rp)^2 = 0,$$

展开,得

$$P^2r^2 - 2PRpr + R^2p^2 + Q^2pr - PQqr - QRpq + PRq^2 = 0.$$

该方程的每个实根都对应一个真实交点,因为对 x 的每个实值都可以从Ⅲ和Ⅳ得到 y 的一个实值.但是当Ⅲ和Ⅳ有因式,除以因式得到不含 y 的方程时,求出这个不含 y 的方程的根,再求出这个根对应的 y 值,如果这个 y 值为虚数,那么我们就得到虚交点.

§ 480

设两条曲线的 y 分别是 x 的二值和三值函数,即方程为

Ⅰ

$$P + Qy + Ry^2 = 0,$$

Ⅱ

$$p + qy + ry^2 + sy^3 = 0.$$

分别乘Ⅰ和Ⅱ以 p 和 P,相减,再除以 y,得

Ⅲ

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + Psy^2 = 0.$$

依次记 $Pq - Qp$, $Pr - Rp$, Ps 为 p, q, r,则Ⅲ成为上节的Ⅱ,因而我们有

$$y = \frac{PQq - Q^2p - P^2r + PRp}{P^2s - PRq + QRp}$$

和

$$y = \frac{PRq - QRp - P^2s}{PQs - PRr + R^2p}.$$

从而

$$0 = (PRq - QRp - P^2s)^2 + (PQs - PRr + R^2p)(PQq - Q^2p - P^2r + PRp),$$

展开,得

$$\left.\begin{array}{l} P^4s^2-2P^3Rqs+3P^2QRps-PQR^2pq+Q^2R^2p^2 \\ \quad -P^3Qrs+P^2R^2q^2-PQ^3ps-Q^2R^2p^2 \\ \quad\quad +P^3Rr^2+P^2Q^2qs+PQ^2Rpr \\ \quad\quad\quad -P^2QRqr+PR^3p^2 \\ \quad\quad\quad\quad -2P^2R^2pr \end{array}\right\}=0.$$

删去 $Q^2R^2p^2-Q^2R^2p^2=0$,除其余各项以公因式 P,得

$$P^3s^2-2P^2Rqs-P^2Qrs+P^2Rr^2+3PQRps+PR^2q^2+PQ^2qs-$$
$$-PQRqr-2PR^2pr-QR^2pq-Q^3ps+Q^2Rpr+R^3p^2=0.$$

该方程的实根对应的 y 值也为实数时,得到的就是真实交点.

§ 481

现在讨论曲线方程的次数都为 3 的情形,即

Ⅰ

$$P+Qy+Ry^2+Sy^3=0,$$

Ⅱ

$$p+qy+ry^2+sy^3=0.$$

先分别乘Ⅰ和Ⅱ以 p 和 P,相减,得

Ⅲ

$$(Pq-Qp)+(Pr-Rp)y+(Ps-Sp)y^2=0.$$

再分别乘Ⅰ和Ⅱ以 s 和 S,相减,得

Ⅳ

$$(Sp-Ps)+(Sq-Qs)y+(Sr-Rs)y^2=0.$$

将这里的Ⅲ和Ⅳ与 § 479 的两个方程相比较,得

$$\begin{array}{l|l} P=Pp-Qp, & p=Sp-Ps, \\ Q=Pr-Rp, & q=Sq-Qs, \\ R=Ps-Sp, & r=Sr-Rs. \end{array}$$

代这些值人 § 479 的最后一个方程，得

$$(Pq-Qp)^2(Sr-Rs)^2-2(Pq-Qp)(Ps-Sp)(Sp-Ps)(Sr-Rs)$$
$$+(Ps-Sp)^2(Sp-Ps)^2+(Pr-Rp)^2(Sp-Ps)(Sr-Rs)$$
$$-(Pq-Qp)(Pr-Rp)(Sq-Qs)(Sr-Rs)$$
$$-(Pr-Rp)(Ps-Sp)(Sp-Ps)(Sq-Qs)$$
$$+(Pq-Qp)(Ps-Sp)(Sq-Qs)^2=0.$$

该方程共七项，第一第五两项之外，各项都有因式 $Sp-Ps$. 一、五两项的和可分解为两个因式，一个为 $(Pq-Qp)(Sr-Rs)$，另一个为

$$(Pq-Qp)(Sr-Rs)-(Pr-Rp)(Sq-Qs).$$

展开这另一个因式，得

$$PQrs+RSpq-PRqs-QSpr,$$

它等于 $(Sp-Ps)(Rq-Qr)$，也即一、五两项的和为

$$(Pq-Qp)(Sr-Rs)(Sp-Ps)(Rq-Qr),$$

也含有因式 $Sp-Ps$. 约去这个因式，则本节的结果方程成为

$$0=(Pq-Qp)(Sr-Rs)(Rq-Qr)+2(Pq-Qp)(Sp-Ps)(Sr-Rs)+(Sp-Ps)^3+(Pr-Rp)^2(Sr-Rs)+(Pr+Rp)(Sp-Ps)(Sq-Qs)-(Pq-Qp)(Sq-Qs)^2,$$

展开成为

$$S^3p^3-3PS^2p^2s+P^2Sr^3+2PR^2prs-P^2Rr^2s+P^2Qrs^2$$
$$+PRSq^2r-P^3s^3+3P^2Sps^2-R^3p^2s-2PRSpr^2$$
$$+R^2Sp^2r-RS^2p^2q-Q^2Rprs-PR^2q^2s-PQSqr^2$$
$$+PQRqrs+3PS^2pqr-3P^2Sqrs+PQSprs+Q^2Spr^2$$
$$+QR^2pqs-QRSpqr-3PQRps^2+3QRSp^2s-PRSpqs$$
$$+2P^2Rqs^2+2PQSq^2s-PS^2q^3-PQ^2qs^2-2QS^2p^2r$$
$$-2Q^2Spqs+Q^3ps^2+QS^2pq^2=0.$$

§ 482

为了把从两个高次方程中消去 y 这一方法解释得更清楚，我们假定两个方程的次数都为 4，即

Ⅰ

$$P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + Ty^4 = 0,$$

Ⅱ

$$p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0.$$

先分别乘Ⅰ和Ⅱ以 p 和 P，相减，得

Ⅲ

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + (Ps - Sp)y^2 + (Pt - Tp)y^3 = 0.$$

再分别乘Ⅰ和Ⅱ以 t 和 T，相减，得

Ⅳ

$$(Pt - Tp) + (Qt - Tq) + (Rt - Tr)y^2 + (St - Ts)y^3 = 0.$$

为简便起见，令

$$\begin{array}{l|l|l}
Pq - Qp = A, & Pt - Tp = a, & Sq - Qs = \alpha, \\
Pr - Rp = B, & Qt - Tq = b, & Rq - Qr = \beta. \\
Ps - Sp = C, & Rt - Tr = c, & \\
Pt - Tp = D, & St - Ts = d, &
\end{array}$$

这里应该指出，不仅有 $a = D$，并且还有

$$Ad - Cb = (Pt - Tp)(Sq - Qs) = D\alpha,$$

$$Ac - Bc = (Pt - Tp)(Rq - Qr) = D\beta.$$

换成简单表示，则Ⅲ和Ⅳ成为

Ⅲ

$$A + By + Cy^2 + Dy^3 = 0,$$

Ⅳ

$$a + by + cy^2 + dy^3 = 0.$$

先分别乘这Ⅲ和Ⅳ以 d 和 D,相减,得

Ⅴ

$$(Ad - Da) + (Bd - Db)y + (Cd - Dc)y^2 = 0.$$

再分别乘这Ⅲ和Ⅳ以 a 和 A,相减,得

Ⅵ

$$(Ab - Ba) + (Ac' - Ca)y + (Ad - Da)y^2 = 0.$$

也为简便起见,再令

$$\left.\begin{array}{l} Ab - Ba = E, \\ Ac - Ca = F, \\ Ad - Dd = G, \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} Ad - Da = e, \\ Bd - Db = f, \\ Cd - Dc = g, \end{array}\right| \; Cb - Bc = \xi,$$

这里 $G = e$ 且 $Eg - Ff = G\xi$,即 G 是 $Eg - Ff$ 的因式.换成简单表示,则Ⅴ,Ⅵ成为

Ⅴ

$$E + Fy + Gy^2 = 0,$$

Ⅵ

$$e + fy + gy^2 = 0.$$

对这两个方程进行前面做过的运算,得

Ⅶ

$$(Ef - Fe) + (Eg - Ge)y = 0,$$

Ⅷ

$$(Eg - Ge) + (Fg - Gf)y = 0.$$

最后,为简单起见,令

$$Ef - Fe = H, \quad Eg - Ge = h,$$

$$Eg - Ge = I, \quad Fg - Gf = i,$$

这里 $I = h$,Ⅶ和Ⅷ成为

Ⅶ′

$$H + Iy = 0,$$

Ⅷ′

$$h + iy = 0,$$

由这两个方程得不含 y 的方程

$$Hi - Ih = 0.$$

向后，逐次将简记符号复原，最终我们将得到只含 $P, Q, R, \cdots, p, q, r, \cdots$ 的方程，含字母 E, F, G, e, f, g 的方程被 $G = e$ 除得尽，而含字母 A, B, C, D, a, b, c, d 的方程被 $D^2 = a^2$ 除得尽. 结果方程的每一项只含 8 个字母，大小写各 4 个. 一般地，不管两个方程中 y 的次数为几，用这个方法都可消去 y，得到只含一个变量 x 的方程.

§ 483

从两个方程中消去一个未知数，虽然讲过的这种方法有着足够的通用性，我们还是要再讲一种方法，它不要求那么多层的代入. 假定两个方程的次数都任意，

Ⅰ

$$Py^m + Qy^{m-1} + Ry^{m-2} + Sy^{m-3} + \cdots = 0,$$

Ⅱ

$$py^n + qy^{n-1} + ry^{n-2} + sy^{n-3} + \cdots = 0.$$

我们要从这两个方程推出一个不含 y 的方程. 为此乘Ⅱ以

$$Py^{k-n} + Ay^{k-n-1} + By^{k-n-2} + Cy^{k-n-3} + \cdots,$$

其中待定字母 $A, B, C, \cdots$ 的个数为 $k - n$. 乘Ⅰ以

$$py^{k-m} + ay^{k-m-1} + by^{k-m-2} + ay^{k-m-3} + \cdots,$$

其中待定字母 $a, b, c, \cdots$ 的个数为 $k - m$. 然后使两个乘积相等，让 y 的同次幂的系数相等，从而相抵消. 最后剩下的不含 y 的项就给出我们所要的方程. 两个乘积的次数最高项相同，都为 Ppy^k，相抵消. 式中剩下应该对应相等的系数，每边 $k - 1$ 个，共给出 $k - 1$个用来确定待定字母的方程. 待定字母的个数为 $2k - m - n$，

它应该等于 $k-1$,因而我们令 $k=m+n-1$.

§ 484

分别乘 Ⅰ 和 Ⅱ 以系数待定表达式

$$py^{n-1}+ay^{n-2}+by^{n-3}+cy^{n-4}+\cdots,$$

和

$$Py^{m-1}+Ay^{m-2}+By^{m-3}+Cy^{m-4}+\cdots.$$

使两乘积中 y 的同次幂的系数相等,得

$$Pp=Pp,$$

$$Pa+Qp=pA+qP,$$

$$Pb+Qa+Rp=pB+qA+rP,$$

$$Pc+Qb+Ra+Sp=pC+qB+rA+sP,$$

等等.连同 $Pp=Pp$,这组等式的个数为 $m+n$.从这组等式确定出待定字母 $A,B,C,\cdots,a,b,c,\cdots$,结果方程将如我们所要求的,只含 $P,Q,R,\cdots,p,q,r,\cdots$.

§ 485

引进新的待定量 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$,可以使待定字母的确定大为简化.我们用例子对此作说明.

设给定的两个方程为

Ⅰ

$$Py^2+Qy+R=0,$$

Ⅱ

$$py^3+qy^2+ry+s=0.$$

分别乘 Ⅰ 和 Ⅱ 以 py^2+ay+b 和 $Py+A$,得

$$Pp=Pp,$$

$$Pa + Qp = pA + qP = \alpha,$$

$$Pb + Qa + Rp = qA + rP = \beta,$$

$$Qb + Ra = rA + sP,$$

$$Rb = sA.$$

去掉恒等的第一个方程,由第二个方程得

$$a = \frac{\alpha - Qp}{P},$$

$$A = \frac{\alpha - qP}{p}.$$

由第三个方程得

$$b = \frac{\beta}{P} - \frac{Qa}{P} - \frac{Rp}{P} = \frac{\beta}{P} - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P},$$

和

$$\beta = \frac{\alpha q}{p} - \frac{q^2 P}{p} + rP.$$

将 β 的这个值代入 b 的表达式,得

$$b = \frac{\alpha q}{Pp} - \frac{q^2}{p} + r - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P}$$

或

$$b = \frac{\alpha(Pq - Qp)}{P^2 p} + \frac{Q^2 p^2 - P^2 q^2}{P^2 p} + \frac{Pr - Rp}{P}.$$

代 b 的这个表达式入第四个方程,得

$$\frac{\alpha Q(Pq - Qp)}{P^2 p} - \frac{Q(Pq - Qp)(Qp + Pq)}{P^2 p} +$$

$$\frac{Q(Pr - Rp)}{P} + \frac{\alpha R}{P} - \frac{RQp}{P} = \frac{r(\alpha - qP)}{p} + sP$$

乘以 $P^2 p$,得

$$\alpha Q(Pq - Qp) + \alpha P(Rp - Pr) - Q(Pq - Qp)(Pq + Qp) +$$

$$+ PQp(Pr - 2Rp) + P^2 qr - P^3 ps = 0.$$

从而

$$\alpha = \frac{P^2Qq^2 - Q^3p^2 - P^2Qpr + 2PQRp^2 - P^3qr + P^3ps}{PQq - Q^2p + PRp - P^2r}.$$

第五个方程给出

$$\frac{\alpha R(Pq - Qp)}{P^2p} - \frac{R(P^2q^2 - Q^2p^2)}{P^2p} + \frac{R(Pr - Rp)}{P} = \frac{\alpha s}{p} - \frac{Pqs}{p},$$

从而

$$\alpha = \frac{P^2Rq^2 - Q^2Rp^2 - P^2Rpr + PR^2p^2 - P^3qs}{PRq - QRp - P^2s}.$$

α 的这两个表达式给出我们所要的方程,形状同于 § 480 所得.

第二十章

列 方 程

§ 486

前章讨论曲线的交点,主要的一环是列出高次方程.那里是从两条曲线列出一个方程,所得方程的根指出这两条曲线的交点.反之,可以从两条曲线的交点求出方程的根.当一个方程的根应该用线表示的时候,用曲线交点求根这个方法特别有用.因为画出了适用于这一目的两条曲线,就可以指出其交点,从交点向轴引垂线,垂足处的横标就是方程的根.用这种方法求出的横标都是根,但方程可以有求出横标以外的根.这是该方法的不足.

§ 487

如果给了未知量 x 的代数方程,要得到它的根,那就先求出两条曲线的变量 x,y 间的两个方程,使得从这两个方程消去纵标 y 就得到所给代数方程.然后在同轴同原点之下画求得的两条曲线,当然也就有了这两条曲线的交点.从交点向轴画垂线,垂足处

横标都为所给方程的根.只要方程不含交点以外的根,用这个方法就可以把它的根都求出来.

§ 488

我们要讲的是求两条曲线,并从求得的两条曲线列出给定方程.我们先看看求得了两条曲线之后怎样列方程.假定求得的两条线为直线 EM 和 FM,交点为 M,如图 97 所示.取直线 EF 作轴,取点 A 作原点.从 A 引轴的垂线 ABC,交 EM 于 B,交 FM 于 C.记 $AE=a$, $AF=b$, $AB=c$, $AC=d$.记横标 $AP=x$,纵标 $PM=y$.这样从直线 EM 得 $a:c=(a+x):y$,或 $ay=c(a+x)$,从直线 FM 得 $b:d=(b-x):y$,或 $by=d(b-x)$.从得到的这两个方程消去 y,得

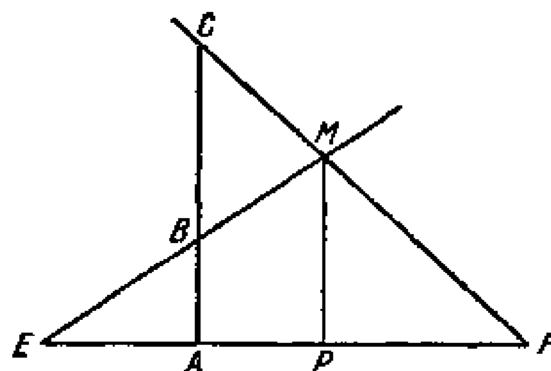


图 97

$$bc(a+x)=ad(b-x)$$

或

$$x=\frac{abd-abc}{bc+ad}=\frac{ab(d-c)}{bc+ad}.$$

这样根据两条直线的交点可列出线性方程

$$x=\frac{ab(d-c)}{bc+ad},$$

线性方程都可以化为这种形式.

§ 489

除了直线,最容易画出来的线是圆.因而接下去我们假定求得

的两条线为直线和圆，看看从它们的交点如何列出方程．取 AP 作轴，A 作原点，画直线 EM 如图 98．记 $AE=a$，$AB=b$．记坐标 $AP=x$，$PM=y$．这样我们有 $a:b=(a+x):y$，或 $ay=b(a+x)$．这是直线方程．设圆的半径 $CM=c$，从圆心 C 向轴画垂线 CD，记 $AD=f$，$CD=g$，则 $DP=x-f$，$PM-CD=y-g$．

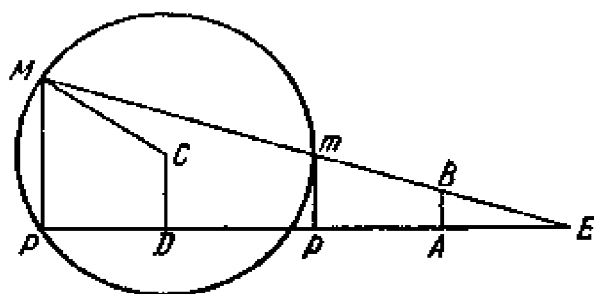


图 98

由圆的性质我们有

$$CM^2=DP^2+(PM-CD)^2,$$

由此得圆的方程

$$c^2=x^2-2fx+f^2+y^2-2gy+g^2=(x-f)^2+(y-g)^2.$$

从直线方程得 $y=\dfrac{ab+bx}{a}$，从而

$$y-g=\frac{a(b-g)+bx}{a}=b-g+\frac{bx}{a},$$

代入圆的方程，得

$$c^2=x^2-2fx+f^2+(b-g)^2+\frac{2b(b-g)x}{a}+\frac{b^2x^2}{a^2},$$

或

$$a^2x^2+2ab(b-g)x+a^2(b-g)^2+b^2x^2-2a^2fx+a^2f^2-a^2c^2=0.$$

该方程的根可从直线与圆的交点 M 和 m 求出．从 M 和 m 向轴画垂线 MP 和 mp，AP 和 Ap 都是所求的 x 值．

§ 490

上节求得的方程包含所有的二次方程，因而从它可以推出二

次方程的一般列法.设给定的二次方程为

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

乘以$\frac{a^2+b^2}{A}$,使 x^2 的系数与前节同,得

$$(a^2+b^2)x^2 + \frac{B(a^2+b^2)x}{A} + \frac{C(a^2+b^2)}{A} = 0.$$

令 x 的系数与前节方程的相等,得

$$2Aab(b-g) - 2Aa^2f = B(a^2+b^2)$$

从而

$$af = b(b-g) - \frac{B(a^2+b^2)}{2Aa}.$$

代入令常数项相等所得等式

$$a^2(b-g)^2 + a^2f^2 - a^2c^2 = \frac{C(a^2+b^2)}{A},$$

得

$$(a^2+b^2)(b-g)^2 - \frac{Bb(b-g)(a^2+b^2)}{Aa} + \frac{B^2(a^2+b^2)^2}{4A^2a^2}$$
$$- a^2c^2 = \frac{C(a^2+b^2)}{A}$$

从而

$$(b-g)^2 = \frac{Bb(b-g)}{Aa} - \frac{B^2(a^2+b^2)}{4A^2a^2} + \frac{a^2c^2}{a^2+b^2} + \frac{C}{A},$$

进而

$$b - g = \frac{Bb}{2Aa} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}}.$$

a,b,c 尚未确定,应取这三个量使得

$$\frac{a^2c^2}{a^2+b^2} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2} + \frac{B^2b^2}{4A^2a^2}$$

为正.否则,$b-g$,也即 CD 为虚数.

§ 491

无妨令 $b=0$,这样则

$$g=\sqrt{c^2+\frac{-B^2+4AC}{4A^2}},\quad f=-\frac{B}{2A}.$$

方程 $Ax^2+Bx+C=0$ 应该有实根,因而 $B^2>4AC$,$\frac{B^2-4AC}{4A^2}$为正,令这正数等于 c^2,则由

$$c=\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A},$$

得 $g=0$,a 不再需要计算.因而直线 EM 与轴 AP 重合.在

$$AD=-\frac{B}{2A}$$

的条件下,圆心与点 D 重合.以这个圆心为圆心,以

$$c=\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

为半径的圆与轴的交点,就是我们的方程的根.为避免列出的方程中出现无理式,令 $g=c-\frac{k}{2A}$,则

$$c^2-\frac{2ck}{2A}+\frac{k^2}{4A^2}=c^2+\frac{-B^2+4AC}{4A^2},$$

从而

$$c=\frac{k^2+B^2-4AC}{4kA},g=\frac{B^2-4AC-k^2}{4kA}.$$

这样还有一个量 k 任我们选定.不管 k 取什么值,由于 CM 在轴上,所以圆的画法都应如下:取 $AD=-\frac{B}{2A}$,作垂线 $CD=\frac{B^2-4AC-k^2}{4Ak}$,以 C 为心,$\frac{B^2-4AC+k^2}{4Ak}$为半径画圆.这个圆与轴

的交点就是我们的方程的根．如果令 $k=-B$，取 $AD=-\frac{B}{2A}$，则 $CD=\frac{C}{B}$，以 C 为心所画圆的半径为

$$\frac{-B^2+2AC}{2AB}=-\frac{B}{2A}+\frac{C}{B},$$

等于 $AD+CD$．这个方法在实用上是很方便的．

§ 492

现在考虑相交的两个圆，如图 99 所示．对第一个圆，记 $AD=a$，$CD=b$，记半径 $CM=c$．那么如果令 $AP=x$，$PM=y$，则

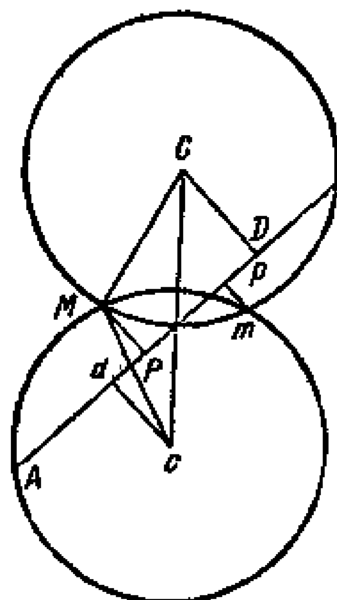


图 99

$$DP=a-x,\ CD-PM=b-y.$$

从而由圆的性质得

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=c^2.$$

类似地，对第二个圆，记 $Ad=f$，$dc=g$，记半径 $cM=h$，得

$$x^2-2fx+f^2+y^2+2gy+g^2=h^2.$$

这两个方程相减，得

$$2(f-a)x+a^2-f^2-2(b+g)y+b^2-g^2=c^2-h^2,$$

从而

$$y=\frac{a^2+b^2-f^2-g^2-c^2+h^2-2(a-f)x}{2(b+g)}$$

进而

$$b-y=\frac{b^2+2bg-a^2+f^2+g^2+c^2-h^2+2(a-f)x}{2(b+g)}.$$

又

$$a-x=\frac{2a(b+g)-2(b+g)x}{2(b+g)}.$$

代入已知等式$(a-x)^2+(b-y)^2=c^2$，得

$$+4(a-f)^2x^2-4(a+f)(b+g)^2x+(b+g)^4$$
$$+2(a^2-c^2)(b+g)^2+$$
$$4(b+g)^2x^2-4(a-f)(a^2-f^2)x+2(f^2-h^2)(b+g)^2$$
$$+4(a-f)(c^2-h^2)x+(a^2-c^2-f^2+h^2)^2=0.$$

可见，用上面导出的方程列出方程

$$Ax^2+Bx+C=0$$

的方式有无穷多种，但要记住，次数高于2的方程不能用两个圆的交点列出，因为两个圆的交点最多为两个．同一个二次方程，既可用直线与圆相交列出，亦可用两圆相交列出．当然，除非两圆情况下的 a,b,f,g,c,h 极易确定，人们更喜欢的是用直线与圆．

§ 493

现在我们考虑圆与抛物线的相交．参见图100，从圆心 C 向 AP 引垂线 CD，记 $AD=a$，$CD=b$，记圆的半径 $CM=c$，那么在直角坐标 $AP=x$，$PM=y$ 之下，该圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$．设抛物线的轴 FB 垂直于轴 AP，记 $AE=f$，$EF=g$，记抛物线参数为 $2h$，那么由抛物线的性质得 $EP^2=2h(EF+PM)$，或者使我们的记号为$(x-f)^2=2h(g+y)$，从而

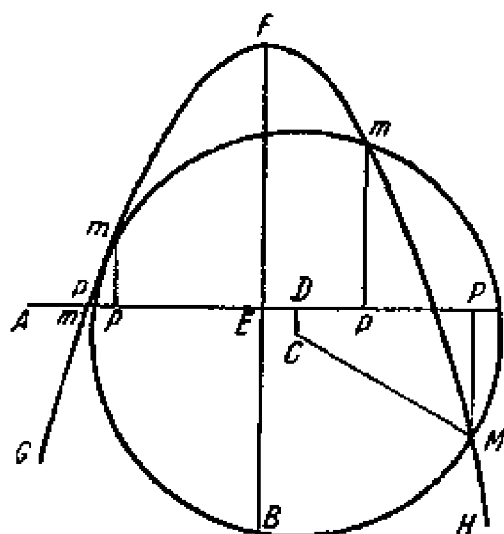


图 100

$$y=\frac{(x-f)^2}{2h}-g,\quad y-b=\frac{(x-f)^2}{2h}-(b+g).$$

代这个值入圆的方程，y 消去，得

$$\frac{(x-f)^4}{4h^2}-\frac{(b+g)(x-f)^2}{h}+(b+g)^2+(x-a)^2=c^2$$

或

$$\begin{array}{llll} x^4-4fx^3+6f^2x^2 & -4f^3x & +f^4 & =0. \\ \quad -4h(b+g) & +8fh(b+g) & -4f^2h(b+g) & \\ \quad +4h^2 & -8ah^2 & +4h^2(b+g)^2 & \\ & & +4a^2h^2 & \\ & & -4c^2h^2 & \end{array}$$

横标 AP, Ap, Ap, Ap 就是这个方程的根，纵标过交点 M, m, m, m.

§ 494

该方程含六个常数，a, b, c, f, g, h，但 b, g 以 $b+g$ 形式出现，视 $b+g$ 为一个常数，那就成了五个常数. 令 $CD+EF=b+g=k$，则方程成为

$$\left.\begin{array}{r} x^4-4fx^3+6f^2x^2-4f^3x+f^4 \\ -4hk+8fhk-4f^2hk \\ +4h^2-8ah^2+4h^2k^2 \\ +4a^2h^2 \\ -4c^2h^2 \end{array}\right\}=0.$$

凡四次方程都可化成这种形式. 事实上，设给定的方程为

$$x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D=0,$$

比较系数，从

$$4f=A，得\ f=\frac{1}{4}A,$$

从

$$6f^2-4hk+4h^2=B, 得 \frac{3}{8}A^2-4hk+4h^2=B,$$

进而

$$k=\frac{3A^2}{32h}+h-\frac{B}{4h},$$

从

$$4f^3-8fhk+8ah^2=C,$$

得

$$\frac{1}{16}A^3-\frac{3}{16}A^3-Ah^2+\frac{1}{2}AB+8ah^2=C,$$

进而

$$a=\frac{A^3}{64h^2}+\frac{A}{4}-\frac{AB}{16h^2}+\frac{C}{8h^2}.$$

最后,使常数项相等得

$$(f^2-2hk)^2+4a^2h^2-4c^2h^2=D.$$

但

$$f^2-2hk=\frac{B}{2}-2h^2-\frac{A^2}{8},$$

$$2ah=\frac{A^3}{32h}+\frac{Ah}{2}-\frac{AB}{8A}+\frac{C}{4h},$$

将这两个值代入上式,得 c,h 间方程. 从所得方程易于解出 c,h,取它们的实值.

§ 495

四次方程的第二项都可消去. 下面我们讨论消去了第二项的方程

$$x^4 * +Bx^2-Cx+D=0.$$

此时我们有 1. $f=0$, 2. $k=h-\frac{B}{2h}$, 3. $a=\frac{C}{8h^2}$, 4. 由

$$2hk-f^2=2h^2-\frac{B}{2},\quad 2ah=\frac{C}{4h},$$

得

$$4h^4-2Bh^2+\frac{1}{4}B^2+\frac{C^2}{16h^2}-4c^2h^2=D,$$

去分母,得

$$64c^2h^4=C^2+4B^2h^2-32Bh^4+64h^6-16Dh^2$$

开方,得

$$8ch^2=\sqrt{4h^2(B-4h^2)^2+C^2-16Dh^2}.$$

应保证 c,h 都为实数,令 $c=h-\frac{B+q}{4h}$,得

$$C^2-16Dh^2-8Bh^2q+32h^4q-4h^2q^2=0.$$

为满足所提要求,分 D 为正为负两种情形进行考虑.

Ⅰ

D 为正,设 $D=E^2$,则要列出的方程为

$$x^4+Bx^2-Cx+E^2=0.$$

令 $q=0$,得 $c=\frac{4h^2-B}{4h}$,$h^2=\frac{C^2}{16E^2}$,$h=\frac{C}{4E}$,从而

$$c=\frac{C^2-4BE}{4CE}$$

且

$$k=c=\frac{C^2-4BE}{4CE},a=\frac{2E^2}{C},f=0.$$

Ⅱ

D 为负,设 $D=-E^2$,要列出的方程为

$$x^4+Bx^2-Cx-E^2=0,$$

我们有

$$64c^2h^4=C^2+4h^2(4h^2-B)^2+16E^2h^2,$$

由

$$c=\frac{\sqrt{C^2+4h^2(4h^2-B)^2+16E^2h^2}}{8h^2}$$

知，不管 h 取什么值，该方程给出的 c 都为实数，因而 h 可以任取．这样在每种情况下我们都取 h，使得 c 最容易求得．

这样做了之后，跟过去一样，我们有

$$AE=f=0,\ CD+EF=k=\frac{4h^2-B}{4h},$$

$$AD=a=\frac{C}{8h^2}.$$

如果 $E=0$，则要列出的方程为

$$x^3+Bx+C=0.$$

该方程的列出依赖有名的 *Backer* 规则．

§ 496

任取两条二阶线，也即两条圆锥曲线，它们关于同一根轴、同一个横标原点的方程可写成

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0,$$

$$\alpha y^2+\beta yx+\gamma x^2+\delta y+\varepsilon x+\zeta=0.$$

我们用前面讲过的方法来消去 y，为此将这两个方程与 § 479 的两个方程

$$P+Qy+Ry^2=0,$$

$$p+qy+ry^2=0,$$

相比较．我们看到，P，p 是 x 的二次函数，Q，q 是 x 的一次函数，R，r 是常数．可见作为结果的那个方程将是双二次的．这样，从两条圆锥曲线的交就列不出次数高于双二次的方程．前面讲了从圆和抛物线的交列出的是双二次方程．二阶线与一条直线可以有两个交点，与两条直线可以有四个交点．两条直线作为整体可看成为一条二阶线．由此可见，两条二阶线可以有四个交点．

§ 497

现在我们考虑一条二阶线和一条三阶线的交.这两条线的方程为

$$P+Qy+Ry^2=0,$$
$$p+qy+ry^2+sy^3=0.$$

这里 P,Q 依次是 x 的二次和一次函数,R 是常数;p,q,r 依次是 x 的三,二,一次函数,s 是常数.从 § 480 的讨论我们看到,从这两个方程消去 y,所得方程是六阶的.可见从圆锥曲线与三阶线的交列不出次数高于 6 的方程.这一结论也可以从三阶线的性质推出,三阶线与一条直线有三个交点,两条直线作为整体可视为一条二阶线,这二阶线与三阶线的交点是 6 个.

§ 498

将前面讲的消去 y 的方法或与直线相交的方法应用到更高阶方程上去,显然地我们得到,从两条三阶线的交可列出 9 阶方程,从两条四阶线的交可列出不高于 16 阶的方程.一般地,从阶数分别为 m 和 n 的两条曲线的交可列出阶数不高于 mn 的各阶方程.例如,我们要列出 100 阶方程,这时的两条曲线,可以都是 10 阶的,可以一个 20 阶的和一个 5 阶的,等等.只要这两个阶数的乘积等于 100,就都可以.如果要列出的方程的阶数是素数,或者是没有方便因数的数,那么利用从列出的方程可列出阶数比它低的各阶方程这一点,可取两个方便的,但积大于要列出的方程的阶数大的因数,并列出相应的方程.例如,对 39 阶方程,可以取阶数为 6 和 7 的两条曲线,从这两条曲线可列出 42 阶方程.这比从 3 阶和 13 阶曲线列出 39 阶方程要简单.

§ 499

可见,从交点横标为所给方程实根的两条曲线,列出所给方程,这方式有很多种,甚至有无穷多种.在这无穷多种方式中,我们取两条最简单最容易画出的曲线.当然首先要交点给出的根都为实数.没有虚交点的两条曲线即可满足这一要求.前面我们看到了,一条曲线方程中的纵标 y 可表示成横标 x 的线性函数时,交点就都是实的.由于这条单值的纵标都是实的,所以不管另一条曲线有多少个虚纵标,它们也不会有虚交点.在列方程的过程中,我们总取一条曲线的方程为 $P+Qy=0$,P 和 Q 都是 x 的某个函数.

§ 500

这样,不管给定的方程是什么,我们都取两条曲线中的一条,其方程的形状为 $P+Qy=0$.另一条的方程应该是这样的,换 y 为 $-\frac{P}{Q}$ 就成为给定方程.由此可见,反过来,换给定方程中的 $-\frac{P}{Q}$ 为 y,得到的就是另一条曲线的方程.例如,给定的方程为

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0,$$

我们取方程 $ay=x^2+bx$.表示的抛物线作两条曲线中的一条.由这抛物线方程得 $x^2=ay-bx$ 代入给定方程的四次和三次项,得

$$\begin{aligned} x^4 &= a^2y^2-2abxy+b^2x^2, \\ Ax^3 &= \qquad\quad +Aaxy-Abx^2 \end{aligned}$$

最后得二阶线方程

$$a^2y^2+a(A-2b)xy+(B-Ab+b^2)x^2+Cx+D=0,$$

该曲线与曲线 $ay=x^2+bx$ 的交点的横标是给定方程的根.

§ 501

上节的两条曲线，常量 a, b 可为任意值，因而有无穷多种变化. 我们可以进一步增加这无穷多种变化. 事实上，由第一个方程得 $x^2 - ay + bx = 0$，由该方程得 $acx^2 - a^2cy + abcx = 0$，把这个方程加到第二个方程上去，得到二阶线的更为一般的方程. 它同第一条曲线的交点同样指出给定方程的根. 这样用来列方程的两条曲线，其方程就成了

Ⅰ

$$ay = x^2 + bx,$$

Ⅱ

$$a^2y^2 + a(A-2b)xy + (B - Ab + b^2 + ac)x^2 - a^2cy + (C + abc)x + D = 0.$$

方程Ⅱ包含所有的圆锥曲线. 应特别注意量

$$A^2 - 4B - 4ac,$$

它为正，为零，为负，曲线依次为双曲线，为抛物线，为椭圆. 如果

$$b = \frac{1}{2}A,\ a^2 = B - \frac{1}{4}A^2 + ac,$$

从而

$$c = a + \frac{A^2}{4a} - \frac{B}{a},$$

则曲线为圆. 此时方程为

$$a^2y^2 + a^2x^2 - \left(a^3 + \frac{A^2a}{4} - Ba\right)y + \left(C + \frac{A^2a}{2} + \frac{A^3}{8} - \frac{AB}{2}\right)x + D = 0,$$

也即

$$\left(y - \frac{a}{2} - \frac{A}{8} + \frac{B}{2a}\right)^2 + \left(x + \frac{c}{2a^2} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16a^2} - \frac{AB}{4a^2}\right)^2 =$$

$$=\left(\frac{a}{2}+\frac{A}{8}-\frac{B}{2a}\right)^2+\left(\frac{C}{2a^2}+\frac{A}{4}+\frac{A^3}{16a^2}-\frac{AB}{4a^2}\right)^2-\frac{D}{a^2},$$

右端是圆半径的平方.

§ 502

这样我们就有无穷多条圆锥曲线,它们同抛物线 $ay = x^2 + bx$ 的交点,都给出给定方程的根.从这无穷多条中任取两条,当然这每一条与 $ay = x^2 + bx$ 的交点都给出给定方程的根;因而任取的这两条的交点也给出给定方程的根.这样,从圆和抛物线可列出给定方程(这是我们讨论过的),从两条抛物线,从一条抛物线与一个椭圆或一条双曲线,从两个椭圆,从一个椭圆与一条抛物线也都可以列出给定方程.如果对更高阶曲线应用这一方法,那列出给定方程的方式将大为增加.

§ 503

类似地,取方程为 $y = P$ 的抛物线作两条曲线中的第一条,可以列出更高阶的方程.例如,要列出的方程为

$$x^{12}-f^{10}x^2+f^9gx-g^{12}=0,$$

取四阶抛物方程 $x^4 = a^3y$ 作第一条,那么将 $x^{12} = a^9y^3$ 代入,得三阶方程

$$a^9y^3-f^{10}x^2+f^9gx-g^{12}=0,$$

将第一个方程 $x^4 - a^3y = 0$ 的某个倍数加到这个方程上去,可得到无穷多条四阶线,其中任何两条都给出所给方程的根.

§ 504

如果用上面的方法列出给定方程时不那么容易,可乘给定方程以 x,或者 x^2,或者 x^3,或者 x 的某个更高次幂.这增加了为零

的根，这种根对应的交点，其横标为原点，易于从给定方程的真根中区别出来.这样给定方程的次数增加了，但往往却变得容易列出.例如，给定的为三次方程

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0,$$

令 $x^2=ay$，这里一条曲线为抛物线，另一条必为双曲线.事实上，换 x^2 为 ay，得

$$axy+Aay+Bx+C=0,$$

将 $cx^2-acy=0$ 加上去，得更一般的方程

$$axy+cx^2+a(A-c)y+Bx+C=0,$$

它也恒为双曲线方程.因而利用圆，椭圆或抛物线将更为方便.此时要乘给定方程以 x，得

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx=0.$$

将这个方程与前面列出的双二次方程相比较，得 $D=0$.这个方程恒可以用圆和抛物线列出.

§ 505

由于任何阶的任何方程都可以用两条代数曲线的交点列出，且方式有无穷多种，因面可用任何一条曲线代替另一曲线.这就产生一个问题，怎样才能保证给定方程能借助一条给定曲线列出.这里首先应该指出，给定曲线应该是这样的，它的纵标可表示成 x 的单值函数，以保证列方程的过程中不产生虚交点.当我们关心的只是给定方程的一个根时，通常要加上这个条件.有这样的情形，虽然对应于曲线的一段弧上某个点的横标是真根，但是这段弧没有交点.所以如此，是由于这根对应的是虚交点，或者对应的是曲线的另一个分枝的交点.列方程，这是一个虽有意思但用途不大的问题.有关它的基础性的东西我们已经讲得够详细，对这个问题的讨论不再继续.

第二十一章

超越曲线

§ 506

到现在为止，我们讨论的都是代数曲线．代数曲线的特点是：在任何轴上取定了横标，则对应的纵标都是横标的代数函数，或者横标与纵标之间的关系由代数方程表示．这就是说，如果纵标不能用横标的代数函数表示，曲线就不是代数曲线．非代数曲线统称之为超越曲线．也即横纵标间关系不能用代数方程表示的曲线叫超越曲线．这样，只要纵标 y 是 x 的超越函数，曲线就是超越的．

§ 507

上册我们讨论了两类超越函数，即对数函数和三角函数．如果纵标 y 等于横标 x 的对数；或者纵标 y 等于用横 x 的正弦或余弦或正切表示的圆弧，即 $y = \lg x$，$y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \operatorname{arctg} x$；再或者这对数这圆弧含于 x, y 间的方程．这三种情况下曲线都是超越的．但这只是超越曲线中的几种．这几种之外还有无穷多个超

越表达式,它们的产生在无穷分析中详细讲解.超越曲线的数目比代数曲线要多许多倍.

§ 508

代数函数以外的函数都是超越函数,含超越函数的方程表示的都是超越曲线.代数方程,或者是有理的,不含整数指数以外的指数;或者是无理的,含分数指数.但无理代数方程都可化成有理的.这样,只要 x,y 间的方程不是有理的,也不能化成有理的,它表示的曲线就是超越的.因而,如果一个方程中含有这样的幂,其指数既不是整数也不是分数,而且用任何方式也不能化它为有理数,那么这方程表示的曲线就是超越的.由此我们得到第一类,也是最简单的一类超越曲线,即方程中含有无理指数的超越曲线.这种方程既不含对数也不含圆弧,纯粹是从无理数概念产生的,在很大程度上这属于几何.莱布尼兹称这种曲线为次超越的,意思是它处在代数曲线与超越曲线之间.

§ 509

方程 $y=x^{\sqrt{2}}$表示的就是次超越曲线,因为没有方法可以把这个方程化成有理的.几何上也没有办法可以把它表示的曲线画出来.几何上画不出有理指数幂以外的幂.可见这类曲线与代数曲线的差别极大.如果想近似地画出该曲线,可以取$\sqrt{2}$的近似值

$$\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{17}{12},\frac{41}{29},\frac{96}{70},\cdots$$

中的一个来代替$\sqrt{2}$,那么我们就得到靠近该曲线的代数曲线.这代数曲线的阶数,可以或者是 3,或者是 7,或者是 17,或者是 41,等等.因为$\sqrt{2}$可以用分子分母都是无穷大的分数有理表示,所以应该

认为 $y=x^{\sqrt{2}}$表示的是无穷大阶曲线，也即它不是代数曲线．此外，$\sqrt{2}$有两个值，一正一负，对应地得到两个 y 值，也就得到两条曲线．

§ 510

如果要准确地画出这条曲线，那就必须借助于对数．对 $y=x^{\sqrt{2}}$取对数，得 $\lg y=\sqrt{2}\lg x$，即横标的对数乘$\sqrt{2}$等于纵标的对数．因而对横标 x 的每一个值，我们都可以利用对数表得到对应的 y 值．例如 $x=0$，则 $y=0$；$x=1$，则 $y=1$．这两个值都容易从方程得到；$x=2$，则 $\lg y=\sqrt{2}\lg 2=\sqrt{2}\cdot 0.3010300$，将$\sqrt{2}=1.41421356$ 代入，得 $\lg y=0.4257207$．由此近似地有 $y=2.665144$；$x=10$，得 $\lg y=1.41421356$，由此得 $y=25.954554$．用这样的方法，对每一个横标 x 我们都可以算出对应的纵标 y，也就可以画出曲线．这里一个前提是横标 x 都为正．如果 x 取负值，那就确定不了 y 值是实数还是虚数．例如 $x=-1$ 时，就确定不了$(-1)^{\sqrt{2}}$是实数还是虚数，此时$\sqrt{2}$的近似值帮不了忙．

§ 511

含有虚指数的方程表示的曲线是超越的，这疑问就更小．但是含虚数指数的表达式表示的可以是确定的实数值．我们已经见过这样的例子，这里再举一个．设

$$2y=x^{+\sqrt{-1}}+x^{-\sqrt{-1}},$$

这里虽然 $x^{+\sqrt{-1}}$和 $x^{-\sqrt{-1}}$都是虚量，但它们的和是实数．事实上，设 x 的双曲对数 $\ln x=v$，记双曲对数为 1 的数为 e，则 $x=e^{v}$．代入所给方程，得

$$2y = e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}.$$

上册 § 138 推出了

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} = \cos v,$$

从而

$$y = \cos v = \cos \ln x.$$

这样,对给定的 x 值,先取它的双曲对数,再在半径为 1 的圆上截一段等于这个对数的弧,那么这段弧的余弦就是纵标 y 的值.例如,取 $x = 2$,即

$$2y = 2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}},$$

则

$$y = \cos \ln 2 = \cos 0.6931471805599.$$

由等于 3.1415926535 的弧所对角为 180°,利用黄金规则得等于 log2 的弧所对角为 39° 41′ 51″ 52‴ 8″″,它的余弦等于 0.76923890136400.这个数就是横标 $x = 2$ 所对应的纵标 y 的值.这类表达式既含对数又含圆弧,当然是超越的.

§ 512

这样,超越曲线中占第一位的是,其方程在代数量之外还含有对数的曲线.这种曲线中最简单的,其方程为

$$\log \frac{y}{a} = \frac{x}{b} \text{或} x = b\log \frac{y}{a},$$

这里对数取哪一种都可以,因为用乘以常数 b 的方法都可以把它们化成同一种.用 log 表示双曲对数,方程 $x = b\log \frac{y}{a}$ 表示的曲线叫对数曲线.记双曲对数为 1 的数为 e,

$e = 2.718281828459045235360 28$,则

$$e^{x:b}=\frac{y}{a}\text{或}y=ae^{x:b},$$

从这个方程易于看出对数曲线的性质.事实上,依次用成算术级数的数代 x,则对应的 y 为成几何级数的数,为便于作图,令

$$e=m^n, b=nc,$$

则

$$y=am^{x:c},$$

其中 m 为大于 1 的任何数.取 x 为

$$x=0,c,2c,3c,4c,5c,6c,\cdots,$$

则 y 为

$$y=a,am,am^2,am^3,am^4,am^5,am^6,\cdots,$$

取 x 为负值

$$x=-c,-2c,-3c,-4c,-5c,\cdots,$$

则 y 为

$$y=\frac{a}{m},\frac{a}{m^2},\frac{a}{m^3},\frac{a}{m^4},\frac{a}{m^5},\cdots.$$

§ 513

由此可见,纵标 y 恒正,且随横标 x 增加到正无穷而增长到无穷,如图 101 所示.横标 x 减小到负无穷时,轴 Ap 成为曲线的渐近线.取 A 作横标原点,记此处纵标 $AB=a$,记横标 $AP=x$,则纵标

$$PM=y=am^{x:c}=ae^{x:b}$$

从而

$$\log\frac{y}{a}=\frac{x}{b},$$

即横标 AP 除以 b,得到的商等于比 $\frac{PM}{AB}$ 的对数.任取轴上另外一点

a 作原点,方程的形状不变.事实上,记 Aa 为 f,记 aP 为 t,则由 $x = t - f$ 得

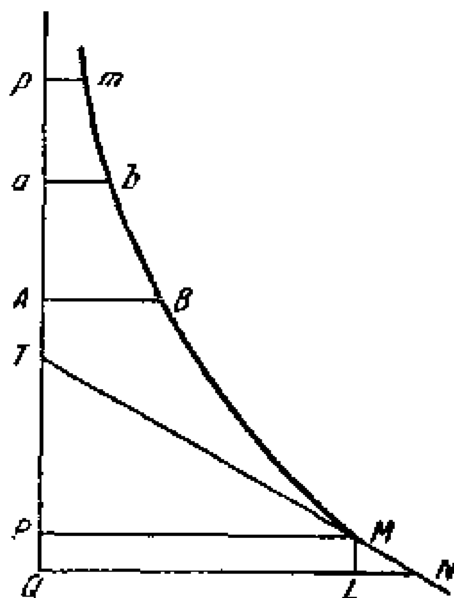


图 101

$$y = ae^{(t-f):b} = ae^{t:b} : e^{f:b}.$$

记常数 $a:e^{f:b}$ 为 g,则 $y = ge^{t:b}$.由 $ab = g$ 得

$$\frac{aP}{b} = \log\frac{PM}{ab},$$

因而对任何两条距离为 Pp 的纵标 PM 和 pm 我们有

$$\frac{Pp}{b} = \log\frac{PM}{pm}.$$

式中的常数 b 类似于对数参数.

§ 514

对数曲线任何一点 M 处的切线都易于确定.事实上,记点 M 的横标 $AP = x$,则 M 点的纵标 $PM = ae^{x:b}$.对任何另外的纵标 QN 我们有

$$QN = ae^{(x+u):b} = ae^{x:b} \cdot e^{u:b},$$

u 为 PM 至 QN 的距离，即 $PQ = u$. 对平行于轴的直线 ML，有

$$LN = (QN - PM) = ae^{x:b}(e^{u:b} - 1).$$

过 N，M 画直线 NMT，交轴于 T，则

$$LN : ML = PM : PT,$$

从而

$$PT = u : (e^{u:b} - 1).$$

上册我们证明了

$$e^{u:b} = 1 + \frac{u}{b} + \frac{u^2}{2b^2} + \frac{u^3}{6b^3} + \cdots,$$

从而

$$PT = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{u}{2b^2} + \frac{u^2}{6b^3} + \cdots}.$$

区间 $PQ = u$ 为零时点 M 与 N 重合，直线 NMT 就成了曲线的切线，次切距 $PT = b$ 为常数. 这是对数曲线的一条美妙的性质，即次切距为常数，恒等于对数参数 b.

§ 515

这里产生一个问题，这样画出来的对数曲线完整吗？在图 101 上画出来的分支 MBm 之外还有没有从轴的另一侧趋向无穷的分支. 前面讲了，凡渐近线都有两个分支收敛于它. 因此有人推定，对数曲线由位于轴两侧的类似的两部分组成. 因而渐近线同时也是直径. 但从方程 $y = ae^{x:b}$完全看不出这一点. 因为当$\frac{x}{b}$为整数或者为分母是奇数的分数时，y 都有一个实值，并且是正的. 但是当$\frac{x}{b}$为分母是偶数的分数时，y 有两个值，一正一负，负值给出的点在渐近线的另一侧. 由此可见，对数曲线在渐近线的另一侧还有

一个由离散点组成的无穷集合.虽然相邻离散点间的距离无限的小,给人一种它们是线一样连续的印象,但它们并不构成连续曲线.这是难以置信的,是悖论,对代数曲线是不会产生的.这里还有更加难以置信的另一个悖论.负数的对数是虚数(这是明显的,另外也可以从 $\log(-1)$ 比 $\sqrt{-1}$ 为有限数得到证实),因而 $\log(-n)$ 是虚数,记它为 i.一个数的平方的对数等于这个数自身对数的两倍,因而我们有 $\log(-n)^2=2\log(-n)=2i$.但 $\log n^2$ 是实数,等于 $2\log n$.可见实数 $\log n^2$ 的一半为实数 $\log n$,另一半为虚数 i.由此前进一步,每个数都由不同的两部分组成,一实一虚,各等于原数的一半.类似地,每个数都由不同的三部分组成,各等于原数的三分之一;每个数都由四部分组成,各等于原数的四分之一.类推,这不同的部分中只有一部分是实数.这一点如何与数的通常概念相一致,还不清楚.

§ 516

如果承认前面所说,则数 a 的两半为 $\frac{a}{2}+\log(-1)$ 和 $\frac{a}{2}$,因为前半的两倍等于

$$a+2\log(-1)=a+\log(-1)^2=a+\log 1=a.$$

这里应该指出,虽然 $\log(-1)\neq 0$,但

$$+\log(-1)=-\log(-1).$$

事实上,由 $-1=\frac{+1}{-1}$ 得

$$\log(-1)=\log(+1)-\log(-1)=-\log(-1).$$

类似地,由 $\sqrt[3]{1}$ 不仅仅是 1,并且是 $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$,我们有

$$3\log\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\log 1=0$$

从而数 a 的三个三分之一为

$$\frac{a}{3},\frac{a}{3}+\log\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\text{和}\frac{a}{3}+\log\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

这每个三分之一的三倍都等于 a. 这看上去是不能接受的. 为消除疑问我们提出再一个难以置信的情形:每个数都有无穷多个对数,其中只有一个是实的. 例如 1 的对数,在零之外就还有

$$2\log(-1),3\log\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},4\log(-1)\text{和}4\log(\pm\sqrt{-1})$$

等无穷多个虚数,它们都可以从 1 开方得到. 下面的考虑使得这里的情形比前面要直观. 设 $x=\log a$,则 $a=e^x$. 从而

$$a=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{24}+\cdots.$$

这个方程的次数为无穷,因面有无穷多个根就不足为奇了. 这样我们就解决了最后这个难以置信,但第一个难以置信,即对数曲线在轴的另一侧有无穷多个离散点,还仍然难以置信.

§ 517

但是,借助方程 $y=(-1)^x$ 可对无穷多个这种点的存在进行明显得多的证明. x 是偶数或分子为偶数的分数时 y 都等于 1. x 是奇数或分子分母都为奇数的分数时 y 都等于 -1. 在其余情况下,即 x 为分母为偶数的分数或无理数时 y 都为虚数. 可见,方程 $y=(-1)^x$ 给出无穷多个离散点. 它们位于轴的两侧,至轴的距离都为 1,它们中任何两个都不相接,又任何相邻的两个的距离都小于任何给定的正数. 横标的两个值,不管离得多近,它们中间都有不只一个,而是无穷多个分母是奇数的分数. 这每一个分数都给出满足所给方程的一个点. 这些点位于平行于轴至轴的距离为 1 的两条直线上. 这两条直线上没有不含方程 $y=(-1)^x$ 的离散点的区间. 事实上是,这两条直线上的每一个区间都含有方程 $y=$

$(-1)^x$的无穷多个离散点.这种异常情形也发生于方程 $y=(-a)^x$ 和与这个方程类似的其它方程,即 y 等于负数的变指数幂的方程.应该指出这种异常情形只产生于超越曲线.

§ 518

含变指数的方程,也即由对数方程化成的方程,它们表示的曲线叫指数曲线,指数曲线也具有对数曲线的性质.例如,方程 $y=x^x$,也即 $\log y=x\log x$ 所表示的曲线即为指数曲线. $x=0$,则 $y=1$; $x=1$,则 $y=1$; $x=2$,则 $y=4$; $x=3$,则 $y=27$; $\cdots$.图 102 上 BDM 是该曲线关于轴 AP 的图形.取 $AC=1$,则 $AB=CD=1$. A、C 之间的点对应的纵标都小于 1.例如 $x=\frac{1}{2}$时

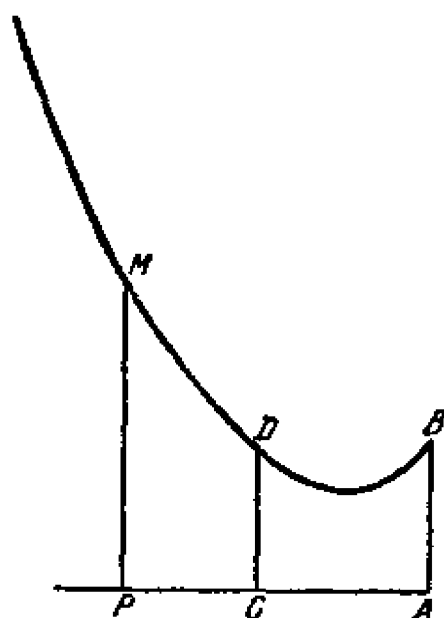


图 102

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}=0.7071068,$$

横标

$$x=\frac{1}{e}=0.36787944.$$

时纵标 $y=0.6922005$,为最小值,这一点后面将给以证明.为考察该曲线在 B 点另一侧的情形,应使 x 值为负,则 $y=\frac{1}{(-x)^x}$.从而曲线的这一部分完全由收敛于轴的离散点组成,这里的收敛同于向渐近线的收敛.这些点因 x 的奇偶而位于轴的两侧.又,对应于 x 为分母为偶数的分数,也有无穷多个离散点落在 AP 轴之下.偶

如，$x=\frac{1}{2}$时，$y=+\frac{1}{\sqrt{2}}$，$y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

这样，连续曲线 MDB 从点 B 处开始一反代数曲线的性质，突然中断，改由离散点组成.这里我们更清楚地看到了位于直线两侧至直线距离相等的点的存在.如果不承认它们存在，那就得承认整个曲线在点 B 处突然中止.这与连续规律矛盾.

§ 519

在可借助对数画出其图形的另外无穷多条曲线中，有些借助对数实现起来不那么容易，但可借助适当的代换使得容易实现.方程

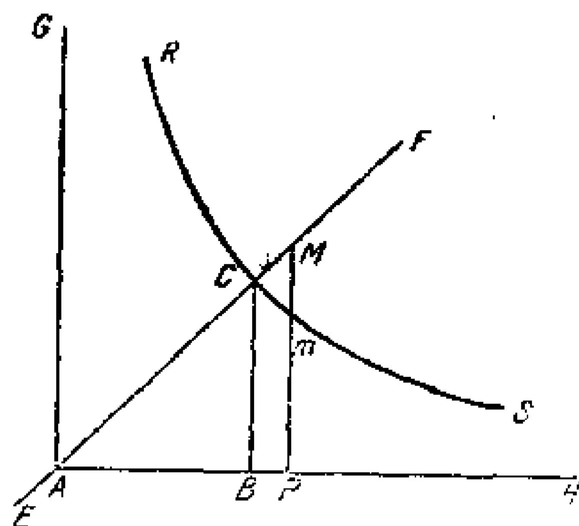


图 103

$$x^y=y^x$$

表示的曲线就是这样的.由方程显然可见，纵标 y 等于横标 x 时，即在与轴成半直角的直线上方程满足.我们还看到方程 $x^y=y^x$ 比 $x=y$ 更一般.后者是前者的一部分，满足前者的坐标可以不满足后者，例如 $x=2$，$y=4$ 就是，因而如图 103 所示，所给方程除了直线 EAF 必定还有另外的分支.为了求出这另外的分支，以得到方程所示的整个曲线，我们令 $y=tx$，得 $x^{tx}=t^xx^x$，开 x 次方得

$$x^t=tx \text{ 或 } x^{t-1}=t,$$

也即

$$x=\frac{1}{t^{t-1}}\text{或 } y=\frac{t}{t^{t-1}}.$$

令 $t-1=\frac{1}{u}$,则

$$x=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} \text{ 或 } y=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1}.$$

这样,除了直线 EAF,就还有分支 RS. 这 RS 渐近于直线 AG 和 AH,并且以 AF 为直径,RS 交 AF 于 C,从而 $AB=BC=e$,e 是对数为 1 的数. 此外还有满足所给方程的无穷多个离散点. 这离散点与直线 AF 以及曲线 RS 合起来构成满足方程的全体. 可见有无穷多个由 x 和 y 构成的数对满足方程 $x^y=y^x$. 下面是这种有理数对中的几个

$$x=2, \qquad y=4,$$

$$x=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}, \qquad y=\frac{3^3}{2^3}=\frac{27}{8},$$

$$x=\frac{4^3}{3^3}=\frac{64}{27}, \qquad y=\frac{4^4}{3^4}=\frac{256}{81},$$

$$x=\frac{5^4}{4^4}=\frac{625}{256}, \qquad y=\frac{5^5}{4^5}=\frac{3125}{1024},$$

等. 称这种数对中的 x 和 y 为甲和乙,则甲的乙次幂等于乙的甲次幂. 例如

$$2^4=4^2=16,$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}}=\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}},$$

$$\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{256}{81}}=\left(\frac{256}{81}\right)^{\frac{64}{27}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{256}{27}},$$

等等.

§ 520

虽然这一条和类似于这一条的另外一些曲线的无穷多个点,可以用代数方法求出来,但它们都并不是代数曲线,因为它们各自

都有用代数方法根本求不出来的无穷多个另外的点．现在我们转向另一类超越曲线．这类曲线要用到圆弧．为了计算不因大量的符号而复杂化，我们只取用单位圆的弧．虽然“化圆为方不能”尚未得证，但易于证明用到圆弧的曲线不是代数曲线．我们只考虑这类方程中最简单的，例如$\frac{y}{a}=\arcsin\frac{x}{c}$，即纵标与正弦为$\frac{x}{c}$的圆弧成正比．由于同一个正弦$\frac{x}{c}$对应于无穷多个弧，可见这里的纵标 y 是无穷多值函数．纵标线与另外一些直线都在无穷多个点处与这里的曲线相交．这是它显然地区别于代数曲线的性质．设 s 是正弦为$\frac{x}{c}$的最短的弧，π 表示等于半圆周的弧，则$\frac{y}{a}$的值为

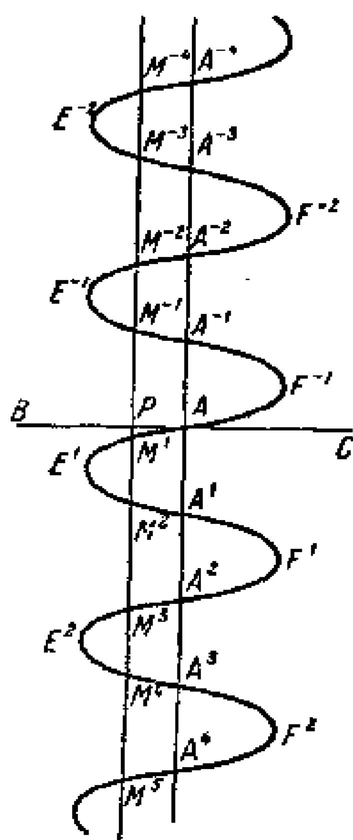


图 104

$s,\pi-s,2\pi+s,3\pi-s,4\pi+s,5\pi-s,\cdots,$

$-\pi-s,-2\pi+s,-3\pi-s,-4\pi+s,-5\pi-s,\cdots.$

因而，如果如图 104 取直线 CAB 作轴，取 A 为横标原点，那么 $x=0$ 时，在 A 的一侧我们有纵标 $AA^1=\pi a$，$AA^2=2\pi a$，$AA^3=3\pi a,\cdots$．在另一侧有 $AA^{-1}=+\pi a$，$AA^{-2}=+2\pi a$，$AA^{-3}=+3\pi a,\cdots$，曲线经过这每一点．如果取横标 $AP=x$，则纵标交曲线于无穷多个点 M．我们有 $PM^1=as$，$PM^2=a(\pi-s)$，$PM^3=a(2\pi-s),\cdots$．整个曲线由无穷多个相似的部分 AE^1A^1，$A^1F^1A^2$，$A^2E^2A^3$，$A^3F^2A^4$，$\cdots$ 组成，过点 E、F 平行于轴 BC 的每一条直径都是这条曲线的直径．这时当然有 $AC=AB=c$，且线段 E^1E^2，E^2E^3，E^1E^{-1}，$E^{-1}E^{-2}$ 及

$F^1F^1, F^1F^{-2}, F^{-1}F^{-2}$都等于 $2a\pi$. 莱布尼兹称这条曲线为正弦曲线,因为借助它可以求出任何弧的正弦. 事实上,由

$$\frac{y}{a}=\arcsin\frac{x}{c},$$

取正弦 得

$$\frac{x}{c}=\sin\frac{y}{a}.$$

令

$$\frac{y}{a}=\frac{1}{2}\pi-\frac{z}{a},$$

则

$$\frac{x}{c}=\cos\frac{z}{a},$$

这样同时也就得到了余弦曲线.

§ 521

类似地可以得到正切曲线,正切曲线的方程为 $y=\operatorname{arctg}\ x$,这里为简单起见,取 $a=1, c=1$. 对方程取正切,得

$$x=\operatorname{tg}\ y=\frac{\sin y}{\cos y},$$

这条曲线的形状可以从正切的性质推出. 它有无穷多条相平行的渐近线. 同样地,由方程

$$y=\operatorname{arcsec}x, \text{也即 } x=\sec y=\frac{1}{\cos y},$$

可以画出正割曲线,它有无穷多条伸向无穷远的分支. 这类曲线中极为有名的一条是旋轮线,也称为摆线. 它由沿直线滚动的圆周上的一点画出. 其直角坐标方程为

$$y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x.$$

这条曲线之所以值得特别注意,原因有两个,一个是它容易画,再

一个是它具有许多重要的性质.但是这些性质中的大多数,都必须应用无穷小分析才能进行阐述,我们只对可以从方程直接推出的主要几条进行简单的考察.

§ 522

假定如图 105 所示,圆 ACB 在直线 EA 上滚动.为了使考察具有更为一般的意义,我们把圆周上的一点 B 换成直径延长线上的一点 D,考察圆滚动时点 D 画出的曲线 Dd.设圆的半径 $CA = CB = a$,距离 $CD = b$,又设开始时刻 D 点位于距 AE 最远处,且圆滚到了 $aQbR$.记距离 AQ 为 z,则弧 $aQ = z$.用半径 a 除这段弧,得角 $acQ = \frac{z}{a}$,而画出曲线的点此时位于 d.因而有 $cd = b$,角

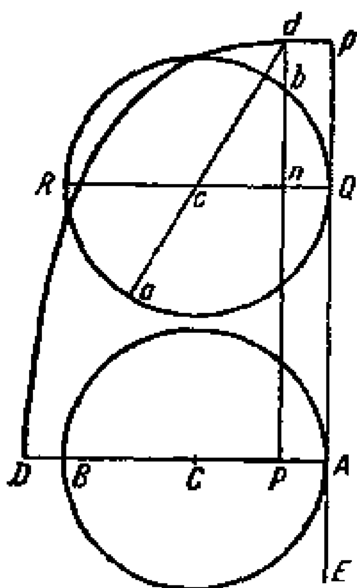


图 105

$$dcQ = \pi - \frac{z}{a}$$

d 是所求曲线上的点,从 d 先向直线 AQ 画垂线 dp,再向直线 QR 画垂线 dn,则

$$dn = b\sin\frac{z}{a}, cn = -b\cos\frac{z}{a},$$

从而

$$Qn = dp = a + b\cos\frac{z}{a}.$$

延长直线 dn 到交直线 AD 于 P,记坐标

$$DP = x, Pd = y,$$

则

$$x = b + cn, \text{或 } x = b - b\cos\frac{z}{a},$$

$$y = AQ + dn = z + b\sin\frac{z}{a}.$$

由

$$b\cos\frac{z}{a} = b - x,$$

得

$$b\sin\frac{z}{a} = \sqrt{2bx - x^2},$$

$$z = a\arccos\left(1 - \frac{x}{b}\right) = a\arcsin\frac{\sqrt{2bx - x^2}}{b}.$$

将这两个值代入 y 的右端,得

$$y = \sqrt{2bx - x^2} + a\arcsin\frac{\sqrt{2bx - x^2}}{b}.$$

如果取 AD 为轴,C 为原点,并记 $b - x$ 为 t,则

$$\sqrt{2bx - x^2} = \sqrt{b^2 - t^2},$$

从而得到 t, y 间的方程

$$y = \sqrt{b^2 - t^2} + a\arccos\frac{t}{b}.$$

$b = a$ 时,该方程给出的为通常的旋轮线,b 大于 a 和小于 a 时给出的,分别称为短幅旋轮线和长幅旋轮线.不管哪种情况下,y 都是 x 或 t 的无穷多值函数.也即,只要 x 或 t 不使$\sqrt{2bx - x^2}$或$\sqrt{b^2 - t^2}$为虚数,任何一条平行于 AQ 的直线就都交曲线于无穷多个点.

§ 523

另外两种旋轮线是圆外旋轮线和圆内旋轮线.参见图 106. D 是动圆 ACB 圆外或圆内一点.动圆 ACB 在不动圆 AOQ 的圆周上滚动时点 D 画出曲线 Dd.设不动圆的半径 $OA = c$,动圆的半径 CA

$= CB = a$，点 D 至动圆圆心的距离 $CD = b$. 取直线 OD 作轴，我们来求曲线 Dd. 动圆从点 O, C, D 在同一条直线上的起始位置滚动到 QcR 处时，滚过弧 $AQ = z$，从而角 $AOQ = \frac{z}{c}$. 此时我们有弧 $Qa = AQ = z$，因而角

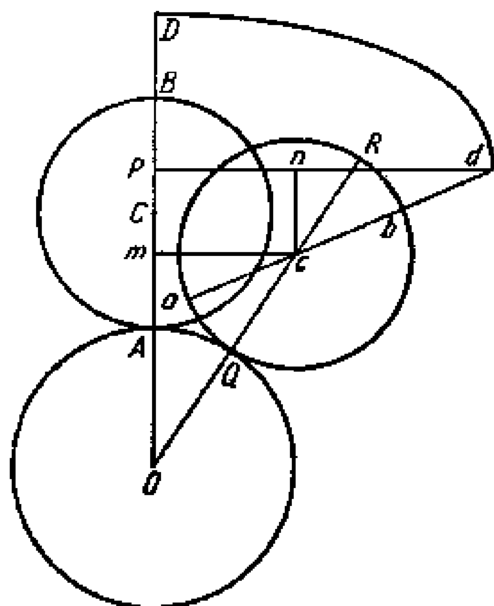


图 106

$$acQ = \frac{z}{a} = Rcd$$

距离 $cd = CD = b$，点 d 在曲线 Dd 上. 从点 d 向轴画垂线 dP，从点 c 画轴 OD 的垂线 cm 和平行线 cn. 由角

$$Rcn = AOQ = \frac{z}{c},$$

得角

$$dcn = \frac{z}{c} + \frac{z}{a} = \frac{(a+c)z}{ac}.$$

从而

$$dn = b\sin\frac{(a+c)z}{ac},$$

$$cn = b\cos\frac{(a+c)z}{ac}.$$

再由 $OC = Oc = a + c$，得

$$cm = (a+c)\sin\frac{z}{c},$$

$$Om = (a+c)\cos\frac{z}{c}.$$

进而，记坐标 $OP = x, Pd = y$，则

$$x = (a+c)\cos\frac{z}{c} + b\cos\frac{(a+c)z}{ac},$$

$$y = (a+c)\sin\frac{z}{c} + b\sin\frac{(a+c)z}{ac}.$$

由此可见,如果$\frac{a+c}{a}$是有理数,则角$\frac{z}{c}$与$\frac{(a+c)z}{ac}$有公度,z可消去,得到的是x,y间的代数方程,否则这样画出的曲线是超越的.

此外,应该指出,a为负值时,动圆在不动圆之内,得到的是圆内的旋轮线.通常取常数b等于a,即D在动圆圆周上,此时得到的是给了专门名称的圆外旋轮线或圆内旋轮线.我们推出的是更为一般情况下的方程.从我们的一般易于导出我们的特殊.我们的做法是便捷的.使平方x^2,y^2相加,得

$$x^2+y^2=(a+c)^2+b^2+2b(a+c)\cos\frac{z}{a}.$$

a,c可公度时从该方程消去z更为容易.

§ 524

两个圆的半径a,c可公度,曲线为代数的,这两种情况之外,应该指出的再一种情况是$b=-a-c$,即曲线上的点D在不动圆的圆心O.由$b=-a-c$得

$$x^2+y^2=2(a+c)^2\left(1-\cos\frac{z}{a}\right)=4(a+c)^2\cos^2\frac{z}{2a},$$

从而

$$\cos\frac{z}{2a}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2(a+c)}.$$

又由

$$x=(a+c)\left(\cos\frac{z}{c}-\cos\frac{(a+c)z}{ac}\right),$$

$$y=(a+c)\left(\sin\frac{z}{c}-\sin\frac{(a+c)z}{ac}\right),$$

得

$$\frac{x}{y}=-\operatorname{tg}\frac{(2a+c)z}{2ac},$$

$$\sin\frac{(2a+c)z}{2ac}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

进而

$$\cos\frac{(2a+c)z}{2ac}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

将

$$\sqrt{x^2+y^2}=2(a+c)\cos\frac{z}{2a},$$

代入,得

$$x=2(a+c)\cos\frac{z}{2a}\sin\frac{(2a+c)z}{2ac},$$

$$y=-2(a+c)\cos\frac{z}{2a}\cos\frac{(2a+c)z}{2ac}.$$

例如,设 $c=2a$,则

$$x=6a\cos\frac{z}{2a}\sin\frac{z}{a},$$

$$y=-6a\cos\frac{z}{2a}\cos\frac{z}{a},$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=6a\cos\frac{z}{2a}.$$

令

$$\cos\frac{z}{2a}=q,$$

则

$$\sin\frac{z}{2a}=\sqrt{1-q^2},\qquad \sin\frac{z}{a}=2q\sqrt{1-q^2},$$

$$\cos\frac{z}{a}=2q^2-1,$$

从而

$$q=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{6a},$$

$$y=-6aq(2q^2-1)=(1-2q^2)\sqrt{x^2+y^2}=$$

$$\left(1-\frac{x^2+y^2}{18a^2}\right)\sqrt{x^2+y^2},$$

或

$$18a^2y=(18a^2-x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}.$$

令 $18a^2=f^2$,两边平方得六次方程

$$(x^2+y^2)^3-2f^2(x^2+y^2)^2+f^4x^2=0.$$

这里我们要讨论的不是代数曲线,是超越曲线,因而不继续.下面讨论同时含有对数和圆弧的曲线.

§ 525

前面我们已经求出了方程

$$2y=x^{+\sqrt{-1}}+x^{-\sqrt{-1}},$$

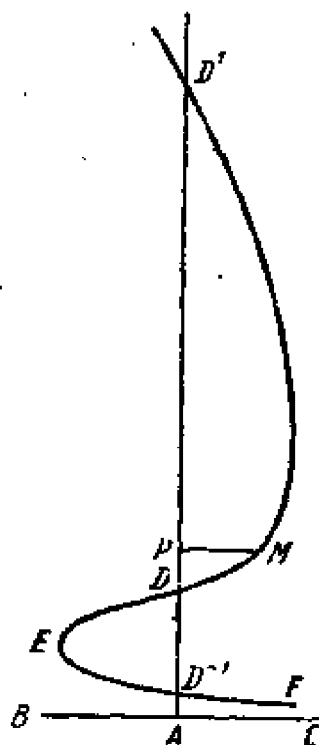


图 107

表示的曲线,见图 107.那里我们把这个方程化成了 $y=\arccos\ \log x$.化成的这个方程可写成

$$\arccos\ y=\log x,\text{或 } x=e^{\arccos\ y}.$$

如果取直线 AP 作轴,取 AP 上点 A 作横标原点,显然,在 A 点下面,在横标为负的区域中,曲线没有任何连续部分.但轴 AP 交曲线于无穷多个 D 点,且这些 D 点到点 A 的距离成几何级数.其中有距 A 越来越远的无穷多个点

$$AD=e^{\frac{\pi}{2}},AD^1=e^{\frac{3\pi}{2}},AD^2=e^{\frac{5\pi}{2}},AD^3=e^{\frac{7\pi}{2}},\cdots,$$

还有距 A 越来越近的无穷多个点

$$AD^{-1}=e^{-\frac{\pi}{2}}, AD^{-2}=e^{-\frac{3\pi}{2}}, AD^{-3}=e^{-\frac{5\pi}{2}}, \cdots$$

此外,曲线左右两侧至轴的距离 $AB=AC=1$,在点 B,C 处,曲线与平行于轴的直线相切,切点为无穷多个点 E,点 F. 点 E 至点 B 的距离,点 F 至点 C 的距离都成几何级数. 可见,曲线在逼近直线 BC 时形成无穷多个弯曲,最终与 BC 重合. 也即这条曲线的渐近线不是无穷直线,而是有限直线 BC. 这是这条曲线与代数曲线截然不同的一个特点.

§ 526

形状各色各样列举不尽的螺线也属于这样的超越曲线,它们或者只要求角度,或者要求角度的同时还要求对数. 如图 108 所示,螺线都有一个作为中心的确定的点 C,螺线绕中心而成,圈数无穷. 螺线的性质易于用距离与角度间的方程表示. 距离是螺线上任一点 M 至中心 C 的距离 CM,角度是 CM 与给定了位置的直线 CA 所成的角 ACM. 设角 $ACM=s$,即设 s 是单位圆上角 ACM 所对的弧,又设距离 $CM=z$. s,z 间的每一个方程表示的都是一条螺线. 对直线 CM 的同一个位置,角 ACM 在 s 之外还有 $2\pi+s$,$4\pi+s$,$6\pi+s$,…及 $-2\pi+s$,$-4\pi+s$,…无穷多个值. 用这无穷多个值中的每一个代替方程中的 s,我们都得到距离 CM 的一个不同的值. 也即 CM 的延长线与曲线交于无穷多个点. 当然这里要 z 不是虚数. 我们先看最简单的情形,$z=as$. 此时对直线 CM 的同一个位置我们得到 z 值 $a(2\pi+s)$,$a(4\pi+s)$,$a(6\pi+s)$,…和 $-a(2\pi-s)$,$-a(4\pi-s)$,$-a(6\pi-s)$,…. 换方

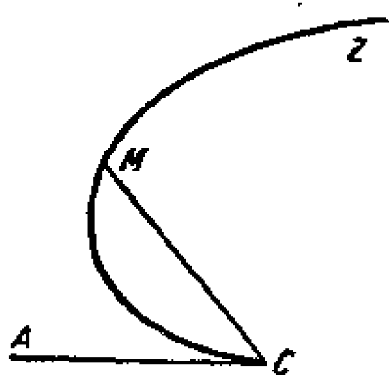


图 108

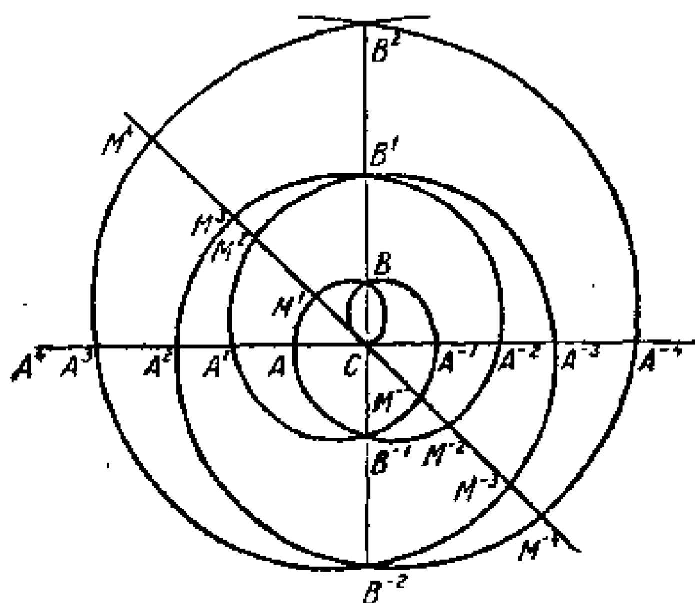


图 109

程中的 s 为 $\pi+s$ 时直线 CM 的位置不变，但 z 的值变负. 因而应该把值 $-a(\pi+s)$, $-a(3\pi+s)$, $-a(5\pi+s)$, …和 $a(\pi-s)$, $a(3\pi-s)$, $a(5\pi-s)$, …加到已经列出的 z 值上去. 这最简单的螺线，其形状如图 109 所示. 曲线与直线 AC 相切于点 C，且两个分支从点 C 出发绕 C 无穷多圈趋向无穷，每圈都在垂直于 AC 的直线 BC 上相交，即直线 BCB 是该曲线的直径. 人们称这样的曲线为阿基米德螺线. 方程 $z=as$ 表明，一旦曲线被准确画出，它与过 C 点的任何一条直线的交点就都可求出.

§ 527

跟方程 $z=as$ (s, z 表示直角坐标时，该方程给出的是直线)给出阿基米德螺线一样，z, s 间的别的代数方程也给出无穷多条螺线，只要这方程使 s 对应的 z 值都为实数. 例如，方程 $z=\frac{a}{s}$ (它类似于以渐近线为轴的双曲线方程)就给出约翰·伯努里称之为双曲螺线的螺线. 该螺线绕中心 C 无穷多圈后，在无穷远处收敛于作为渐近线的直线 AA. 又例如，方程 $z=\sqrt{s}$ (角 s 为负时距离为虚

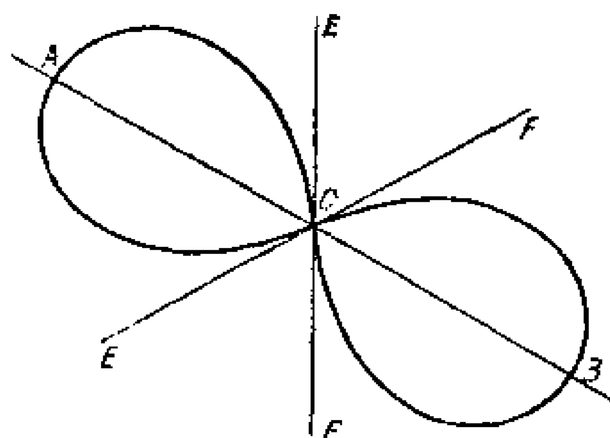


图 110

数)，对 s 的每一个值我们都得到两个 z 值，一正一负，曲线绕点 C 无穷多圈．再例如，方程 $z = a\sqrt{n^2 - s^2}$，s 不在 $-n$ 与 $+n$ 之间时 z 为虚数，s 在 $-n$，$+n$ 之间时曲线是有限的，如图 110 所示．过中心 C 引与轴 ACB 所成角为 n 的两条直线 EF，EF，则相交于点 C 的这两条直线都是曲线的切线，曲线的形状为双纽线 $ACBCA$．用这种方法可得到无穷多种别的形状的超越曲线，篇幅不允许，不再继续讨论．

§ 528

如果不限于 z，s 间的代数方程，把超越方程也包括进来，那这讨论就更加地没有边了．值得特别注意的一条这种曲线，其方程为

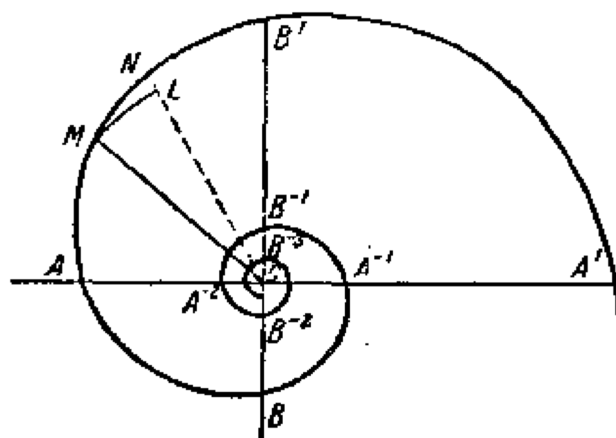


图 111

$s = n\log\frac{z}{a}$．方程表明角 s 与距离 z 的对数成正比，因此称这条曲线为对数螺线．对数螺线之所以值得特别注意，是因为它有很多重要的性质．主要的一条是，过 C 点的直线与曲线的交角都相等．为从方程推出这条性质，参见图 111，令角

$ACM = s$，距离 $CM = z$，则 $s = n\log\frac{z}{a}$，$z = ae^{\frac{s}{n}}$．取更大的角 $ACN = s + v$，则距离 $CN = ae^{\frac{s}{n}}e^{\frac{v}{n}}$，以 C 中心画长度等于 w 的弧 ML，则距离

$$LN = ae^{\frac{s}{n}}(e^{\frac{v}{n}} - 1) = ae^{\frac{s}{n}}\left(\frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \cdots\right).$$

由此得

$$\frac{ML}{LN} = \frac{v}{\frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \cdots} = \frac{n}{1 + \frac{v}{2n} + \frac{v^2}{6n^2} + \cdots}.$$

两角之差 $MCN = v$ 为零时，$\frac{ML}{LN}$成为半径 CM 与曲线所成角的正切．从而 $v = 0$ 时，角 ACM 的正切等于 n，即角 ACM 的正切是常数．如果 $n = 1$，则这 ACM 为半直角，此时的对数螺线称为半直角对数螺线．

第二十二章

关于圆的几个问题的解

§ 529

前面我们看到了，半径为 1 时半圆周 π 或 180 度的弧

$$= 3.14159265358979323846264338,$$

这个数的以 10 为底的对数，即常用对数

$$= 0.49714987269413385435126828 8,$$

乘这个常数对数以 2.30258，得自然对数

$$= 1.14472988584940017414342 37.$$

180 度角的弧已知，从它我们可以求出任何度数的角的弧. 记所求弧长为 z，设 z 所对角为 n 度，则 $180 : n = \pi : z$，也即 $z = \frac{\pi n}{180}$. z 的对数等于 n 的对数减去对数

$$1.75812263240917221545252641 3.$$

如果弧所对角的单位为分，即这弧为 n'，则弧长 z 的对数等于 n 的对数减去对数

$$3.53627388279281584796129321 1.$$

如果弧所对角的单位为秒，即这弧为 n''，则弧长 z 的对数等于 n

的对数减去

5.31442513317645948047006009,

或者等于 n 的对数加上对数

4.68557486682354051952993990

再从和的首数中减去 10.

§ 530

反之,从弧长可求出角度,也就可以求出正弦、正切和正割.相应地弧可以和角一样用度分秒表示.记半径为 1 的圆的以半径为度量单位的弧为 z,z 用十进制数表示.取 z 的对数,先照正弦、正切、正割对数表那样,把 10 加到所取对数的首数上去,再减去

4.68557486682354051952993990,

或者把

5.31442513317645948047006009

加到所取数上去,得到的都是用秒表示的弧 z 的对数.当然在后一种情况下首数应该减去 10.长度等于半径的弧所对的角,可以不用对数而用黄金规则得到.由 π 比 180°等于 1 比长度等于半径的弧的度数.我们得到长度等于半径的弧,用度表示,为

57.2957795130823208767 98,

用分表示,为

3737.74677078493925260788,

用秒表示,为

206264.806247096355156 4728,

用通常的方法表示,为

57°17′44″48‴22⁗29′′′′′22′′′′′′.

借助上册讲的级数,得这段弧的

正弦 = 0.84147098480789,

余弦 = 0.54030230586814,

这两个数的前数除以后数,就得到这段弧的正切.

§ 531

有了从弧长求正弦和正切的准备,对关于圆的许多问题我们就可以进行求解了.首先,非零弧都比自己的正弦长,弧同余弦的关系则不然,角度为零时余弦为 1,弧小于余弦;直角的余弦为零,弧大于余弦.可见,$0°$ 与 $90°$ 之间必定有一个弧,它等于自己的余弦.我们就来求这个弧.

题 I

求等于自己余弦的弧.

解:

记所求弧为 s,则 $s=\cos s$.从这个方程求 s,恐怕没有什么方法比试位法更合用.但这方法要先知道 s 的一个近似值.这近似值可以是猜出来的,也可以是将三个或更多个 s 值代入方程算出来的.计算时 s 与 $\cos s$ 的位数应取得相同.我们来计算.取 $s=30°$,依 § 329 所讲

$$\begin{array}{rl} \log 30 = & 1.4771213 \\ \underline{\text{减}} & \underline{1.7581226} \\ \log 30° \text{弧} = & 9.7189987. \end{array}$$

但

$$\log\cos 30° = 9.9375306,$$

可见,$30°$ 时弧小于余弦,因而所求弧大于 $30°$.取 $s=40°$,则

$$\begin{array}{rl} \log 40 = & 1.6020600 \\ \underline{\text{减}} & \underline{1.7581226} \\ \log 40° \text{弧} = & 9.8439374. \end{array}$$

但

$$\log\cos 40° = 9.8842540,$$

可见,所求弧稍大于40°.取 $s=45°$,则

$$\log 45 = 1.6532125$$

$$\text{减}\quad 1.7581226$$

$$\log 45°\text{弧} = 9.8950899,$$

但

$$\log\cos 45° = 9.8494850,$$

可见所求角在40°与45°之间.可进一步求一个更好的近似值.事实上,对数的误差,

40°时为 +403166,

45°时为 −456044,

误差的差为 859215.

取值比40°增加5°,误差比403166增加859215.由此得所求弧大于42°.但这范围仍嫌大.为得到更小的范围,取 $s=42°$ 和 $s=43°$,计算得

	$s=42°$	$s=43°$
$\log s =$	1.6232493	1.6334685
减	1.7581226	1.7581226
$\log s$	9.8651267	9.8753459

而

$\log\cos s$	$=9.8710735$	9.8641275
	+59468	−112184
	112184	

$$171652:59468 = 1°:20'47''.$$

这样我们得到 s 的真值所在的一个极小范围,42°20′至42°21′.化这两个角度为分,进行计算得

	$s=2540'$	$s=2541'$
$\log s$	$=3.4048337$	3.4050047

$$
\begin{array}{lll}
\text{减} & \underline{3.5362739} & \underline{3.5362739} \\
\log s & = 9.8685598 & 9.8687308 \\
\log\cos s & = \underline{9.8687851} & \underline{9.8686700} \\
 & +2253 & -608 \\
 & \underline{608} & \\
\end{array}
$$

$$2861:2253 = 1:47'15''.$$

由此得所求等于自己余弦的弧为 42°20′47′15″,弧和它的余弦都为 0.7390850.

§ 532

参见图 112,弦 AB 分扇形 ACB 为弓形 AEB 和三角形 ACB 两部分.角 ACB 小时弓形小于三角形,角 ACB 为够大的钝角时弓形大于三角形.因而必定有使这两部分相等的三角形.

图 112

题 II

求被弦分为相等两部分的扇形,即求扇形 ACB,使三角形 ACB 等于弓形 AEB.

解

取半径 $AC=1$,记所求弧 $AEB=2s$,因而它的一半 $AE=EB=s$.画半径 CE,则 $AF=\sin s$, $CF=\cos s$.从而三角形 $ACB=\sin s\cos s=\frac{1}{2}\sin 2s$,而扇形 ACB 的面积 $=s$.我们的问题要求扇形的面积为三角形的两倍,即要求 $s=\sin 2s$.这样,问题就成了求等于自己倍角正弦的弧.首先,角 ACB 应大于直角,因而 s 大于 45°.我们取三个近似值进行如下的计算

	$s=50°$	$s=55°$	$s=54°$
$\log s$	$=1.6989700$	1.7403627	1.7323938

减	1.7581226	1.7581226	1.7581226
	9.9408474	9.9822401	9.9742712
$\log\sin 2s$	$=9.9933515$	9.9729858	9.9782063
	$+\ 525041$	-92543	$+39351$
	92543		

$$617584:525041=5^\circ:4^\circ15'.$$

将误差修正加到近似值 54° 上去，得 $s=54^\circ17'54''$，这个值与真值的差不超过 1 秒．下面对相差 1 秒的近似值进行计算

	$s=54^\circ17'$	$s=54^\circ18'$	$s=54^\circ19'$
	也即	也即	也即
	$s=3257'$	$s=3258'$	$s=3259'$
	又	又	又
	$2s=108^\circ34'$	$2s=108^\circ36'$	$2s=108^\circ38'$
	补角 $=71^\circ26'$	补角 $=71^\circ24'$	补角 $=71^\circ22'$
$\log s$	$=3.5128178$	$=3.5129511$	$=3.5130844$
减	3.5362739	3.5362739	3.5362739
$\log s$	$=9.9765439$	$=9.9766772$	$=9.9768105$
$\log\sin 2s$	$=9.9767872$	$=9.9767022$	$=9.9766171$
	$+\ 2433$	$+\ 250$	$-\ 1934$
		1934	
		2184	

这样我们得到 $2184:250=1':6''52'''$．由此得 $s=54^\circ18'6''52'''$．要得到更准确的解，须使用位数更多的对数表，下面对相差 $10''$ 的两个近似值进行计算．

$s=54^\circ18'0''$	$s=54^\circ18'10''$
也即	也即
$s=195480''$	$s=195490''$
$2s=108^\circ36'0''$	$2s=108^\circ36'20''$

补角	$=71°24'0''$	补角	$=71°23'40''$
$\log s$	$=5.2911023304$		$=5.2911245466$
减	5.3144251332		$=5.3144251332$
	9.9766771972		9.9766994134
$\log\sin 2s$	$=9.9767022291$		9.9766880552
	$+\quad 250319$		$-\quad 113582$
	113582		

$$363901:250319=10'':6''52'''43''''33'''''.$$

得 $s=54°18'6''52'''43''''33'''''$，角 $ACB=108°36'13''45'''27''''6'''''$，其补角 $=71°23'46''14'''32''''54'''''$，角 ACB 的正弦的对数，也即

$$\log\sin 2s=9.9766924791,$$

$$\sin 2s=0.9477470.$$

又

$$\sin s=AF=BF=0.8121029,$$

它的两倍，也即

$$\text{弦 } AB=1.6242058.$$

此外

$$\cos s=CF=0.5835143.$$

这样就可以准确地画出所求扇形，给出问题的解.

§ 533

类似地，可求出等分四分之一圆的正弦.

题Ⅲ

参见图 113，求等分四分之一圆 ACB 的正弦 DE.

解

设弧 $AE=s$，则由弧 $AEB=\frac{\pi}{2}$，得弧 $BE=\frac{\pi}{2}-s$. 四分之一圆

的面积 $=\frac{1}{4}\pi$.扇形 ACE 的面积 $=\frac{1}{2}s$,从它减去三角形 CDE 的面积

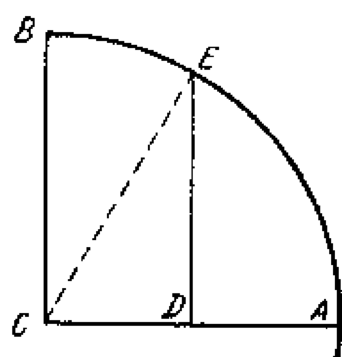


图 113

$$CDE=\frac{1}{2}\sin s\cos s,$$

得 ADE 的面积

$$ADE=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\sin s\cos s,$$

题目要它的两倍等于四分之一圆.由此得

$\frac{1}{4}\pi=s-\frac{1}{2}\sin 2s$,从而 $s-\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{2}\sin 2s$.

令角

$$s-\frac{1}{4}\pi=s-45^\circ=u,$$

则 $2s=90^\circ+2u$,从而

$$u=\frac{1}{2}\cos\ 2u,2u=\cos\ 2u.$$

这样就把题Ⅲ化成了题Ⅰ,求等于自己余弦的弧.题Ⅰ已经求得

$$2u=42^\circ 20' 47'' 15''',u=21^\circ 10' 23'' 37'''.$$

得

$$\text{弧 } AE=s=66^\circ 10' 23'' 37''' \quad \text{弧 } BE=23^\circ 49' 36'' 23'''.$$

由此得半径被分成的两部分

$$CD=0.4039718,\qquad AD=0.5960281,$$

$$\text{正弦 } DE=0.9147711.$$

此法等分四分之一圆,当然也就把整个圆等分为八等份.

§ 534

凡过圆心的直线都将圆等分为二.类似地,从圆周上任一点都可画直线将圆等分为三,或等分为更多等份.我们来等分为四.

题Ⅳ

参见图 114,$ACBD$ 为半圆,试作等分 $ACBD$ 为两份的弦 AD.

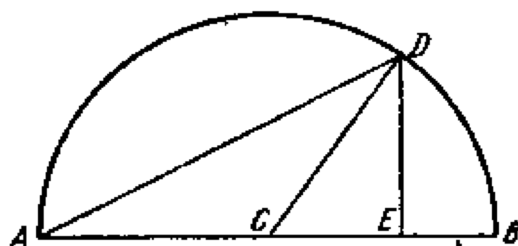


图 114

解

记所求弧 $AD = s$,画半径 CD,则扇形

$$ACD\text{ 面积} = \frac{1}{2}s.$$

从扇形 ACD 减去三角形

$$ACD = \frac{1}{2}AC \cdot DE = \frac{1}{2}\sin s,$$

得弓形

$$AD = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sin s,$$

它应该等于半圆 ADB 的一半,半圆 ADB 的面积为$\frac{1}{2}\pi$,因而

$$s - \sin s = \frac{1}{2}\pi = 90°,\text{或 } s - 90° = \sin s.$$

令 $s - 90° = u$,则 $\sin s = \cos u$, $u = \cos u$. 根据题Ⅰ,得

$$u = 42°20'47''14''',$$

从而角

$$ACD = s = 132°20'47''14''', BCD = 47°39'12''46'''.$$

弦 $AD = 1.8295422$ 即为所求.

§ 535

题Ⅲ求出了面积等于$\frac{1}{4}$个圆的弓形，半圆是面积等于$\frac{1}{2}$个圆的弓形．现在我们来求面积等于$\frac{1}{3}$个圆的弓形．

题Ⅴ

参见图115，求过圆周上一点 A 分圆为三等份的弦 AB 和 AC．

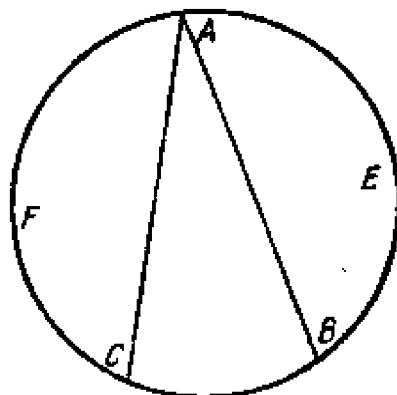


图 115

解

取圆的半径为1，则半圆周的长等于 π，记弧 $AB = AC = s$，则扇形 AEB 和 AFC 的面积都为

$$\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sin s,$$

题目要求这面积等于圆面积的$\frac{1}{3}$，圆面积为 π，因面要求

$$\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sin s = \frac{\pi}{3} = 60°, \text{或 } s - \sin s = 120°$$

从面

$$s - 120° = \sin s.$$

令 $s - 120° = u$，则 $u = \sin(u + 120°) = \sin(60° - u)$．这样就把问题

化成了求弧 u,使等于角 $60° - u$ 的正弦.因而角 u 小于 $60°$.我们取近似值进行下面的计算

	$u = 20°$	$u = 30°$	$u = 40°$
	$60° - u = 40°$	$60° - u = 30°$	$60° - u = 20°$
$\log u$	$= 1.3010300$	1.4771213	1.6020600
减	1.7581226	1.7581226	1.7581226
$\log u$	$= 9.5429074$	9.7189987	9.8439374
$\log\sin(60° - u)$	$= 9.8080675$	9.6989700	9.5340517
	$+2651601$	-200287	$-3098857.$

可见 u 小于 $30°$,下面的计算表明它应该大于 $29°$.取 $u = 29°$ 进行计算

$$
\begin{aligned}
& u = 29° \\
& 60° - u = 31° \\
& \log u = 1.4623980 \\
& \text{减} \quad = 1.7581226 \\
& \log u = 9.7042754 \\
& \log\sin(60° - u) = 9.7118393 \\
& \quad + \quad 75639 \\
& \quad - \quad 200287
\end{aligned}
$$

$$275926 : 75639 = 1° : 16'26''.$$

得 u 的近似值 $29°16'26''$.为了得到该角更准确的值,下面我们对相差1秒的两个近似值进行计算

	$u = 29°16'$	$u = 29°17'$
	也即	也即
	$u = 1756'$	$u = 1757'$
	$60° - u = 30°44'$	$60° - u = 30°43'$
$\log u$	$= 3.2445245$	3.2447718
减	3.5362739	3.5362739

$$
\begin{array}{rrr}
\log u = 9.7082506 & & 9.7084979 \\
\log\sin(60^\circ - u) = 9.7084575 & & 9.7082450 \\
\hline
+ \quad 2069 & & - \quad 2529 \\
2529 & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$4598:2069 = 1':27''0'''.$$

这样 $u = 29^\circ 16' 27'' 0'''$，从而弧

$$s = AEB = 149^\circ 16' 27'' 0''' = AFC.$$

由此得弧

$$BC = 61^\circ 27' 6'' 0''',$$

弦 $AB = AC = 1.9285340$ 即为所求.

§ 536

前几题都归结为求弧，使等于给定的正弦或余弦.下一题方法类似，但更难.

题Ⅵ

参见图 116，AEB 为半圆，ED 为正弦.求弧 AE，使其长等于直线 AD 与 DE 之和.

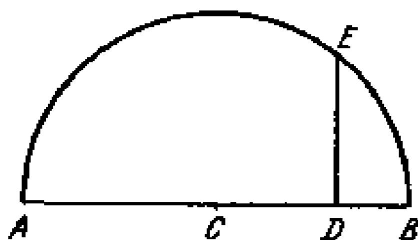


图 116

解

显然，这段弧必大于圆周的$\frac{1}{4}$，我们求它的补 BE.记 BE 为 s，则弧 $AE = 180^\circ - s$.又 $AC = 1$，$CD = \cos s$，$DE = \sin s$，这样从 AE 应

满足的条件得

$$180° - s = 1 + \cos s + \sin s.$$

将

$$\sin s = 2\sin\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}s,$$

$$1 + \cos s = 2\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}s,$$

代入,得

$$180° - s = 2\cos\frac{1}{2}s\left(\sin\frac{1}{2}s + \cos\frac{1}{2}s\right).$$

由

$$\cos\left(45° - \frac{1}{2}s\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{2},$$

得

$$\sin\frac{1}{2}s + \cos\frac{1}{2}s = \sqrt{2}\cos\left(45° - \frac{1}{2}s\right),$$

代入,得

$$180° - s = 2\sqrt{2}\cos\frac{s}{2}\cos\left(45° - \frac{1}{2}s\right).$$

对所得等式,我们取近似值 20°,21°进行计算

$\frac{1}{2}s = 20°$		$\frac{1}{2}s = 21°$
$45° - \frac{1}{2}s = 25°$		$45° - \frac{1}{2}s = 24°$
$180° - s = 140°$		$180° - s = 138°$
$\log(180° - s)$	$= 2.1461280$	2.1398791
减	1.7581226	1.7581226
$\log(180° - s)$	$= 0.3880054$	0.3817565
$\log\cos\frac{1}{2}s$	$= 9.9729858$	9.9701517
$\log\cos\left(45° - \frac{1}{2}s\right)$	$= 9.9572757$	9.9607302

$$
\begin{array}{lrr}
\log 2\sqrt{2} = & 0.4515450 & 0.4515450 \\
\hline
 & 0.3818065 & 0.3824269 \\
\hline
\text{误差} & +\quad 61989 & -\quad 6704 \\
 & 6704 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$68693:61989 = 1°:54'.$$

得$\frac{1}{2}s$在20°54′与20°55′之间.对这两个新近似值再作计算

$$
\begin{array}{cc}
\frac{1}{2}s = 20°54' & \frac{1}{2}s = 20°55' \\
45° - \frac{1}{2}s = 24°6' & 45° - \frac{1}{2}s = 24°5' \\
s = 41°48' & s = 41°50' \\
180° - s = 138°12' & 180° - s = 138°10' \\
\text{也即} & \text{也即} \\
180° - s = 8292' & 180° - s = 8290' \\
\log(180° - s) = 3.9186593 & \log(180° - s) = 3.9185545
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrr}
\text{减} & 3.5362739 & 3.5362739 \\
\hline
 & 0.3823854 & 0.3822806 \\
\hline
\log\cos\frac{1}{2}s = & 9.9704419 & 9.9703937 \\
\log\cos\left(45° - \frac{1}{2}s\right) = & 9.9603919 & 9.9604484 \\
\log 2\sqrt{2} = & 0.4515450 & 0.4515450 \\
\hline
 & 0.3823788 & 0.3823871 \\
\hline
\text{误差} & +\quad 66 & -\quad 1065 \\
 & 1065 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$1131:66 = 1':3''30'''.$$

可见$\frac{1}{2}s = 20°54'3''30'''$,从而

$$s = 41°48'7''0''' = BE,$$

得所求弧

$$AE = 138°11'53''0'''.$$

此时直线

$$DE = 0.6665578, AD = 1.7454535,$$

满足题目要求.

§ 537

现在我们把弧与它的正切相比较,由于在第一象限中弧小于它的正切,我们求等于自己正切一半的弧.

题Ⅶ

参见图117,求扇形 ACD,使等于三角形 ACE 的一半. ACE 由半径 AC,切线 AE 和割线 CE 构成.

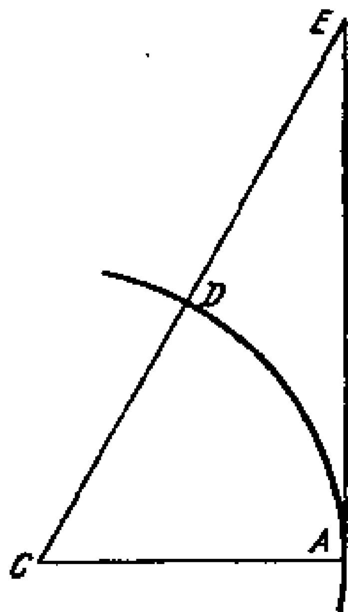


图117

解

记弧 AD 为 s,则扇形 $ACD = \frac{1}{2}s$. 三角形 $ACE = \frac{1}{2}\mathrm{tg}s$. 依题意

应该有 $s=\frac{1}{2}\operatorname{tg}s$ 或 $2s=\operatorname{tg}s$. 取近似值进行如下计算

	$s=60°$	$s=70°$	$s=66°$	$s=67°$
$\log 2s$	$=2.0791812$	2.1461280	2.1205739	2.1271048
	1.7581226	1.7581226	1.7581226	1.7581226
$\log 2s$	$=0.3210586$	0.3880054	0.3624513	0.3689822
$\log\operatorname{tg}s$	$=0.2385606$	0.4389341	0.3514169	0.3721481
	$+\ 824980$	$-\ 509287$	$+\ 110344$	-31659

得 s 在 $66°46'$ 与 $66°47'$ 之间. 为得到更准确的值, 我们再作如下计算

	$s=66°46'$	$s=66°47'$
	也即	也即
	$s=4006'$	$s=4007'$
	$2s=8012$	$2s=8014$
$\log 2s$	$=3.9037409$	3.9038493
	3.5362739	3.5362739
$\log 2s$	$=0.3674670$	0.3675754
$\log\operatorname{tg}s$	$=0.3672499$	0.3675985
误差	$+\ 2171$	$-\ 231$
	231	

$$2402:2171=1':54''14'''.$$

由此得弧

$$s=AD=66°46'54''14''',$$

因而正切 $AE=2.3311220$ 即为所求.

§ 538

现在我们提出

题Ⅷ

参见图 118，ABC 为圆的四分之一. 求弧 AE，使等于弦 AE 延长到交点 F.

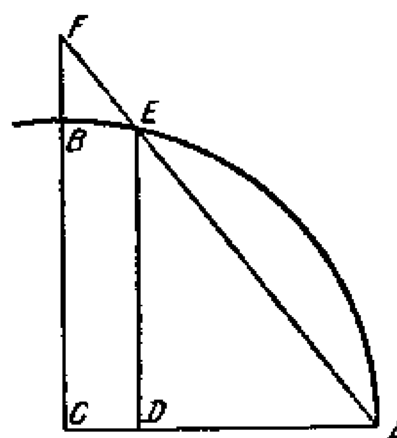


图 118

解

设弧 $AE=s$，则它的弦 $AE=2\sin\frac{1}{2}s$，正矢 $AD=1-\cos s=2\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s}{2}$. 由三角形 ADE 和 ACF 相似得

$$2\sin\frac{1}{2}s\cdot\sin\frac{1}{2}s:2\sin\frac{1}{2}s=1:s;$$

由此得 $s\cdot\sin\frac{1}{2}s=1$. 取近似值作如下计算

	$s=70°$	$s=80°$	$s=84°$	$s=85°$
$\log s=$	1.8450980	1.9030900	1.9242793	1.9294189
减	1.7581226	1.7581226	1.7581226	1.7581226
	0.0869754	0.1449674	0.1661567	0.1712963
$\log\sin\frac{1}{2}s=$	9.7585913	9.8080675	9.8255109	9.8296833
	9.8455667	9.9530349	9.9916676	0.0009796
误差	+0.1544332	0.0469650	+83223	−9796

得 s 在 84°53′ 与 84°54′ 之间. 再作下列计算

	$s = 84°53'$	$s = 84°54'$
	也即	也即
	$s = 5093'$	$s = 5094'$
	$\frac{1}{2}s = 42°26\frac{1}{2}'$	$\frac{1}{2}s = 40°27'$
$\log s$	$= 3.7069737$	3.7070589
	3.5362739	3.5362739
	0.1706998	0.1707850
$\log\sin\frac{1}{2}s$	$= 9.8292003$	9.8292694
	0.9999001	0.0000544
误差	$+998$	-544

得所求

$$弧\ s = AE = 84°53'38''51'''$$

$$弧\ BE = 5°6'21''9'''.$$

§ 539

虽然第一象限中的弧都小于自己的正切，但随后的象限中有等于自己正切的弧.下一个题目我们利用级数来求这样的弧.

题IX

求出一切等于自己正切的弧.

解

具有这种性质的第一个弧是无穷小弧.第二象限中正切为负，因而没有这样的弧.第三象限中有一个略小于 270°的这样的弧.再下去，在第五，第七等象限中有这样的弧.记四分之一圆周为 q，则所求的表示式为$(2n+1)q-s$，有

$$(2n+1)q - s = \text{ctg}s = \frac{1}{\text{tg}s}.$$

设 $\operatorname{tg} s = x$，则

$$s = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots,$$

从而

$$(2n+1)q = \frac{1}{x} + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots.$$

由数 n 越大弧 s 越小，显见 x 是一个很小的量，x 的一个近似值为

$$x = \frac{1}{(2n+1)q}, \text{也即} \frac{1}{x} = (2n+1)q,$$

更准确的近似值可从下式得到

$$\frac{1}{x} = (2n+1)q - s = (2n+1)q - \frac{1}{(2n+1)q} - \frac{2}{3(2n+1)^3q^3} - \frac{13}{15(2n+1)^5q^5} - \frac{146}{105(2n+1)^7q^7} - \frac{2343}{945(2n+1)^9q^9} - \cdots.$$

将 $q = \frac{\pi}{2} = 1.5707963267948$ 代入得所求弧

$$= (2n+1)1.57079632679 - \frac{1}{2n+1}0.63661977 - \frac{0.17200818}{(2n+1)^3} - \frac{0.09062598}{(2n+1)^5} - \frac{0.05892837}{(2n+1)^7} - \frac{0.04258548}{(2n+1)^9} - \cdots.$$

化以半径为单位的表示为度分秒表示，则所求弧

$$= (2n+1)90^\circ - \frac{131313''}{2n+1} - \frac{35479''}{(2n+1)^3} - \frac{18693''}{(2n+1)^5} - \frac{12155''}{(2n+1)^7} - \frac{8784''}{(2n+1)^9}.$$

这样，满足要求的弧依次为

Ⅰ $1\cdot 90^\circ - 90^\circ$,

Ⅱ $3\cdot 90^\circ - 12^\circ 32' 48''$,

Ⅲ $5\cdot 90^\circ - 7^\circ 22' 32''$,

Ⅳ $7\cdot 90^\circ - 5^\circ 14' 22''$,

Ⅴ $9\cdot 90^\circ - 4^\circ 3' 59''$,

Ⅵ $11\cdot 90^\circ - 3^\circ 19' 24''$,

Ⅶ $13\cdot 90^\circ - 2^\circ 48' 37''$,

Ⅷ $15\cdot 90^\circ - 2^\circ 26' 5''$,

Ⅸ $17\cdot 90^\circ - 2^\circ 8' 51''$,

Ⅹ $19\cdot 90^\circ - 1^\circ 55' 16''$.

§ 540

解这类问题的方法,不外以上例子中所用的几种,因而我们不再列题目.举出前面题目的主要目的是为加深对圆的性质的认识.这些求积的题目,原有的老方法对它们都无能为力.如果在解某个问题时,得到的弧与整个圆可公度,或者得到的弧的正弦(或正切)可用半径画出,那就等于做到了化圆为方.例如,解题Ⅵ(§ 536 图116)时,如果得到的正弦 DE 不是 0.6665578,而是 $0.6666666=\frac{2}{3}$,那就等于发现了一条美妙的性质:可以画出等于直线

$$AD+DE=1+\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{5}{9}}$$

的弧 AE.到现在为止尚无人证明化圆为方为不可能,倘可能,显然,不会有什么方法能比本章的方法更合用.

附 录

关于曲面

第一章

物体的表面

§ 1

前面讲的曲线性质和用方程表示曲线的方法，适用范围甚广，适用于其点都在同一张平面上的一切曲线. 但是当曲线上的点不全在一张平面上时，要建立这种曲线的性质，前面讲的就不够用了. 点不在同一张平面上的曲线有双重曲率. 关于双重曲率，非凡的几何学家克莱罗有一篇杰出的论文. 双重曲率与本附录要讲的曲面的性质，关系密切，因而不单讲，而是结合曲面一起讲.

§ 2

线有直线曲线之分，面也有平面曲面之别. 我们把凸面、凹面和既凸且凹的面统称为曲面. 例如，球面、柱面和无底锥面都是凸面，茶杯的内表面是凹面. 我们知道其任何三点都在同一条直线上的线是直线. 类似地，其任何四点都在同一张平面上的面是平面. 可见，一个面只要有四个点不在同一张平面上，它就是曲面，也即

凸面或凹面.

§ 3

知道了曲面上各点对同一张平面的偏离程度,也就知道了这张曲面.曲线的性质用曲线各点至作为轴的直线的距离表示.类似地,曲面的性质用曲面各点至任取的一张平面的距离表示.这样,给定一张曲面,要确定它的性质,就应该任取一张平面,并从曲面的各点向所取平面引垂线.然后,如果能找到一个方程,用它确定这每条垂线的长,那么曲面的性质就由这个方程表示.反之,从这个方程可以求出曲面的各点,也即求出曲面.

§ 4

假定取墙面作为从曲面向它引垂线的平面,如图 119 所示,在

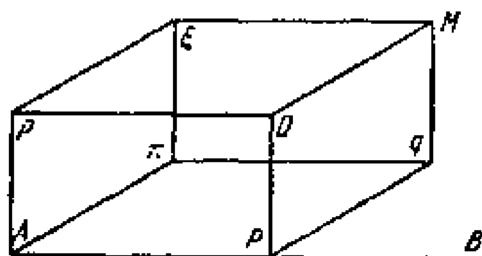


图 119

墙面上取 AB 作轴,取 A 作原点.设点 M 是曲面上不在墙面上的一点.从 M 向墙面引垂线,交墙面于 Q.再从 Q 向直线 AB 引垂线 QP,交 AB 于 P.这样,点 M 的位置就由 AP,PQ,QM 这三条直线的长所完全确定.同样地,所给曲面上任何另外的点 M,其位置也都由三个相垂直的坐标决定.这类似于位于平面上的曲线,其各点位置都由相垂直的两个坐标决定.

§ 5

这样，我们有三个坐标，AP，PQ，QM，令 $AP = x$，$PQ = y$，$QM = z$．从任两个坐标，比如 x 和 y 的值，我们都可以根据曲面的性质求出第三个坐标 z 的值．用这样的方法我们能够求出曲面上的每一点．因而曲面的性质都能用一个方程表示，方程使坐标 z 由另外两个坐标 x，y 和常数决定．可见给定一个曲面也就给定了一个函数 z，z 的变量是 x 和 y．反之，如果 z 是 x 和 y 的一个函数，则这方程就代表一个曲面，并给出这曲面的性质．事实上，替 x 和 y 以它们所能取的一切值，包括正值和负值，我们就得到取定的平面上的所有的点 Q．然后对每一点 Q 利用含 x，y 和 z 的方程，我们都可以求出对应的垂线 $QM = z$ 的长，也即求出所有的点 M．点 M，z 为正时在平面 APQ 的后面，z 为负时在平面 APQ 的前面，z 为零时在平面 APQ 上．z 为虚数时点 Q 不对应曲面上任何点 M．z 有多个值时，过 Q 的垂线交曲面于多点．

§ 6

关于曲面的性质，首先我们会问它是连续的(规则的)，还是不连续的(不规则的)．其所有的点都由 x，y，z 的同一个方程表示，即 z 都是 x 和 y 的同一个函数，这样的曲面为连续的．不同的部分函数不同，这样的曲面为不规则的．例如，一个曲面，它的一部分是球面，另一部分是锥面，柱面或平面，它就是不规则的．我们只考虑规则曲面，也即只考虑由单个方程表示的曲面．清楚了规则曲面，不规则曲面就容易讨论，因为它的每一部分都是规则曲面．

§ 7

规则曲面分为代数的和超越的.性质由坐标 x,y,z 间的代数方程表示,也即 z 是 x,y 的代数函数,这时的曲面叫代数曲面.否则,表示曲面性质的 x,y,z 间方程,包含对数,或包含依赖于圆弧等量的函数,也即 z 不是 x,y 的代数函数,这时的曲面叫超越曲面.例如 $z=\log y$, $z=y^x$, $z=y\sin x$ 时,曲面就是超越的.当然,我们先讨论代数曲面,然后再讨论超越曲面.

§ 8

对由 x,y 的函数 z 给出的曲面,现在我们从 z 的取值个数进行考虑.先考虑 z 为 x,y 的单值函数时的曲面.记 x,y 的单值函数或有理函数为 P.如果 $z=P$,则平面上的每一点 Q 都只对应曲面上的一个点,也即平面 APQ 的任何一根垂线都只交曲面于一点.此时直线 QM 的值都为实数,每个 QM 都给出曲面的一个实点,但函数的取值个数并不反映对应曲面的本质特点,因为平面 APQ 和轴的位置都任意,而同一个曲面,它可以对一个 APQ 是单值的,对另一个 APQ 是多值的.

§ 9

设 P 和 Q 都是 x,y 的任意单值函数.如果方程是 $z^2-Pz+Q=0$,则过点 Q 的每根垂线与曲面都或者交于两点,或者不相交,因为 z 的两个值或者都为实数,或者都为虚数.类似地,如果 P, Q, R 表示 x,y 的单值函数,方程为 $z^3-Pz^2+Qz-R=0$,则 z 为三值函数.z 的这三个值,也即方程的根,可以都为实数,可以只有

一个为实数，另外两个为虚数.垂线 QM 与曲面的交点个数都同于实根个数，为三个或一个. z 所在方程次数更高时，垂线 QM 与曲面的交点个数类似. z 值的个数，即方程根的个数，只要将 x,y,z 的方程化为有理形式，就不难确定.

§ 10

曲线方程的两个坐标可以交换.类似地，曲面方程的三个坐标 x,y,z 也可以交换.首先，如果取 APQ 上垂直于 AP 的 Ap 作轴，则 $Ap=y,pQ=x$，这样坐标 x,y 就交换了位置.画出长方体 $ApQM\xi\pi qPA$.我们看它的过 A 点的三个相垂直的平面 $APQp$，$APq\pi$ 和 $Ap\xi\pi$.从点 M 向这三个平面引的垂线都可以作为坐标 z，即 z 有三种可能的取法.对 z 的这每一种取法，在它所垂直的平面上，x，y 又都有两种取法. x,y,z 的不同的取法共六种，A 是它们共有的原点.这六种取法及与我们取定了的那一种的对应关系如下：

对平面 $APQp$，为

$AP=x,PQ=y,QM=z,$

$Ap=y,pQ=x,QM=z;$

对平面 $APq\pi$，为

$AP=x,Pq=z,qM=y,$

$A\pi=z,\pi q=x,qM=y;$

对平面 $Ap\xi\pi$，为

$Ap=y,p\xi=z,\xi M=x,$

$A\pi=z,\pi\xi=y,\xi M=x.$

可见对不管哪种取法，所得点 M 所在曲面的关于 x,y,z 的方程，事实上都相同.又连接点 A 与点 M 的直线 $AM=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

§ 11

这样坐标 x,y,z 间的一个方程就给出曲面与交于 A 点的相垂直的三个平面的关系．变量 z 给出曲面上点 M 至平面 APQ 的距离．类似地，y,x 分别给出点 M 至平面 APq 和 $Ap\xi$ 的距离．知道了点 M 至三个平面的距离，也就知道了它的位置，可见首先应该画出借助 x,y,z 间方程建立曲面与它们之间关系的三个平面．如果其中之一，例如 APQ 是水平的，那么另外两个就是竖直的，分别过直线 AP 和 Ap．

§ 12

画出相垂直的要建立曲面与它们之间关系的三个平面之后，下一步是从曲面上的每一点 M 向这三个平面 $APQ,APq,A\pi\xi$ 引垂线 $QM,Mq,M\xi$，则 $MQ=z,Mq=y,M\xi=x$．补成长方体，则交于 A 点的三条边分别等于所引垂线，即 $AP=x,Ap=y,A\pi=z$．知道了这三条线就知道了点 M 的位置．点 M 所在位置如 §4 图 119 时 x,y,z 都为正．连 MA，点 M 在 MA 的延长线上时 x,y,z 都为负．

§ 13

如果 x,y,z 间的方程中，垂直于平面 APQ 的那个变量，也即 z 的次数都为偶数，那么它的值都是成对的，每对都大小相等，一正一负．因而曲面被分为两部分，位于平面 APQ 的两侧，形状相似，至 APQ 的距离相等．也即该曲面所围成的立体被平面 APQ 分成相似且相等的两部分．我们称分平面图形为相似相等两部分的直线为直径．类似地，我们称分立体为相似相等两部分的平面为直

径面. 因此,如果方程中 z 的次数都为偶数,则平面 APQ 为直径面.

§ 14

同样地,曲面方程中,如果垂直于平面 APq 的变量 y,其次数都为偶数,则平面 APq 是直径面. 如果变量 x 的次数都为偶数,则平面 $Ap\xi$ 为直径面. 这样,对任何曲面,平面 APQ, APq, $Ap\xi$ 中随便哪一个是否为直径面,从以 x, y, z 为变量的方程都一目了然. 三个面中,可以两个甚至三个都是直径面. 例如,对以 A 为心,a 为半径的球,由 $AM=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=a$ 得 $x^2+y^2+z^2=a^2$,三个面都分它为相似且相等的两部分,都是直径面.

§ 15

图 120 画出了建立曲面方程所用的三张平面,它们互相垂直,交于 A,分别记为 $QQ^1Q^2Q^3$, $TT^1T^2T^3$, $VV^1V^2V^3$. 想象,这三张平面都无穷扩展,则整个空间被限制成八部分,或八限. 这八限用图上字母表示为 $AX, AX^1, AX^2, AX^3, AX^4, AX^5, AX^6, AX^7$. 如果令三个变量 x, y, z 在限 Ⅰ,即 AX 中都为正,则在其余各限中 x, y, z 里面都有或者一个,或者两个,或者全部三个为负. 下表列出了各限中变量的符号.

限 AX	限 AX^1	限 AX^2	限 AX^3
$AP=+x$	$AP'=-x$	$AP=+x$	$AP'=-x$
$AR=+y$	$AR=+y$	$AR=+y$	$AR=+y$
$AS=+z$	$AS=+z$	$AS'=-z$	$AS'=-z$

限　AX^4	限　AX^5	限　AX^6	限　AX^7
$AP = +x$	$AP' = -x$	$AP = +x$	$AP' = -x$
$AR' = -y$	$AR' = -y$	$AR' = -y$	$AR' = -y$
$AS = +z$	$AS = +z$	$AS' = -z$	$AS' = -z$

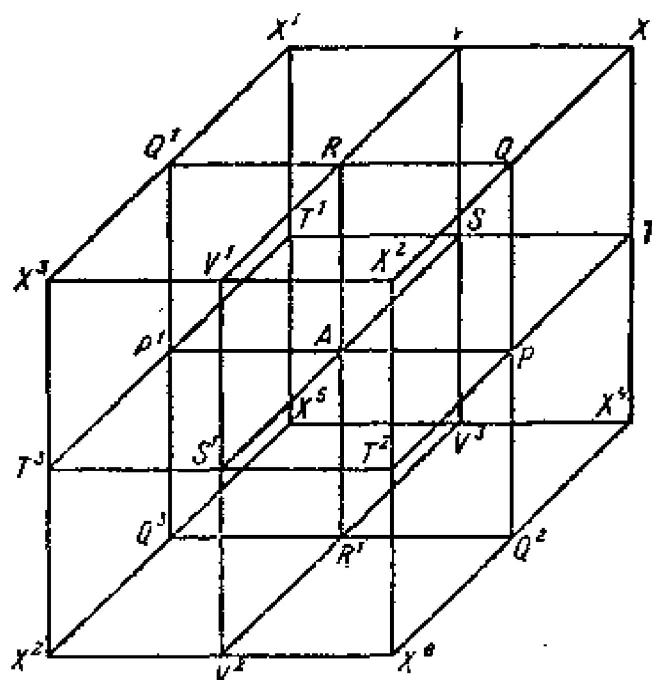


图 120

§ 16

为简单起见,我们用数字标记这八限.参见图 121,A 是八限的共有点,八限由交于 A 相垂直的三个平面分隔而成.这三个平面由交于点 A 相垂直的直线 Pp, Qq, Rr 决定.因而八限可以用字母 P, Q, R 和它们的小写标明.直线 AP, AQ, AR 构成的长方体离 A 无穷扩展而成的部分为基本部分,或限Ⅰ,记为 PQR.直线 AP, Aq, Ar 的无穷延长线构成的长方体部分,记为 Pqr.如果令 $AP = x$, $AQ = y$, $AR = z$,则 $Ap = -x$, $Aq = -y$, $Ar = -z$.我们标记八限

如下

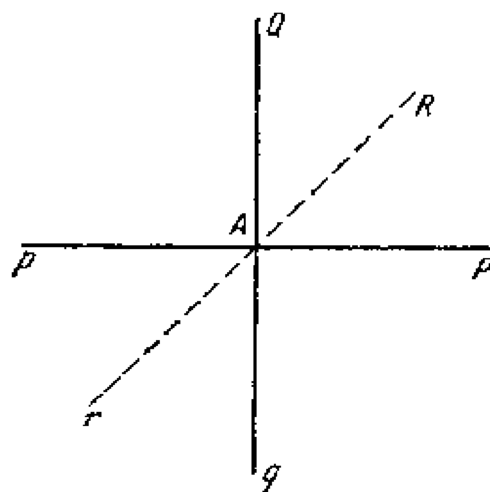


图 121

	Ⅰ	Ⅱ
	PQR	PQr
坐标符号	$\begin{cases} AP=+x \\ AQ=+y \\ AR=+z \end{cases}$	$\left.\begin{matrix} AP=+x \\ AQ=+y \\ Ar=-z \end{matrix}\right\}$
	Ⅲ	Ⅳ
	PqR	pQR
坐标符号	$\begin{cases} AP=+x \\ Aq=-y \\ AR=+z \end{cases}$	$\left.\begin{matrix} Ap=-x \\ AQ=+y \\ AR=+z \end{matrix}\right\}$
	Ⅴ	Ⅵ
	Pqr	pQr
坐标符号	$\begin{cases} AP=+x \\ Aq=-y \\ Ar=-z \end{cases}$	$\left.\begin{matrix} Ap=-x \\ AQ=+y \\ Ar=-z \end{matrix}\right\}$

	Ⅶ	Ⅷ
	pqR	pqr
坐标符号	$\left\{\begin{array}{l} Ap = -x \\ Aq = -y \\ AR = +z \end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{l} Ap = -x \\ Aq = -y \\ Ar = -z \end{array}\right\}$

§ 17

八限之间的邻接程度有所不同.首先,有这样的限,它们的坐标符号有两个是相同的,只有一个不同.这样的两个限,其邻接点构成一个面,称它们为面邻.其次,两限的坐标符号只有一个是相同的,有两个不同.其邻接点构成一条直线,称这样的两限为线邻.最后,三个坐标的符号都相反,这样的两限只在点 A 一个点处相邻接,称它们为点邻.下面的表给出了每限与其余各限之间的邻接关系.

限	面邻			线邻			点邻
PQR Ⅰ	PQr Ⅱ	PqR Ⅲ	pQR Ⅳ	Pqr Ⅴ	pQr Ⅵ	pqR Ⅶ	pqr Ⅷ
PQr Ⅱ	PQR Ⅰ	Pqr Ⅴ	pQr Ⅵ	PqR Ⅲ	pQR Ⅳ	pqr Ⅷ	pqR Ⅶ
PqR Ⅲ	Pqr Ⅴ	PQR Ⅰ	pqR Ⅶ	PQr Ⅱ	pqr Ⅷ	pQR Ⅳ	pQr Ⅵ
pQR Ⅳ	pQr Ⅵ	pqR Ⅶ	PQR Ⅰ	pqr Ⅷ	PQr Ⅱ	PqR Ⅲ	Pqr Ⅴ
Pqr Ⅴ	PqR Ⅲ	PQr Ⅱ	pqr Ⅷ	PQR Ⅰ	pqR Ⅶ	pQr Ⅵ	pQR Ⅳ
pQr Ⅵ	pQR Ⅳ	pqr Ⅷ	PQr Ⅱ	pqR Ⅶ	PQR Ⅰ	Pqr Ⅴ	PqR Ⅲ
pqR Ⅶ	pqr Ⅷ	pQR Ⅳ	PqR Ⅲ	pQr Ⅵ	Pqr Ⅴ	PQR Ⅰ	PQr Ⅱ
pqr Ⅷ	pqR Ⅶ	pQr Ⅵ	Pqr Ⅴ	pQR Ⅳ	PqR Ⅲ	PQr Ⅱ	PQR Ⅰ

§ 18

可见，每限有面邻线邻各三个，点邻一个．任何两限之间的邻接关系，表中都一目了然．值得注意的是表中表示限的数字的顺序．为了使得这顺序更明显，我们把前面表中的数字单提出来构成一表如下

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	5	6	3	4	8	7
3	5	1	7	2	8	4	6
4	6	7	1	8	2	3	5
5	3	2	8	1	7	6	4
6	4	8	2	7	1	5	3
7	8	4	3	6	5	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1

后面我们将看到该表的用处．

§ 19

前面提过，曲面方程中 z 的次数都为偶数时，曲面由相似相等的两部分组成，即限 1 限 2 部分相等，且 3 与 5 两限部分，4 与 6 两限部分，7 与 8 两限部分也相等．这相等部分所在的对应限，恰如上节表中开头为 1 和 2 的两行所列．如果 y 的次数都为偶数，则相等部分所在的对应限为：1 与 3，2 与 5，4 与 7，6 与

8. x 的次数都为偶数时，则相等部分所在的对应限为：1 与 4，2 与 6，3 与 7，5 与 8.

各坐标次数为偶数时，相等部分所在的对应限列出如下：

z 偶 对应限为	y 偶 对应限为	x 偶 对应限为
1,2,3,4,5,6,7,8	1,2,3,4,5,6,7,8	1,2,3,4,5,6,7,8
2,1,5,6,3,4,8,7	3,5,1,7,2,8,4,6	4,6,7,1,8,2,3,5

§ 20

要曲面的线邻限 1，5 部分相等，则应方程在 y，z 都取负时不变，要 y，z 都取负时不变，则应各项中 y，z 的次数之和都同偶或同奇. 如果 1 与 5 两限部分相等，则 2 与 3，4 与 8，6 与 7 两限部分也相等. 同样的，如果曲面方程各项中 x，z 的次数的和都同偶或同奇，则 1 与 6，2 与 5，3 与 8，5 与 7 两限部分相等.

下面是曲面方程各项中次数和同偶或同奇的两个变量，和相等部分所在的对应限.

y,z 同 对应限为	x,z 同 对应限为	x,y 同 对应限为
1,2,3,4,5,6,7,8	1,2,3,4,5,6,7,8	1,2,3,4,5,6,7,8
5,3,2,8,1,7,6,4	6,4,8,2,7,1,5,3	7,8,4.3,6,5,1,2

如果曲面方程各项中，全体三个变量 x,y,z 次数的和都同偶或同奇，则曲面的下面每两个点邻限部分相等.

1,2,3,4,5,6,7,8,

8,7,6,5,4,3,2,1.

§ 21

如果前面条件中的 2 个或 3 个同时被满足,则曲面在 4 个或 8 个限中的部分相等.

如果每项中 x,y 各自的次数都为偶数,则曲面下面每四个限中的部分相等.

1,2,3,4,5,6,7,8,

3,5,1,7,2,8,4,6,

4,6,7,1,8,2,3,5,

7,8,4,3,6,5,1,2.

如果每项中 x,z 各自的次数都为偶数,则曲面下面每四个限中的部分相等.

1,2,3,4,5,6,7,8,

2,1,5,6,3,4,8,7,

4,6,7,1,8,2,3,5,

6,4,8,2,7,1,5,3.

如果每项中 y,z 各自的次数都为偶数,则曲面下面每四个限中的部分相等.

1,2,3,4,5,6,7,8,

2,1,5,6,3,4,8,7,

3,5,1,7,2,8,4,6,

5,3,2,8,1,7,6,4.

§ 22

如果每项中一个变量的次数都为偶数,另两个变量次数的和,或者都为偶数,或者都为奇数,则曲面四个相等部分所在限分述如

下：

如果 z 的次数都为偶数，x，y 次数的和或者都为偶数，或者都为奇数，则曲面下面每四个限中的部分相等.

1,2,3,4,5,6,7,8,

2,1,5,6,3,4,8,7,

7,8,4,3,6,5,1,2,

8,7,6,5,4,3,2,1.

如果 y 的次数都为偶数，x，z 次数的和或者都为偶数，或者都为奇数，则曲面下面每四个限中的部分相等.

1,2,3,4,5,6,7,8,

3,5,1,7,2,8,4,6,

6,4,8,2,7,1,5,3,

8,7,6,5,4,3,2,1.

如果 x 的次数都为偶数，y，z 次数的和或者都为偶数，或者都为奇数，则曲面下面每四个限中的部分相等.

1,2,3,4,5,6,7,8,

4,6,7,1,8,2,3,5,

5,3,2,8,1,7,6,4,

8,7,6,5,4,3,2,1.

这三种情况，各项中 x，y，z 次数的和，都或者同为奇数，或者同为偶数.

§ 23

曲面四个限中部分相等的情况，还有几种.

考虑 x 与 y，y 与 z 这两个变量对，如果每项中各对的次数和，都或者同为偶数，或者同为奇数，则曲面下面每四个限中的部分相等.

1,2,3,4,5,6,7,8,

5,3,2,8,1,7,6,4,

7,8,4,3,6,5,1,2,

6,4,8,2,7,1,5,3.

加上每项中 x,z 的次数和也或同偶,或同奇,并不增加相等限的组数.这样,如果方程各项中每两个变量次数之和都或同偶或同奇,则曲面的线邻限部分都相等.这里的变量对共三个,应该指出,只要有两对具有所说性质,第三对就也具有.

§ 24

一种四部分相似相等的条件,再加一种它不包含的两部分相似相等的条件,就成为八部分都相似相等的条件.即同时满足这样两种条件时,曲面由八个相等部分组成.前面提到的性质,这种曲面的方程全都具有.即全体三个变量各自的次数都全为偶数,从面每两个和全体三个的次数之和也都全为偶数.

§ 25

三元方程,单个变量,其次数的奇偶容易看出,看三个变量次数之和的奇偶也不难,但每两个的次数之和的奇偶,就不那么简单.这时我们或者将 $x = nz$,或者将 $y = nz$,或者将 $x = ny$ 代入方程,然后看所得方程中变量 z(前两种代入)或 y(第三种代入)的次数是否全为偶数.是,则两个变量次数之和必或同偶,或同奇,因面曲面至少两部分相似相等.

第二章

曲面与平面的交线

§ 26

线的交是点.类似地,面的交是线,是直线或曲线.从初等几何中我们已经知道,两张平面的交是一条直线.球面与平面的交是圆.曲面与平面的交对认识曲面很有帮助.交线是曲面的无穷个点构成的集合,面前章讨论的,变量的个别值,只给出曲面的个别点.

§ 27

我们用相垂直的三个平面作曲面的参照,因面我们先讨论曲面与这三张平面的交线(参见图 121).先看平面 APQ,它由变量 $AP=x$,$AQ=y$ 确定.变量 z 表示曲面到 APQ 的距离.显然 $z=0$ 时得到的是曲面的位于平面 APQ 上的点,也即所得 x,y 间的方程表示曲面与平面 APQ 的交线.类似地,置 $y=0$,则所得 x, z 间的方程,表示曲面与平面 APR 的交线;面置 $x=0$,则所得 y, z 间方程,表示曲面与平面 AQR 的交线.

§ 28

前面指出过，以 A 为心，a 为半径的球面，其方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$. 现在就用球面作例子来解释前节的交线. $z=0$ 时，得方程 $x^2+y^2=a^2$，它是球面与平面 APQ 的交线，是以 A 为心，a 为半径的圆. 同样地，$y=0$ 时的方程 $x^2+z^2=a^2$，是球面与平面 APR 的交线，是圆；$x=0$ 时的方程 $y^2+z^2=a^2$ 是球面与平面 AQR 的交线，也是圆. 这里的结论是显然的，过球心的平面截球面所得为最大圆，也即与球同心同半径的圆.

§ 29

平行于垂直三平面之一的平面与曲面的交线也不难确定. 设平面与 APQ 平行，距离为 h，则曲面上距 APQ 为 $z=h$ 的点就都在这平行平面上. 这些点自然也就构成了曲面与平行平面的交线. 因而置曲面方程中的 $z=h$ 就得到这条交线的方程. 事实上，得到的是两个直角坐标 x,y 间的方程. 球面与平行于 APR 的和与平行于 AQR 的平面的交线，都可用同样的方法得到，这里不再重复.

§ 30

这样，令三元曲面方程中的 z 为常数 h，得到的就是曲面与平行于 APQ 的平面的交线方程. h 是平行平面至 APQ 的距离，让 h 取一切可能的正值和负值，就得到曲面与一切平行于 APQ 的平面的交线. 这交线的条数无穷，整个曲面被它们分成了无穷多相平行的部分，因而曲面可由这无穷多条交线决定. 这无穷多条交线都由 x,y 间的同一个方程表示（方程中含有一个可取一切正值和一切

负值的 h),因而它们是相似的,至少是仿射的(参见第十八章).

§ 31

如果 x,y 的方程不因 h 的改变而改变,则曲面与平行于 APQ 的一切平面的交线全都相同. 不因 h 面改变,则必不含 h,也即不含 z. 这样,如果曲面方程不含 z,则曲面与平行于 APQ 的一切平面的交线都相同. 这时曲面方程只含 x 和 y 两个变量,本身就是交线方程. 同样的,曲而方程不含 x,则曲面与平行于 AQR 的一切平面的交线都相同;不含 y,则曲面与平行于 APR 的一切平面的交线都相同.

§ 32

这种曲面不只易于想象,易于画出来,也易于用实际的材料把它构造出来. 假定方程不含 z,也即只含坐标 $AP = x$ 和 $AQ = PM = y$. 依据方程先在平而 APQ 上画曲线 BMD,如图 122 所示. 想象一根无穷直线,始终垂直于平面 APQ,让它沿曲线 BMD 移动,就形成不含 z 方程所表示的曲面. BMD 为面时,形成的是圆柱而;为椭面时,形成的是压缩圆柱面;如果 BMD 由几段直线首尾连接而成,则形成的是棱柱而.

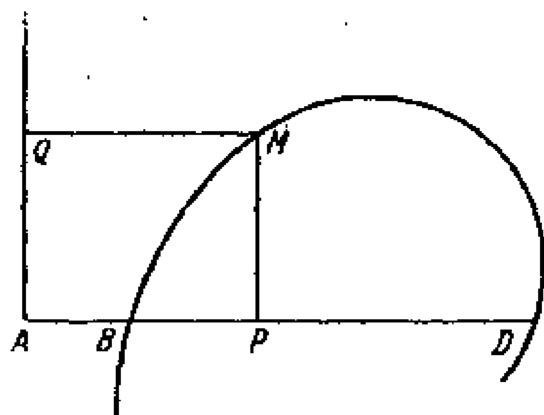


图 122

§ 33

我们把这类曲面统称之为柱面,相应地,图形 *BMD* 都称为底.曲面方程只要缺少变量 x,y,z 中的一个,它表示的就必定是柱面.如果同时缺少 y,z 两个变量,即 x 为常数,则 *BMD* 成为垂直于 *AD* 的直线,曲面成为垂直于 *APQ* 的平面.

§ 34

接下去最值得注意的,是由 x,y,z 的齐次方程产生的曲面.齐次,即变量次数的和,各项都相同,整齐划一.例如 $z^2 = mxz + x^2 + y^2$ 就是齐次方程.该方程决定的曲面与平行于同一个主平面(两条坐标线决定的平面,共三个)的平面的交线都相似.例如 z 取常数 h,方程成为

$$h^2 = mhx + x^2 + y^2.$$

对 h 的无穷多个值,该方程给出的无穷多条曲线都相似,其参数都等于 h 或与 h 成比例.也即这些交线相似,且随平行平面至 *APQ* 的距离的增加而增大,因而从 A 点出发过各交线同调点(第十八章 § 438)的线都是直线.

§ 35

假定我们有一个这样的 x,y,z 的齐次方程.参见图 123,给 z 一个值 $AR = h$,设 *TSsMm* 是方程表示的曲面与过点 R 平行于 *APQ* 的平面的交线,点 R 使 $RV = x$, $VM = y$ 满足 x,y 的方程.想象一条保持通过点 A 的无限伸长的直线,使这直线沿 *TSsMm* 移动就可给出方程所表示的曲面.显然,*TSsMm* 为以 R 为心的圆时,所得为正

圆锥面；*TSsMm* 为圆，但 *R* 不为心时，所得为斜圆锥面；如果 *TSsMm* 由几个直线段组成，则所得为棱锥面. 因此，我们称该方程所表示的为锥面.

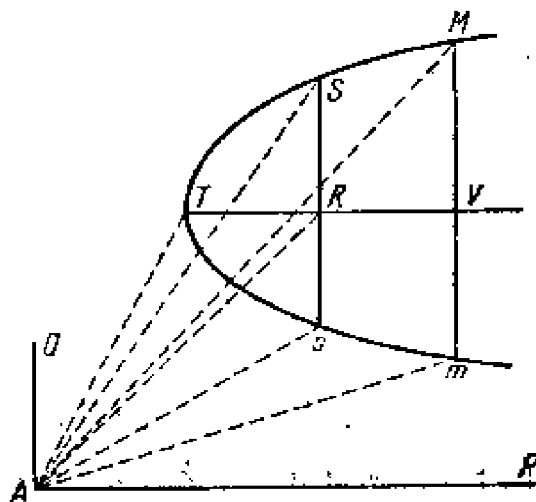


图 123

§ 36

上节得到，三元齐次方程表示的曲面是圆锥面或棱锥面. 曲面与平行于平面 *APQ* 的平面的交线，彼此相似，且各交线的参数都与交线至 *A* 点的距离成比例. 对平面 *APR* 和 *AQR* 分别重复同样的过程，我们得到，曲面与平行于 *APR* 和 *AQR* 的平面的交线，各自都具有同样的性质. 各自彼此相似，且对应边与至 *A* 点的距离成比例. 后面我们证明，这里的曲面与过 *A* 点的任一平面平行的各平面的交线，都彼此相似，且其参数与至顶点 *A* 的距离成比例.

§ 37

现在讲一种更一般的曲面，设 *Z* 是 *z* 的某个函数，并假定给

了我们一个 x,y,Z 间的齐次函数. 记 $z=h$ 时的 $Z=H$,得到 x,y,H 间的齐次方程,因而曲面与平行于 APQ 的各平面的交线彼此相似,但其参数不是与距离 h,面是与 h 的函数 H 成比例. 由此得到,过这些交线同调点的线不是直线,而是依赖于函数 Z 的曲线. 由此当然得不到,曲面与平行于任何另外一个平面的各平面的交线彼此相似.

§ 38

柱面锥面是上节曲面的特例. 事实上,如果 $Z=z$ 或 $Z=\alpha z$,则上节方程是 x,y,z 的齐次方程,曲面为锥面. 类似地,如果 $Z=\alpha+\beta z$,结果相同,只有一点区别:锥面的顶点不是 A. 如果 $Z=\frac{b-z}{b}$,则锥面顶点至 A 的距离为 b. 如果令 $b=\infty$,则曲面不再是锥面,而是柱面,这时 $Z=1$. 由此得,柱面方程是变量 x,y 和常数 1 的齐次方程. 面变量 x,y 的齐次方程,不管怎样,只要不含 z,就都可以化成 x,y,和 1 的齐次方程. 因而如我们已经看到的,凡缺少一个变量的齐次方程,它表示的就都是柱面.

§ 39

与平行于 APQ 的平面的交线都相似,这样的曲面中特别值得注意的一种是,交线都为圆,且圆心都在垂直于 APQ 的直线 AR 上. 这种曲面可由旋转得到,因面叫旋转面. 这种旋转面的通用方程为 $Z^2=x^2+y^2$. 给定一个 z 值,就有一个 $Z=H$,就得到一个交线方程 $H^2=x^2+y^2$,方程表明,交线是半径为 H,圆心在 AR 上的圆. $Z^2=z^2$ 时,是直圆锥面;$Z=a^2$ 时,是圆柱面;$Z=a^2-z^2$ 时,是球面. 这是旋转面的几种主要形状.

§ 40

参见图 124，我们讨论这样的曲面，它同垂直于轴 AP 的平面的交线 PTV，都是顶点在平行于轴 AP 的直线 DT 上的三角形. 设曲线 AVB 为该曲面的底部，也即曲面同平面 APQ 的交. 又设直线 TD 到轴 AB 的距离，也即 $AD=c$. 照例引进坐标 $AP=x$，$PQ=y$，$QM=z$，则 PV 是 x 的一个函数，记它为 P. 由三角形 VQM 与 VPT 相似，得

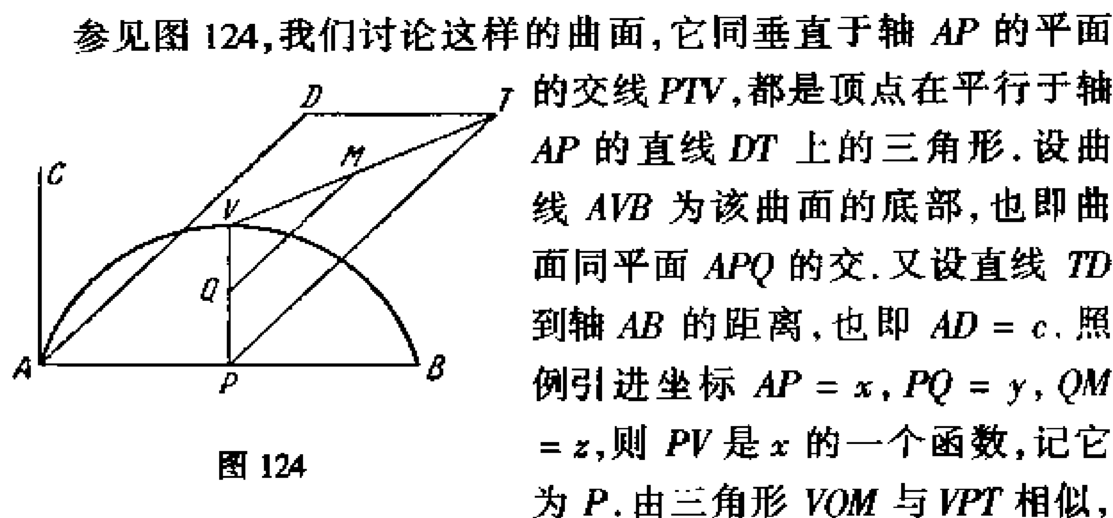


图 124

$$P:c=(P-y):z \text{ 或 } z=c-\frac{cy}{P}.$$

从而对这类曲面我们有$\frac{c-z}{y}$是 x 的一个函数. 这类曲面与锥面的区别在于，这类曲面的顶峰是一条直线 DT，而锥面的顶峰是一个点. *Wallis* 对于其底部 AVB 为圆的这类曲面作了详细讨论，并称之为楔顶锥.

§ 41

参见图 125，跟前节一样，曲面与垂直于 AB 的平面的交线 PTV 为直角三角形，P 为直角，不同的是，顶点 T 构成一条曲线. 底部同于前节为 AVB，记三个坐标为 $AP=x$，$PQ=y$，$QM=z$，则直线 PV 沿曲线 AVB 移动时构成 x 的函数，记为 P；同时 PT 也构成 x 的函数，记为 Q. 同于前节从相似三角形得 $P:Q=(P-y):$

z,从而 $z = Q - \frac{Qy}{P}$,也即 $Pz + Qy = PQ$,或$\frac{z}{Q} + \frac{y}{P} = 1$ 为常数.

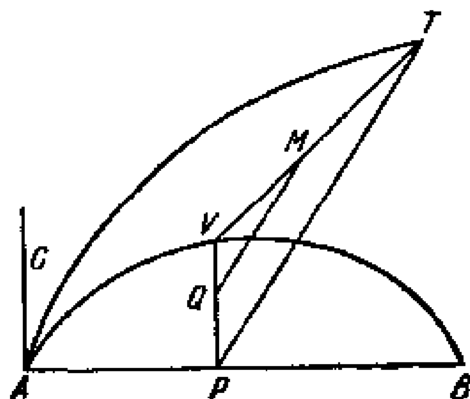


图 125

因而 y,z 的方程,如果次数不高于 1,它描述的曲面就属我们这里的类型.

§ 42

我们讨论过这样的曲面,平行于同一参照面的平面截它而成的交线都相似.现在我们把叙述中的相似换成仿射进行讨论.仿射,即取同调横标,则纵标彼此成比例.参见图 126,设曲面与参照面的交线分别为 ABC,ACD 和 ABD,且曲面与平行于 ACD 的面都仿射.记 ACD 的底 $AC = a$,高 $AD = b$.取坐标 $Aq = p$,$qm = q$,则 q 是 p 的一个函数.考虑某个平行于

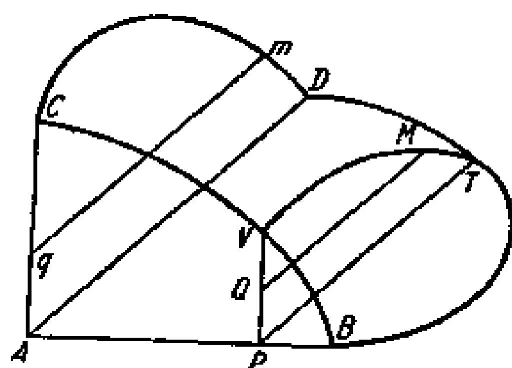


图 126

ACD 的面的截线 PTV,记 $AP = x$,则底 PV 和高 PT 都是 x 的函数,分别记为 P 和 Q.记 $PQ = y$,$QM = z$,则根据仿射规律有 $a:p = P$

$:y, b:q = Q:z$,从而 $y = \frac{Pp}{a}, z = \frac{Qq}{b}$.

§ 43

可见：与平行于 ACD 所在平面的平面的交线都与 ACD 仿射，对这样的曲面，只要知道了它与参照面的交线 ABC，ACD，ABD，就可以确定这曲面的性质. 事实上，由于 P，Q 是 x 的函数，以及 q 是 p 的函数，因而可以用变量 x 和 p 表示变量 y 和 z. 如果要求出坐标 x，y，z 间的方程，那么由 q 是 p 的函数知，p，q 可由方程联系. 将 $p = \frac{ay}{P}$，$q = \frac{bx}{Q}$ 代入 p，q 间的方程，得 y，z 间的含 P，Q 的方程. 而 P，Q 都是 x 的函数，这样我们就得到了 x，y，z 间的方程，所给曲面的性质就由这个方程表示. 显然 $x = 0$，则 $P = a$，$Q = b$.

§ 44

如果曲面方程各项 y，z 次数的和都相同，则曲面与垂直于 AP 轴的平面的交线由直线组成. 事实上，替 x 以任何常数我们都得到 y，z 的齐次方程，它给出一条或几条直线. y，z 指数的和各项相同，不管同奇同偶，都属 § 20 讲过的情形. 根据那里的表知，此时曲面的 1，5 限部分，2，3 限部分，4，8 限部分，6，7 限部分都相等.

§ 45

我们讲了多种可由直线形成的曲面,刚讲的以及柱面和锥面都是. 诚然,柱面和锥面与过轴 AP 的平面的交线是直线. 刚讲过

的这一类更一般些.事实上,如图 127 所示,设 $AKMP$ 是曲面与过轴 AP 的平面的交线,记角 MPV 为 φ,记 $AP = x, PQ = y, QM = z$,

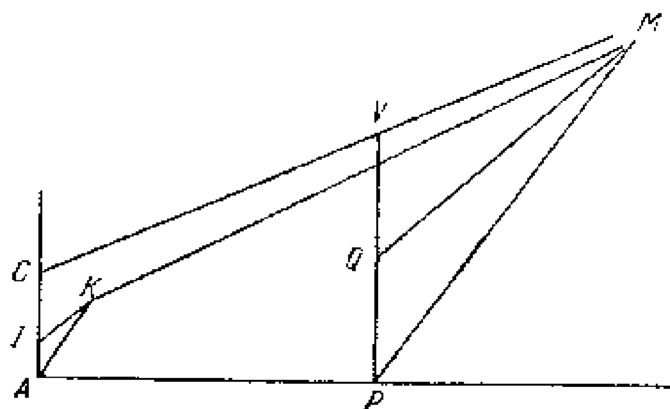


图 127

则 $\mathrm{tg}\varphi = \frac{z}{y}$,直线 $PM = \frac{z}{\sin\varphi}$.要 KM 为直线,则应 $\frac{z}{\sin\varphi} = \alpha x + \beta$,其中 α, β 是只依赖于角 φ,不依赖于 y, z 的常数.设 R, S 是类似于 α, β 的函数,则 $x = Rz + S$ 或 $x = Ry + S$.或者设 T, S 分别为 y, z 的一次和零次函数,则这类曲面的通用方程为 $x = T + S$.

§ 46

x, y, z 间方程表示的曲面,它与过 AP 轴的平面的交线易于确定.实际上,记交线 $AKMP$ 对平面 $ACVP$ 的倾角为 φ,记直线 $PM = v$,PM 为所求交线的纵标,则 $QM = z = v\sin\varphi$, $PQ = y = v\cos\varphi$.换曲面方程中的 y, z 为 $v\cos\varphi$, $v\sin\varphi$,得到的就是交线 $AKMP$ 的 x, v 间的方程.类似地,可以求出曲面与过轴 AQ 和过轴 AR 的平面的交线(参见图 121).三个变元 x, y, z 所依赖的这三根轴 AP, AQ, AR 是可以交换位置的,因而关于任何一根轴的结论,也都适用于另外两根轴.

§ 47

取平面 APQ 作参照面，即交线所在平面都或平行于它，或倾斜于它. 换曲面方程中的 z 为一个常数，所得就是平行时交线的方程. 倾斜时，交线所在平面与 APQ 的交为直线. 这直线为 AP 或 AQ 时曲面与平面的交线上节刚讲. 下面我们逐步推向一般的倾斜情形.

§ 48

参见图 128，先设倾斜截平面与 APQ 的交线 ES 平行于轴 AP，倾角 $QSM=\varphi$，距离 $AE=f$. 由 $AP=x$，$PQ=y$，$QM=z$ 知，$ES=x$，$QS=y+f$. 如果取 ES 作截线的轴，则横标 $ES=x$，纵标 $SM=v$. 由 $QSM=\varphi$ 得 $QM=z=v\sin\varphi$，$SQ=y+f=v\cos\varphi$，从而 $y=v\cos\varphi-f$. 代

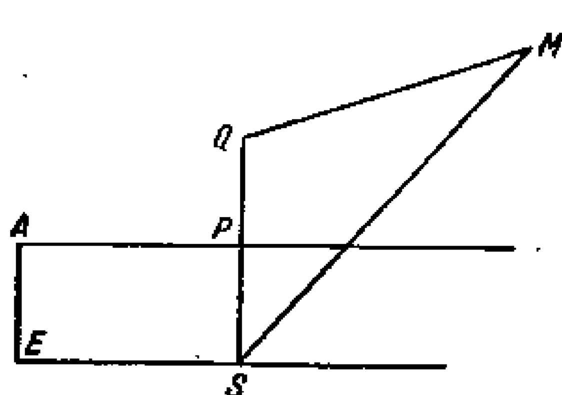


图 128

$$y=v\cos\varphi-f,\ z=v\sin\varphi,$$

入曲面的 x,y,z 间方程，得坐标 x,v 间方程. 这就是我们所求的平面 ESM 截曲面的截线的方程. 如果 ES 垂直于轴 AP，则它平行于平面 APQ 上另一根轴，交换变量 x,y，就可以用这里的方法求出截线.

§ 49

参见图 129,现在设交线 ES 在平面 APQ 上位置任意.自 E 引 AP 的垂线和平行线 AE 和 EXT. 记 $AE = f$, 角 $TES = \theta$,取变量 $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$. 自 Q 向 ES 引垂线 QS,再连直线 MS,则角 QSM 为截平面对 APQ 的倾角,我们记它为 φ. 再设截平面上的坐标为 $ES = t$, $SM = v$. 自 S 分别向 ES 和 QP 的延长线引垂线 ST 和 SV,则

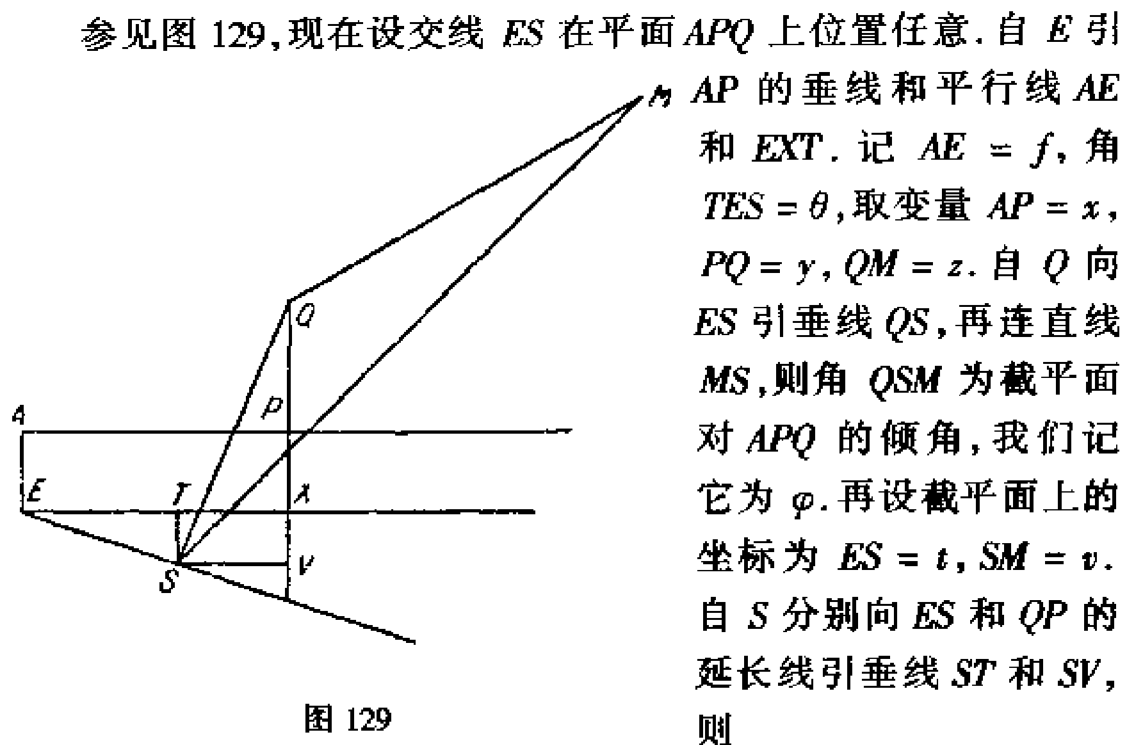


图 129

$$QM = z = v\sin\varphi, QS = v\cos\varphi, SV = v\cos\varphi\sin\theta,$$
$$QV = v\cos\varphi\cos\theta.$$

又

$$ST = VX = t\sin\theta, ET = t\cos\theta.$$

利用以上表达式最后得

$$AP = x = t\cos\theta + v\cos\varphi\sin\theta, PQ = y = v\cos\varphi\cos\theta - t\sin\theta - f.$$

将 x, y, z 换成上面的表达式,就得到所求的截线方程.

§ 50

这样,有了曲面方程,我们就可以求出曲面的任何一个截线的

方程. 首先, 显然, 其方程是 x, y, z 间代数方程的曲面, 它的截线方程全是代数的. 其次, 由于表示截线的 t, v 间方程, 是代

$$z = v\sin\varphi,\ x = t\cos\theta + v\cos\varphi\sin\theta,$$

$$y = v\cos\varphi\cos\theta - t\sin\theta - f$$

入曲面方程面得, 所以截线方程的次数, 比曲面方程的, 不会高, 但可以低, 因为代入过程中可能有抵消.

§ 51

如果面方程的次数为 1, 即其形状为

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = a,$$

则面的截线为直线, 后面我们证明, 此时面为平面. 初等几何中我们知道, 两张平面的交线为直线. 而方程为

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \xi yz + ax + by + cz + e^2 = 0$$

的面, 其截线必为直线或二阶线, 即截线方程的次数绝不会高于 2.

第三章

柱面、锥面、球面的截线

§ 52

柱、锥、球都是初等几何的讨论对象. 先对这三种曲面的截线进行讨论,大有益于稍一般些曲面的截线的讨论.

初等几何里讲了直、斜两种圆柱. 垂直于轴的截线是圆心在同一条直线上的相等的圆,这样的圆柱叫直圆柱. 相等的为圆的截面不垂直于轴,而是与轴成某个另外的角度,这样的圆柱叫斜圆柱. 斜圆柱的另一种描述是:垂直于轴的截线是中心在同一条直线上的相等的椭圆,这样的圆柱叫斜圆柱,称中心所在的直线为圆柱的轴.

§ 53

参见图 130,给定了一个圆柱,直的或斜的,轴垂直于墙面. 底,也即圆柱与墙面的交线为 $AEBF$,它为圆或椭圆. 关于斜圆柱的结论都可以很容易地用到直圆柱上去,因面我们假定底 $ABEF$

是以 C 为中心 AB, EF 为共轭轴的椭圆. 记半轴 $AC = BC = a$, $CE = CF = c$. 取定坐标 $CP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, 则由椭圆性质得 $a^2c^2 = a^2y^2 + c^2x^2$. 这也是圆柱面的方程. 平行于 CPQ 的截线都相等, 因而第三个变量 z 在方程中不出现.

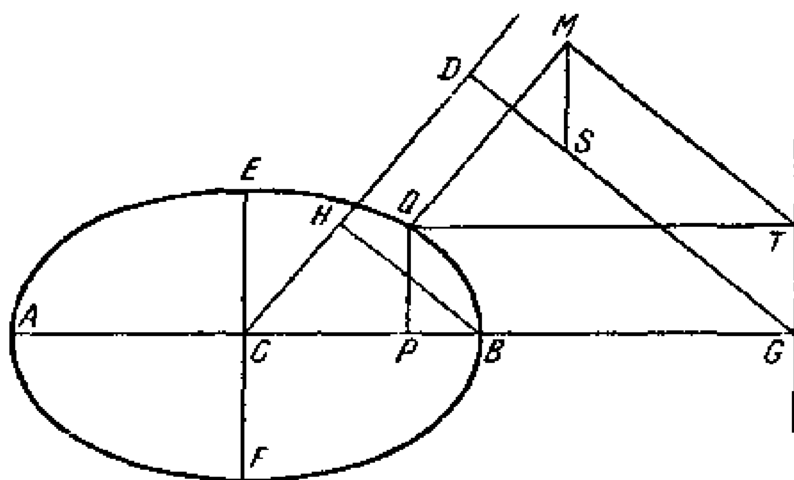


图 130

§ 54

可见, 一个柱面的平行于底的截线都相等, 直柱面时为圆, 斜柱面时为椭圆. 柱面与垂直于平面 APQ 的平面的截线: 相交时, 为两条相平行的直线; 相切时, 合为一条直线; 不相交时, 为虚的. 垂直于 APQ 的平面的方程为 x, 或 y, 或 $x \pm \alpha y$ 等于常数. 代它们入柱面方程, 所得即为截线方程. 对截线方程进行分析, 就得到上面的结论. 这样, 我们求出了柱面与平行于三个主平面中任何一个的平面的交线.

§ 55

为考察其余的截线, 我们先假定截平面与底平面的交线 GT

平行于 EF,垂直于 AB,交 AB 的延长线于 G.记 $CG=f$,记截平面对底平面的倾角为 φ,记截平面与柱面之轴的交点为 D.连直线 DG,则角 $DGC=\varphi$,因而

$$DG=\frac{f}{\cos\varphi},CD=\frac{f\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

从所求截线上任一点 M 引平行于 DG 的直线 MT,由 $TQ=f-x$,角 $QTM=\varphi$,得

$$TM=\frac{f-x}{\cos\varphi},QM=\frac{(f-x)\sin\varphi}{\cos\varphi}=z.$$

引平行于 TG,因而垂直于 DG 的直线 MS,则

$$MS=TG=PQ=y,DS=\frac{x}{\cos\varphi}.$$

§ 56

取直线 DS 和 SM 作所求截线的坐标线,记 $DS=t$,$SM=u$,则 $y=u$,$x=t\cos\varphi$,由 $z=\frac{(f-x)\ \sin\varphi}{\cos\varphi}$ 得 $z=f\mathrm{tg}\varphi-t\sin\varphi$. 将这里的 x 和 y 代入柱面方程 $a^2c^2=a^2y^2+c^2x^2$,得所求截线的方程

$$a^2c^2=a^2u^2+c^2t^2\cos^2\varphi.$$

该方程表明,截线是椭圆,中心在点 D,一根主轴在直线 DG 上,另一根垂直于 DG. 直线 DG 上的半轴($u=0$ 时)$=\frac{a}{\cos\varphi}$.

或者画平行于 GD 的直线 BH,则 $BH=\frac{a}{\cos\varphi}$ 是所求的一根半轴,另一根与它共轭的半轴 $=c=CE$.

§ 57

上节得到的柱面截线是半轴长为$\frac{a}{\cos\varphi}$和 c 的椭圆. 如果底 $AEBF$ 上 AC 为长半轴,则由$\frac{a}{\cos\varphi}$大于 a 知,截线椭圆的长半轴比底面椭圆的长. 如果 $c > a$,也即,如果 GT 平行于底面椭圆的长半轴,则截线椭圆的两个轴可以相等,也即截线可以是圆. 为圆时 $\frac{a}{\cos\varphi} = c$,也即 $\varphi = \frac{a}{c}$. 三角形 BCH 中 C 为直角, 角 $CBH = \varphi$,因面

$$\cos\varphi = \frac{BC}{BH} = \frac{a}{BH}.$$

因此 $BH = CE$ 时截线为圆. 直线 BH,也即为圆的截线,可以在底面上方,也可以在底面下方. 称此时的柱面为斜的,原因就是上方或下方的这两个圆所在的平面都倾斜于轴 CD.

§ 58

参见图 131,考虑截平面与底平面交线 GT 的位置任意的情形. 从底的中心向 GT 引垂线 $GC = f$,设角 $BCG = \theta$,角 $CGD = \varphi$. 引 QT 垂直于 GT,则角 QTM 等于角 CGD. 这样我们有

$$DG = \frac{f}{\cos\varphi}, \quad CD = \frac{f\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

设 M 为所求截线上一点,自 M 向底引垂线 MQ,再自 Q 向轴引垂线 QP. 记 $CP = x$, $PQ = y$, $QM = z$,得 $a^2c^2 = a^2y^2 + c^2x^2$. 向 GT 引垂线 PV 和 QT,则

$$GV = x\sin\theta, PV = f - x\cos\theta,$$

由角 $QPW = \theta$ 得

$$QW = y\sin\theta, PW = VT = y\cos\theta, QT = f - x\cos\theta + y\sin\theta.$$

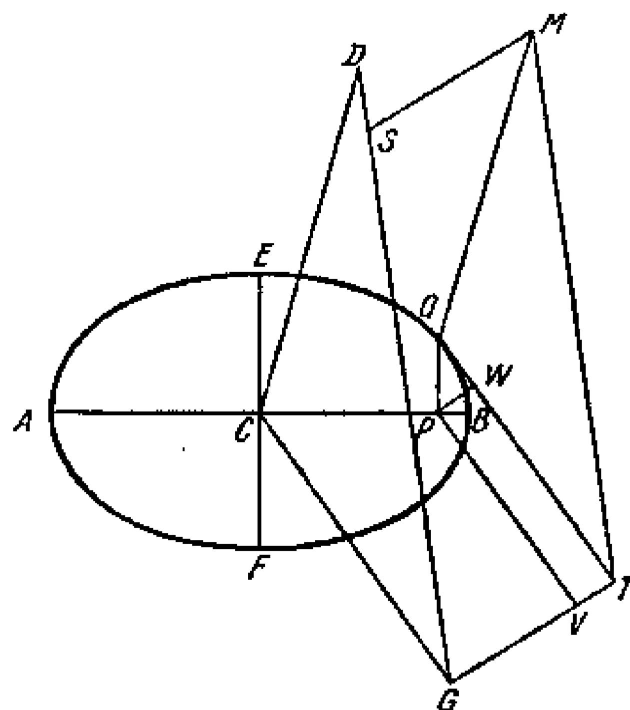


图 131

最后连直线 MT,则由角 $MTQ = \varphi$ 我们有

$$TM = \frac{z}{\sin\varphi}, QT = \frac{z\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

§ 59

补成四边形 $GSMT$,记 $DS = t, SM = GT = u$,则

$$u = GV + VT = x\sin\theta + y\cos\theta.$$

由

$$QT = f - x\cos\theta + y\sin\theta,$$

得

$$QT - CG = y\sin\theta - x\cos\theta,$$

从而

$$DS = TM - DG = \frac{y\sin\theta - x\cos\theta}{\cos\varphi} = t.$$

由

$$x\sin\theta + y\cos\theta = u, \quad y\sin\theta - x\cos\theta = t\cos\varphi,$$

得

$$y = u\cos\theta + t\sin\theta\cos\varphi, x = u\sin\theta - t\cos\theta\cos\varphi.$$

代 x, y 的这两个表达式入 $a^2c^2 = a^2y^2 + c^2x^2$,得

$$a^2c^2 = a^2u^2\cos^2\theta + 2a^2ut\sin\theta\cos\theta\cos\varphi + a^2t^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + $$
$$+ c^2u^2\sin^2\theta - 2c^2ut\sin\theta\cos\theta\cos\varphi + c^2t^2\cos^2\theta\cos\varphi.$$

显然,这是以 D 为中心的椭圆的方程.但只要 $a \neq c$,即柱面不是直的,坐标 DS, SM 就不垂直于主轴.

§ 60

上节求出了截线的坐标 $DS = t, MS = u$ 间的方程.为进一步考察,设截线如图 132 上的 $aMebf$ 所示.为简单起见,记上节所得方程为 $a^2c^2 = \alpha u^2 + 2\beta tu + \gamma t^2$,其中

$$\alpha = a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta,$$
$$\beta = (a^2 - c^2)\sin\theta\cos\theta\cos\varphi,$$
$$\gamma = a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + c^2\cos^2\theta\cos^2\varphi.$$

图 132

又设该截线的共轭主轴为 ab, ef.向其中之一引垂线 Mp,记 $Dp = p, Mp = q$,记角 $aDH = \zeta$.则

$$u = p\sin\zeta + q\cos\zeta, t = p\cos\zeta - q\sin\zeta;$$

代 t, u 的这两个表达式入简记的方程,得

$$\begin{array}{llll} a^2c^2 = & +\alpha\sin^2\zeta p^2 & +2\alpha\sin\zeta\cos\zeta pq & +\alpha\cos^2\zeta q^2 \\ & +2\beta\sin\zeta\cos\zeta & +2\beta(\cos^2\zeta - \sin^2\zeta) & -2\beta\sin\zeta\cos\zeta \end{array}$$

$$+\gamma\cos^2\zeta \qquad -2\gamma\sin\zeta\cos\zeta \qquad +\gamma\sin^2\zeta.$$

§ 61

现在方程是关于成直角的直径的,因而 pq 的系数应该为零.于是由

$$2\sin\zeta\cos\zeta=\sin2\zeta,\cos^2\zeta-\sin^2\zeta=\cos2\zeta,$$

得 $(\alpha-\gamma)\sin2\zeta+2\beta\cos2\zeta=0$, 从而 $\operatorname{tg}2\zeta=\frac{2\beta}{\gamma-\alpha}$,这确定了角 aDH,因而确定了主轴的位置.由此得半轴

$$aD=\frac{ac}{\sqrt{\alpha\sin^2\zeta+2\beta\sin\zeta\cos\zeta+\gamma\cos^2\zeta}},$$

$$eD=\frac{ac}{\sqrt{\alpha\cos^2\zeta-2\beta\sin\zeta\cos\zeta+\gamma\sin^2\zeta}}.$$

§ 62

代

$$2\beta=\frac{2(\gamma-\alpha)\sin\zeta\cos\zeta}{\cos^2\zeta-\sin^2\zeta}$$

入半轴表达式,得

$$aD=\frac{ac\sqrt{\cos^2\zeta-\sin^2\zeta}}{\sqrt{\gamma\cos^2\zeta-\alpha\sin^2\zeta}}=\frac{ac\sqrt{2\cos2\zeta}}{\sqrt{(\alpha+\gamma)\cos2\zeta-\alpha+\gamma}},$$

$$eD=\frac{ac\sqrt{\cos^2\zeta-\sin^2\zeta}}{\sqrt{\alpha\cos^2\zeta-\gamma\sin^2\zeta}}=\frac{ac\sqrt{2\cos2\zeta}}{\sqrt{(\alpha+\gamma)\cos2\zeta+\alpha-\gamma}}.$$

从而半轴的积

$$aD\cdot eD=\frac{2a^2c^2\cos2\zeta}{\sqrt{2\alpha\gamma(1+\cos^22\zeta)-(\alpha^2+\gamma^2)\sin^22\zeta}}.$$

但由

$$(\gamma-\alpha)\sin 2\zeta=2\beta\cos 2\zeta,$$

得

$$(\alpha^2+\gamma^2)\sin^2 2\zeta=4\beta^2\cos^2 2\zeta+2\alpha\gamma\sin^2 2\zeta,$$

从而

$$aD\cdot eD=\frac{2a^2c^2\cos 2\zeta}{\sqrt{4\alpha\gamma\cos^2 2\zeta-4\beta^2\cos^2 2\zeta}}=\frac{a^2c^2}{\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}=\frac{ac}{\cos\varphi}.$$

§ 63

类似地，由

$$aD^2=\frac{2a^2c^2\cos 2\zeta}{(\alpha+\gamma)\cos 2\zeta-\alpha+\gamma},$$

$$eD^2=\frac{2a^2c^2\cos 2\zeta}{(\alpha+\gamma)\cos 2\zeta+\alpha-\gamma},$$

得

$$aD^2+eD^2=\frac{4a^2c^2(\alpha+\gamma)\cos^2 2\zeta}{4\alpha\gamma\cos 2\zeta-4\beta^2\cos^2 2\zeta}=\frac{(\alpha+\gamma)a^2c^2}{\alpha\gamma-\beta^2};$$

从而

$$aD+eD=\frac{ac\sqrt{\alpha+\gamma+2\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}}{\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}},$$

$$aD-eD=\frac{ac\sqrt{\alpha+\gamma-2\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}}{\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}}.$$

这样，半轴 aD，eD 是方程

$$(\alpha\gamma-\beta^2)x^4-(\alpha+\gamma)a^2c^2x^2+a^4c^4=0$$

的根，且我们有

$$\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}=ac\cos\varphi.$$

§ 64

由 $aD\cdot eD=\frac{ac}{\cos\varphi}$，角 φ 为截平面与底平面的夹角，我们得到下面这个漂亮的定理.

定理

平面截柱面，截线轴的积比柱面底的轴之积，等于 1 比截平面与底平面夹角的余弦.

共轭轴所成平行四边形与主轴所成矩形，面积相等.由此得，柱面截线轴所成平行四边形与底的轴所成平行四边形，其面积的比为常数.

§ 65

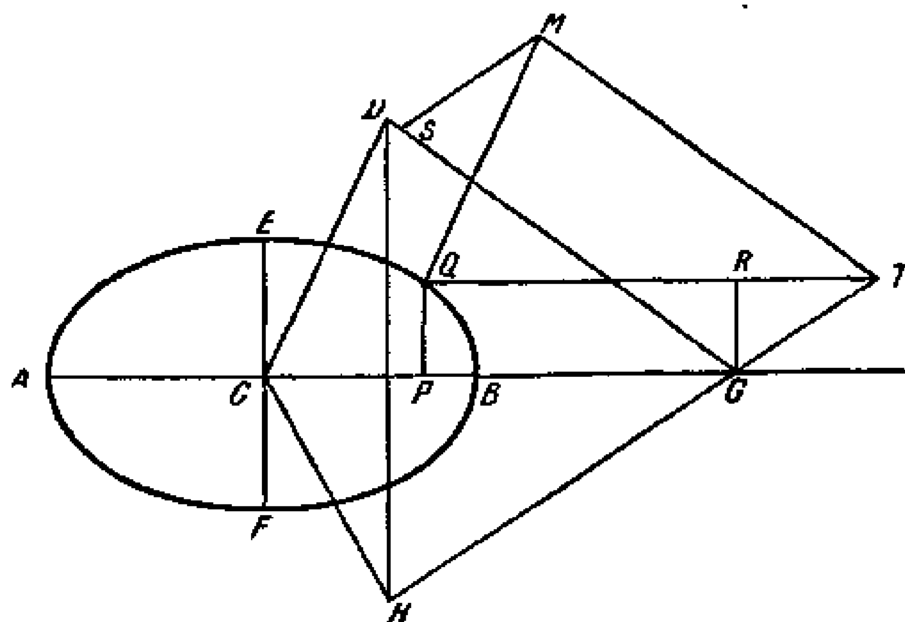


图 133

确定柱面斜截线性质，对此我们还有更好些的办法.参见图133，柱底面 $AEBF$ 的半轴 $AC = BC = a$，$EC = CF = c$；直线 CD 垂直柱底面于点 C，为柱的轴；直线 TH 为截平面与底平面的交线，角 $GCH = \theta$；D 为截平面与柱的轴的交点；角 CHD 为截平面对底平面的倾角，记为 φ.这样，令 $CG = f$，则

$$GH = f\sin\theta,\ CH = f\cos\theta,\ DH = \frac{f\cos\theta}{\cos\varphi},\ CD = \frac{f\cos\theta\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

从而由三角形 DCG 的角 C 为直角，得

$$DG = \frac{f\sqrt{1+\sin^2\theta\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}$$

及角 DGH 的正弦，余弦，正切分别为

$$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}},\qquad \frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}},$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\varphi}.$$

§ 66

MQ 为从截线上一点 M 向底面所引垂线，QP 为纵标，令 $CP = x$，$PQ = y$，则 $a^2c^2 = a^2y^2 + c^2x^2$.引 QT 平行于 CG，GR 垂直于 QT.我们有 $GR = y$，$QR = f - x$.由角 $TGR = GCH = \theta$，得

$$GT = \frac{y}{\cos\theta},\ TR = \frac{y\sin\theta}{\cos\theta},$$

从而

$$QT = f - x + \frac{y\sin\theta}{\cos\theta}.$$

由三角形 CDG、QMT 相似得

$$CG : DG = QT : MT \quad CG : (CG - QT) = DG : DS.$$

引 MS 平行 GT，则

$$DS=\frac{(x\cos\theta-y\sin\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}}{\cos\theta\cos\varphi}.$$

令 $DS=t$，$MS=u$，得

$$x\cos\theta-x\sin\theta=\frac{t\cos\theta\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}},\ y=u\cos\theta.$$

由此即可导出 t，u 间方程，但仍嫌复杂.

§ 67

参见图 133a[①]，换底面主轴为平行于交线 TH 的直径 EF 和与它共轭的直径 AB，AB 的延长线交 TH 于 G，其余跟前节一样，即

$$CG=f,\ GCH=\theta,\ CHD=\varphi,$$
$$CA=CB=m,\ CE=CF=n.$$

引 QP 平行于直径 EF，令

$$CP=x,\ PQ=y,$$

则 $m^2n^2=m^2y^2+n^2x^2$，我们有

$$GT=MS=y,\ DS=x\frac{DG}{CG}=\frac{x\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}.$$

令 $DS=t$，$MS=u$，得

$$x=\frac{t\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}},\ y=u,$$

令角 $CGD=\eta$，则由 $\cos\eta=\frac{CG}{DG}$ 得 $x=t\cos\eta$，从而对所求截线得

$$m^2n^2=m^2u^2+n^2t^2\cos^2\eta,$$

这是椭圆关于共轭直径的方程，中心在 D，DS 方向上的半直径 $=\frac{m}{\cos\eta}$，另一个半直径 $=n$. 两直径夹角 GSM 的正切和余弦分别为

---

① 此图为俄译本所加.

图 133a

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\varphi}\text{和}\frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}}=\sin\theta\cos\eta.$$

这样截线的性质就很清楚了.

§ 68

前面考察了柱面截线,现在我们转向锥面,直的和斜的.直锥面斜锥面的区别只在垂直于轴的截线,前者为圆后者为椭圆.参见面 134,锥面 $OaebfO$,顶点在 O,轴为 Oc,想象 O 在桌面上,Oc 垂直于桌面,AB,EF 为桌面上过点 O 分别平行 ab 和 ef 的直线,ab,ef 为垂直于锥面轴的平面与锥面的交线的轴.M 为交线 $aebf$ 上任

意一点. MQ 垂直于桌面, PQ 垂直于 AB. 令 $OP = x, PQ = y, QM = z$, 则交线的横标 $cp = x$, 纵标 $pM = y$. 轴 ab, ef 与 $Oc = QM = z$ 的比都为常数, 令 $ac = bc = mz, ce = fc = nz$, 我们有

图 134

$$m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2,$$

这是锥面的三元方程.

§ 69

置方程 $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$ 中的 z 为常数, 即可清楚地看出, 垂直于轴 Oc 的平面与锥面的交线都为椭圆. 类似地, 锥面与垂直于 AB 或 EF 的平面的交线, 也易于确定. 设平面垂直于 AB, 过点 P. 令 $OP = a$, 得截线的以 $Pp = z, pM = y$ 为变量的方程 $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2a^2$. 显然, 这是双曲线方程, 中心为 P, 横半轴 $= \frac{a}{m}$, 与它共轭的半轴 $= \frac{na}{m}$. 同样地, 如果令 y 为常数, 得垂直于 EF 的平面与锥面的交线为双曲线, 中心在直线 EF 上.

§ 70

参见图 135，截平面垂直于平面 $AEBF$，但既不垂直于 AB，也不垂直于 EF. 我们来求这时的截线方程，也不难. 设截平面与底平面 $AEBF$ 的交线为 BE，令 $OB=a$，$OE=b$. 又设 M 为截线上任一点，MQ 垂直于底平面，PQ 为纵标. 这样我们有 $OP=x$，$PQ=y$，$QM=z$. 从圆锥性质得

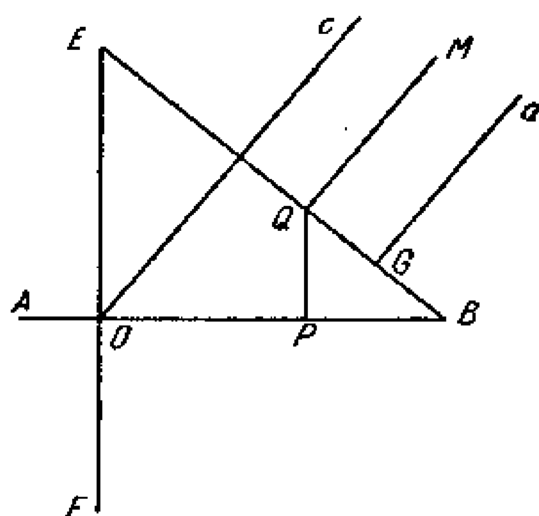


图 135

$$m^2n^2z^2=m^2y^2+n^2x^2.$$

这样我们有

$$a:b=(a-x):y$$

或 $y=b-\dfrac{bx}{a}$.

在截平面上取坐标 $BQ=t$, $QM=z$,则

$$b:\sqrt{a^2+b^2}=y:t,$$

从面

$$y=\frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}},a-x=\frac{at}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

令$\sqrt{a^2+b^2}=c$,则

$$y=\frac{bt}{c},x=a-\frac{at}{c},$$

代人锥面方程,得 t, z 间方程

$$m^2n^2c^2z^2=m^2b^2t^2+n^2a^2c^2-2n^2a^2ct+n^2a^2t^2.$$

令 $t-\dfrac{n^2a^2c}{m^2b^2+n^2a^2}=GQ=u$,又 $BG=\dfrac{n^2a^2c}{m^2b^2+n^2a^2}$,则

$$m^2n^2c^2z^2=(m^2b^2+n^2a^2)u^2+\frac{m^2n^2a^2b^2c^2}{m^2b^2+n^2a^2}.$$

§ 71

所得截线是双曲线，中心在点 G，横半轴

$$Ga=\frac{ab}{\sqrt{m^2b^2+n^2a^2}},$$

其共轭半轴 $=\frac{mnabc}{m^2b^2+n^2a^2}$. 该双曲线的渐近线交轴 Ga 于中心 G，与 Ga 所成角的正切 $=\frac{mnc}{\sqrt{m^2b^2+n^2a^2}}$. 要求该双曲线为等轴的，则应

$$m^2n^2a^2+m^2n^2b^2=m^2b^2+n^2a^2,$$

或

$$\frac{b}{a}=\mathrm{tg}OBE=\frac{n\sqrt{m^2-1}}{m\sqrt{1-n^2}}.$$

即要求双曲线为等轴的，则必 $\frac{m^2-1}{1-n^2}$ 为正. 直圆锥时 $m=n$，渐近线与截线轴所成角为 aOc，其正切 $=n$.

§ 72

参见图 136，现在考察截平面不垂直于底，但与底平面 $AEBF$ 的交线 BT 垂直于 AB 的情形. 置 $OB=f$，截平面与底平面的夹角 $OBC=\varphi$，记截平面与锥面的轴 OC 的交点为 C，则

$$BC=\frac{f}{\cos\varphi},\ OC=\frac{f\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

M 为所求截线上任一点，MT 垂直于 BT，MQ 垂直于底平面，

图 136

QP 垂直于 OB. 置 $OP=x$, $PQ=y$, $QM=z$, 得 $m^2n^2z^2=m^2y^2+n^2x^2$. 取截线的坐标为 $BT=t$, $TM=u$, 则由

角 $QTM=\varphi$, $QM=z=u\sin\varphi$, $TQ=u\cos\varphi=f-x$,

得

$y=t$, $z=u\sin\varphi$, $x=f-u\cos\varphi$,

从而

$$m^2n^2u^2\sin^2\varphi=m^2t^2+n^2(f-u\cos\varphi)^2.$$

§ 73

令 $BC=\dfrac{f}{\cos\varphi}=g$,则 $f=g\cos\varphi$,从而

$$x=(g-u)\cos\varphi,$$

进而得截线的方程为

$$m^2n^2u^2\sin^2\varphi=m^2t^2+n^2g^2\cos^2\varphi-2n^2gu\cos^2\varphi+n^2u^2\cos^2\varphi.$$

引 MS 平行于 BT,取

$$BG=\frac{f}{\cos^2\varphi-m^2\sin^2\varphi}=\frac{g\cos\varphi}{\cos^2\varphi-m^2\sin^2\varphi}=\frac{g\cos\varphi}{1-(1+m^2)\sin^2\varphi},$$

得

$$u-\frac{g\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi-m^2\sin^2\varphi}=SG=s,$$

取 $GS=s$, $SM=t$ 为坐标,得方程

$$m^2t^2+n^2(\cos^2\varphi-m^2\sin^2\varphi)s^2-\frac{m^2n^2f^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi-m^2\sin^2\varphi}=0.$$

因而曲线是以 G 为中心的圆锥曲线，中心 G 趋向无穷远时它为抛物线，G 趋向无穷远是在 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{m}$，即直线 BC 平行于锥而上直线 Oa 时(参见图 134). 此时

$$m^2t^2+n^2f^2-2n^2fu\cos\varphi=0.$$

图 136 上取 $BG=\frac{f}{2\cos\varphi}$ 时，抛物线的顶点为 G，它的参数 $=\frac{2n^2f\cos\varphi}{m^2}$.

§ 74

由 $\cos^2\varphi-m^2\sin^2\varphi=0$ 时截线为抛物线，显见，$\cos^2\varphi>m^2\sin\varphi$，也即 $\operatorname{tg}\varphi<\frac{1}{m}$ 时，截线为椭圆. 此时直线 BC 在上方与对面锥而上的 Oa 相交. 由

$$BG=\frac{g}{1-m^2\operatorname{tg}^2\varphi},$$

我们有 $BG>BC$，G 是截线的中心. 从面截线 BC 方向上的半轴

$$=\frac{mf\sin\varphi}{\cos^2\varphi-m^2\sin^2\varphi},$$

与它共轭的另一根半轴

$$=\frac{nf\sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi-m^2\sin^2\varphi}},$$

参数

$$=\frac{n^2}{m}f\sin\varphi.$$

进而，如果

$$m=n\sqrt{\cos^2\varphi-m^2\sin^2\varphi},$$

也即 $m^2 = n^2 - n^2(1 + m^2)\sin^2\varphi$，

则截线是圆.可见,必 $n > m$,这类截线才可能为圆.

§ 75

如果 $m^2\sin^2\varphi > \cos^2\varphi$, 也即 $\mathrm{tg}\varphi > \frac{1}{m}$,则直线 BC 在上方与对面锥面上的 Oa 不相交.此时截线为双曲线,其横半轴

$$= \frac{mf\sin\varphi}{-\cos^2\varphi + m^2\sin^2\varphi},$$

与它共轭的半轴

$$= \frac{nf\sin\varphi}{\sqrt{m^2\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}},$$

参数

$$= \frac{n^2}{m}f\sin\varphi,$$

渐近线与轴在中心 G 处之交角的正切

$$= \frac{n}{m}\sqrt{m^2\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}.$$

因而,当

$$m^2n^2\sin^2\varphi - n^2\cos^2\varphi = m^2 = (m^2+1)n^2\sin^2\varphi - n^2 = m^2,$$

也即当

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{n\sqrt{1+m^2}}, \cos\varphi = \frac{m\sqrt{n^2-1}}{n\sqrt{1+m^2}}$$

的时候,该双曲线为等腰的.可见, $n > 1$ 时这类截线才可能为等腰双曲线.

§ 76

直线 AB 的位置任我们选取,因面直锥而,也即 $m = n$ 时的锥

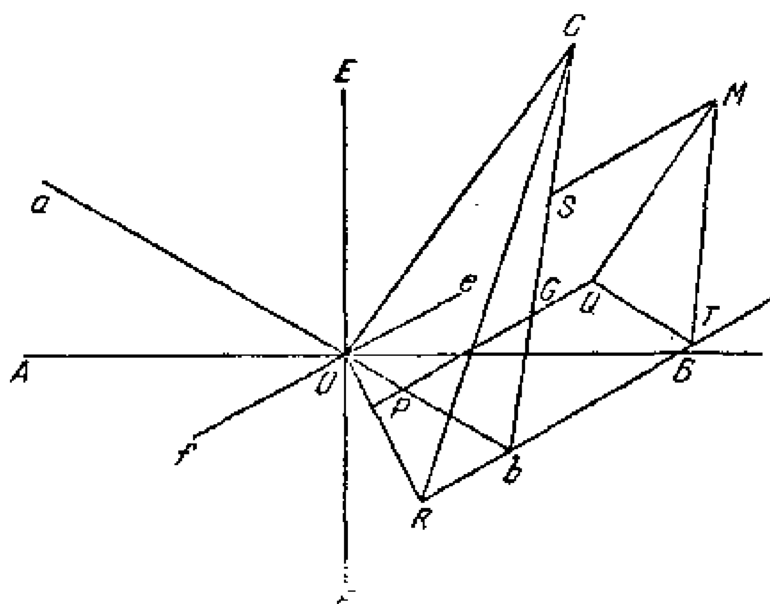


图 137

面，其截线我们都会求．这样，要讨论的，就剩下斜锥面，斜截面，截底两平面交线与 AB 成斜角的情况了．参见图 137，截底两平面交线为 BR，记 OB 为 f，角 OBR 为 θ，截底两平面所成角为 φ．从 O 引 OR 垂直于 BR，则 $OR = f\sin\theta$，$BR = f\cos\theta$．在截平面上连直线 RC，则由角 $ORC = \varphi$，我们有

$$RC = \frac{f\sin\theta}{\cos\varphi}, OC = \frac{f\sin\theta\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

将垂直于锥面轴 OC 的截线投影到底面上，则投影主轴方向同于 AB，EF，且投影主轴的比等于 m 比 n．

§ 77

在截线投影上画平行于 BR 的直径 ef，则角 $BOe = \theta$．设 aOb 为 ef 的共轭直径，令半直径 $Oa = \mu$，$Oe = \nu$，则

$$\mu = \frac{\sqrt{m^4\sin^2\theta + n^4\cos^2\theta}}{\sqrt{m^2\sin^2\theta + n^2\cos^2\theta}},$$

$$\nu = \frac{mn}{\sqrt{m^2\sin^2\theta + n^2\cos^2\theta}},$$

$$\operatorname{tg}BOb=\frac{n^2\cos\theta}{m^2\sin\theta},$$

因此角 BOb 的正弦和余弦分别为

$$\frac{n^2\cos\theta}{\sqrt{m^4\sin^2\theta+n^4\cos^2\theta}},\frac{m^2\sin\theta}{\sqrt{m^4\sin^2\theta+n^4\cos^2\theta}}.$$

由角 $ObR=\theta+BOb$,得

$$\sin ObR=\frac{m^2\sin^2\theta+n^2\cos^2\theta}{\sqrt{m^4\sin^2\theta+n^4\cos^2\theta}},$$

$$\cos ObR=\frac{(m^2-n^2)\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{m^4\sin^2\theta+n^4\cos^2\theta}}.$$

但我们有

$$\mu\nu=\frac{mn\sqrt{m^4\sin^2\theta+n^4\cos^2\theta}}{m^2\sin^2\theta+n^2\cos^2\theta}.$$

§ 78

由于 $OR=f\sin\theta$,得

$$Ob=\frac{OR}{\sin ObR}=\frac{f\sin\theta\sqrt{m^4\sin^2\theta+n^4\cos^2\theta}}{m^2\sin^2\theta+n^2\cos^2\theta},$$

$$Rb=\frac{(m^2-n^2)f\sin\theta\cos\theta}{m^2\sin^2\theta+n^2\cos^2\theta}.$$

从而由角 R 为直角的三角形 RbC,得角 CbR 的正切

$$=\frac{m^2\sin^2\theta+n^2\cos^2\theta}{(m^2-n^2)\cos\theta\cos\varphi},$$

这样,角 CbR 为已知. M 为截线上任一点,MT 平行于 Cb,交 RT 于 T;MS 平行于 RT,交 Cb 于 S. 记 $bT=MS=t$, $bS=TM=u$,视 t,u 为所求截线的斜角坐标,且角 $bSM[=CbR]$的正切

$$=\frac{m^2\sin^2\theta+n^2\cos^2\theta}{(m^2-n^2)\cos\theta\cos\varphi}.$$

显然,直锥面时,这坐标成为直角坐标,因为那时 $m=n$.

§ 79

M 为截线上一点，MQ 垂直于底平面 $AEBF$，TQ，QP 分别平行于直径 ab，ef. 令 $OP=x$，$PQ=y$，$QM=z$，则由锥面性质我们有

$$\mu^2\nu^2z^2=\mu^2y^2+\upsilon^2x^2.$$

过点 M 截取平行于底面的截线，则其平行于 ab 和 ef 的半直径为 μz 和 υz. 直角三角形 COb 的直角边 OC，Ob 已知，因面其斜边

$$Cb=\frac{f\sin\theta\sqrt{m^4\sin^2\theta+n^4\cos^2\theta-(m^2-n^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi}}{(m^2\sin^2\theta+n^2\cos^2\theta)\cos\varphi},$$

由三角形 TQM，bCO 相似，得

$$TM(=u):TQ(=Ob-x):QM(=z)=bC:Ob:OC,$$

从而 $x=Ob-\frac{Obu}{Cb}$，$z=\frac{OCu}{Cb}$，$y=t$，进面

$$\mu^2\upsilon^2OC^2u^2=\mu^2Cb^2t^2+\upsilon^2Ob^2(Cb-u)^2.$$

§ 80

上节方程展开得

$$O=\mu^2Cb^2t^2+\upsilon^2(Ob^2-\mu^2OC^2)u^2-2\upsilon^2Ob^2Cbu+\upsilon^2Ob^2Cb^2,$$

令 $u-\frac{Ob^2\cdot Cb}{Ob^2-\mu^2OC^2}=s$，或者取

$$bG=\frac{Ob^2\cdot Cb}{Ob^2-\mu^2OC^2}=\frac{Cb}{1-(m^2\sin^2\theta+n^2\cos^2\theta)\operatorname{tg}^2\varphi},$$

并记 GS 为 s，则 G 是锥面截线的中心，该截线的坐标 t，s 间方程为

$$\mu^2\cdot Cb^2\cdot t^2+\upsilon^2(Ob^2-\mu^2OC^2)s^2=\frac{\mu^2\cdot\upsilon^2\cdot Ob^2\cdot OC^2\cdot Cb^2}{Ob^2-\mu^2\cdot OC^2};$$

其横半径，共轭半径和参数依次为

$$\frac{\mu \cdot Ob \cdot OC \cdot Cb}{Ob^2 - \mu^2 \cdot OC^2},$$

$$\frac{\upsilon \cdot Ob \cdot OC}{\sqrt{Ob^2 - \mu^2 OC^2}},$$

$$\frac{\upsilon^2 \cdot Ob \cdot OC}{\mu \cdot Cb}.$$

显然 $\mathrm{tg}\varphi < \dfrac{1}{\sqrt{m^2\sin^2\theta + n^2\cos^2\theta}}$，也即 $\mathrm{tg}\varphi < \dfrac{\upsilon}{mn}$ 时，曲线是椭圆；$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\upsilon}{mn}$ 时，曲线是抛物线；$\mathrm{tg}\varphi > \dfrac{\upsilon}{mn}$ 时，曲线是双曲线.

§ 81

现在考察第三种曲面，球面的截线. 初等几何中我们知道，平面截球面，截线都是圆. 从曲面的方程求曲面的截线，这个问题，通常用综合方法处理，为更清楚起见，我们用分析方法对它进行讨论.

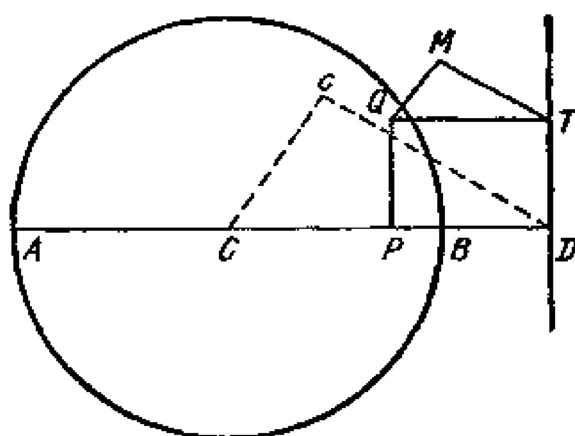


图 138

参见图 138，设 C 为球面中心，想象过 C 的平面为桌面，它截球面所成截线为图上大圆，其半径 $AC = CB = a$，a 是球面半径，再设 DT 为截平面与桌面平面的交线，截平面对桌面平面的倾角为

φ，CD 垂直于 DT，记 $CD=f$.

§ 82

设 M 为所求截线上任一点，MQ 垂直于桌面平面，QP 垂直于我们取为轴的 CD，记 $CP=x$，$PQ=y$，$QM=z$，则由球面性质得 $x^2+y^2+z^2=a^2$. 从 M 引 MT 垂直于 DT，连接 Q 与 T，则由 QT，MT 都垂直于 DT，知角 MTQ 等于截平面对底平面的倾角，等于 φ. 因面视 DT，MT 为所求截线的坐标，记 $DT=t$，$TM=u$，则

$$MQ=u\sin\varphi,\ TQ=u\cos\varphi.$$

从面

$$CP=x=f-u\cos\varphi,\ PQ=y=t,\ QM=z=u\sin\varphi.$$

代人球面方程，得球面的截线方程

$$f^2-2fu\cos\varphi+u^2+t^2=a^2.$$

§ 83

显然，这是圆的方程. 事实上，令 $u-f\cos\varphi=s$，得

$$f^2\sin^2\varphi+s^2+t^2=a^2,$$

这圆的半径 $=\sqrt{a^2-f^2\sin^2\varphi}$. 因此，如果引 Dc 平行于纵标 TM，Cc 垂直于 Dc，则由 $CD=f$ 和角 $CDc=\varphi$，得 $Dc=f\cos\varphi$，$Cc=f\sin\varphi$. 因面考虑坐标 s，t，我们看到，截线圆的圆心为 c，半径为 $\sqrt{CB^2-Cc^2}$，同初等几何告诉我们的一致. 用类似的方法我们可以考察任何平面截任何曲面所得截线，前提是有了曲面的三元方程.

§ 84

为了使整个过程更清楚起见，我们假定给了一个曲面（图139），其性质由坐标 $AP=x,PQ=y,QM=z$ 间的方程表示，前两个坐标在桌面上，第三个坐标 z 垂直于桌面. 用任一个平面来截这曲面. 设所用平面与桌面的交线为 DT，对桌面的倾角为 φ，记 AD 的长为 f，记角 ADE 为 θ，那么由 A 点向 DE 引垂线 AE，则

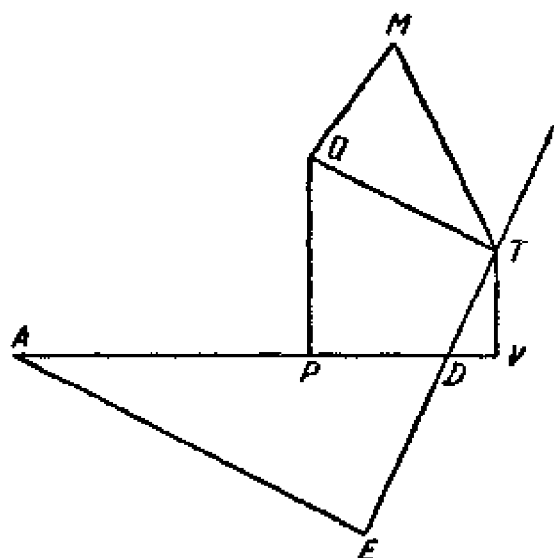


图 139

$$AE=f\sin\theta,DE=f\cos\theta.$$

然后从所求曲线上的点 M 向 DT 引垂线 MT，连 Q 与 T，则角 MTQ 等于截平面对桌面的倾角 φ. 因而如果取 DT,TM 作为所求截线的坐标，记为 $DT=t,TM=u$，我们有

$$QM=u\sin\varphi,TQ=u\cos\varphi.$$

§ 85

从 T 向轴 AD 引垂线 TV，则由角 $TDV=\theta$，得 $TV=t\sin\theta,DV=t\cos\theta$. 又由角 $TQP=\theta$，得

$$PV=u\sin\theta\cos\varphi,PQ-TV=u\cos\theta\cos\varphi.$$

利用这几个表达式，我们可以把 x,y,z 都用 t,u 表示出来：

$$AP=x=f+t\cos\theta-u\sin\theta\cos\varphi,$$

$$PQ=y=t\sin\theta+u\cos\theta\cos\varphi,$$

$$QM = z = u\sin\varphi.$$

将这三个表达式代入以 x, y, z 为变元的曲线方程，得 t, u 间，也即所求截线的坐标间方程．所求截线的性质就由该方程描述．这里的方法跟 § 50 的方法几乎完全一样．

第四章

坐标变换

§ 86

原点位置和轴的位置，两者都改变，或者其中之一改变，平面曲线的方程都随着改变，即一条平面曲线，其方程的个数是无穷的.类似地，一张曲面，其方程的个数更多，比一条平面曲线方程的个数，要多出几层无穷.事实上，一张平面上两坐标的取法就有无穷多种，另一张平面上又有新的无穷多种.例如，任给一个三变量直角坐标曲面方程，我们都可以把它变换成描述同一曲面的另一个三变量直角坐标方程.这种变换的种数，是二变量曲线情况下的几层无穷.

§ 87

我们先只改变原点在 x 轴上的位置.即坐标 y, z 不变，只新旧横标相差一个常数.记新横标为 t，则 $x = t \pm a$.代这个 x 入曲面方程，得到以 t, y, z 为变元的另一个方程.这另一个方程与原

方程,形式不同,但描述的曲面是同一个.让另外两个坐标也增加或减少一个常数,即取 $x = t \pm a, y = u \pm b, z = v \pm c$,我们就得到描述同一曲面的,以 t, u, v 为变量的方程.这里新坐标都平行于旧坐标,新方程比旧方程更一般,但差别不很大.

§ 88

参见图 140,曲面方程的三个直角坐标构成三张相垂直的平面.现在我们保持坐标 x,y 所在平面不动,只在这张平面上把轴 AP 换成另外一条任取的直线 CT.AP 为轴时坐标为 $AP = x$,$PQ = y$,$QM = z$;换 AP 为 CT 时,新坐标 $QM = z$ 依旧,但另外两个变成了 $CT = t$,$TQ = u$,这里的 QT 垂直于新轴 CT.为求出以新坐标 t,u,z 为变量的方程,从 C 引 CR 平行于 AP,引 CB 垂直于 AP.令 $AB = a$,$BC = b$,角 $RCT = \zeta$.从 T 引 TR 垂直于 CR,引 TS 垂直于 QP 的延长线.

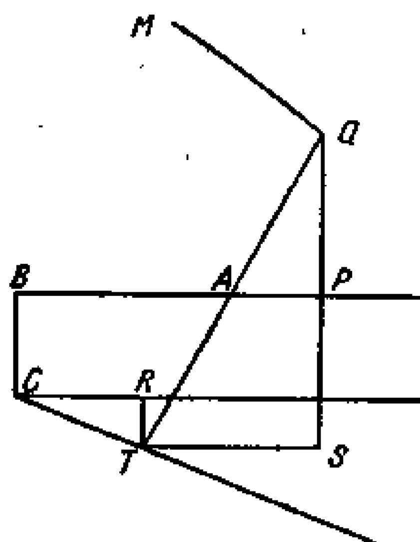


图 140

§ 89

这样,在三角形 TCR 中我们有 $TR = t\sin\zeta, CR = t\cos\zeta$,在三角形 QTS 中角 $Q = \zeta, TS = u\sin\zeta, QS = u\cos\zeta$.从而

$$AP = x = CR + TS - AB = t\cos\zeta + u\sin\zeta - a,$$

$$QP = QS - TR - BC = y = u\cos\zeta - t\sin\zeta - b.$$

将所给曲面方程中的 x 和 y 换成这两个表达式,我们就得到所给曲面的以新坐标 t,u,z 为变量的方程.新方程远比旧方程更具一般性,因为它包含旧方程所不包含的三个任意常数 a,b,ζ,新方程是 x,y 所在平面不动情况下的通用方程.

§ 90

现在我们让前两个坐标 x, y 所在平面变动. 先让它绕轴 AP 转动, 方式是: 保持 APQ 上的 AP 为旧新平面的交线, 并保持 AP 为新坐标的轴. 参见图 141, 记新平面 APT 对旧平面 APQ 的倾角 QPT 为 η, 从点 M 向新平面引垂线 MT, 这 MT 是新的第三坐标. 表示这三个新坐标为 $AP=x$, $PT=u$, $TM=v$. 引 TR 垂直于 PQ, TS 垂直于 QM, 则

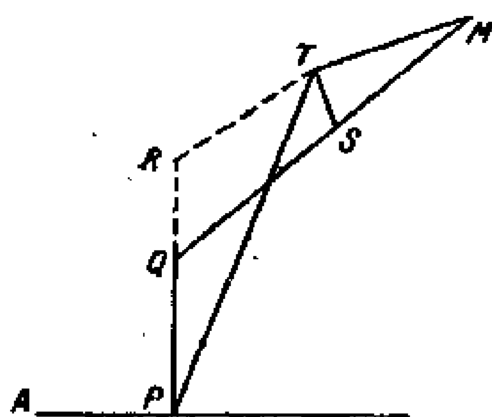


图 141

$$TR=u\sin\eta, PR=u\cos\eta,$$

$$TS=v\sin\eta, MS=v\cos\eta.$$

从而

$$PQ=y=u\cos\eta-v\sin\eta, QM=z=v\cos\eta+u\sin\eta.$$

代入给定的方程,得到以 x,u,v 为变量的方程,描述的曲面同于给定的方程.

§ 91

参见图 140,设新平面与 APQ 的交线任意,为 CT,倾角为 η. 取 CT 作新平面上的轴.第一步先求出平面 APQ 上以 CT 为轴的

坐标间方程.令 $AB=a, BC=b$,角 $TCR=\zeta$,并记以 CT 为轴的坐标为 $CT=p, TQ=q, QM=r$,则根据前面的结果,我们有

$$x=p\cos\zeta+q\sin\zeta-a, y=q\cos\zeta-p\sin\zeta-b, z=r.$$

第二步,利用上节结果,取新坐标为 t, u, v,则

$$p=t, q=u\cos\eta-v\sin\eta, r=v\cos\eta+u\sin\eta.$$

代入第一步求出的 x, y, z 的表达式,得

$$x=t\cos\zeta+u\sin\zeta\cos\eta-v\sin\zeta\sin\eta-a,$$
$$y=t\sin\zeta+u\cos\zeta\cos\eta-v\cos\zeta\sin\eta-b,$$
$$z=u\sin\eta+v\cos\eta.$$

§ 92

现在进一步,在坐标 t, u 所在的新平面上,我们任取一条新的直线作轴,这样我们就得到所给曲面的最通用方程.参见图140,依次取 AP, PQ, QM 为坐标 t, u, v, AP 是新平面与 x, y 所在平面的交线.取 CT 作新轴,对它建立最通用方程.记 $CT=p, TQ=q, QM=r$.此外, AB, BC 是定长线段,角 $CTR=\theta$.这样根据 § 89 我们有

$$t=p\cos\theta+q\sin\theta-AB,$$
$$u=-p\sin\theta+q\cos\theta-BC,$$
$$v=r.$$

代入前节导出的表达式,得

$$x=p(\cos\zeta\cos\theta-\sin\zeta\cos\eta\sin\theta)+$$
$$+q(\cos\zeta\sin\theta+\sin\zeta\cos\eta\cos\theta)-r\sin\zeta\sin\eta+f,$$
$$y=-p(\sin\zeta\cos\theta+\cos\zeta\cos\eta\sin\theta)-$$
$$-q(\sin\zeta\sin\theta-\cos\zeta\cos\eta\cos\theta)-r\cos\zeta\sin\eta+g,$$
$$z=-p\sin\eta\sin\theta+q\sin\eta\cos\theta+r\cos\eta+h.$$

其中 f, g, h 是从开始时引进的线段经过计算得到的数.

§ 93

可见,任何面的最通用方程都包含6个任意常数,不管这6个常数取什么值,方程描述的都是同一个面.一个面,即使它关于 x, y, z 的方程很简单,推出的关于 p, q, r 的最通用方程却很复杂,因为引进的任意常数个数太多.特别地,当 x, y, z 是高次的,那复杂程度当然就更高.因面最通用方程,用得上的情况未必会有.虽然适当选取常数可以得到简化方程,但是这计算太长太繁.那么最通用方程是不是全无用处呢?不是的,借助它我们可以得到和证明一些重要性质.

§ 94

最通用方程常常很复杂,但它的次数却恒等于 x, y, z 间方程的次数.例如球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的次数为2,它的以 p, q, r 为变量的最通用方程,次数绝对不会超过2.因而面方程的次数是面的一个实质性的特点,它不受坐标变换的影响.线有类似的性质,根据这条性质,我们将线按方程的阶进行了分类.仿照线,对面我们也按方程的阶进行分类.称方程为一阶的面为一阶面,方程为二阶的面为二阶面,类推.

§ 95

将上节所讲与前面讲的面的平面截线的有关内容相比较,我们得出结论,截线的阶等于产生它的曲面的阶.事实上,假定曲面的以 x, y, z 为变量的方程次数为 n,又假定一条截线的直角坐标为 t 和 u. § 85 我们看到,以 t 和 u 为变量的截线方程,是代

$$x = f + t\cos\theta - u\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = t\sin\theta + u\cos\theta\cos\varphi,$$
$$z = u\sin\varphi.$$

入曲面方程的结果.显然,结果方程的阶不能高于原方程的阶,它们的阶相等.

§ 96

平面截一阶面,截线是一阶的,是直线.平面截二阶面,截线是二阶的,是圆锥曲线.圆锥面是二阶面,其方程的形状为

$$z^2 = \alpha x^2 + \beta y^2.$$

类似地,平面截三阶面,截线是三阶的.类推.但是有这样的情形,截线方程可分解因式.此时截线由两个或更多个低阶线组成.例如,过圆锥顶点的截线是两条直线,但作为总体看,它们是二阶线.

§ 97

这样我们就按阶把面分了类.我们先考察一阶面,其方程为

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = a.$$

由一阶面的平面截线都是直线,知一阶面不能不是平面.否则,有凸或有凹,截线中就必定有曲线.虽然有的非一阶面的平面截线中有直线,但这种非一阶面的截线中必定还有曲线.这使我们想到,跟直线的交恒不多于一个点的线必为直线.在这里是跟平面的交恒为直线的面必为平面.

§ 98

一阶面为平面,可从最通用方程得到清楚的证明.事实上,从

方程 $\alpha x+\beta y+\gamma z=a$，照 § 92 步骤列出以 p,q,r 为坐标的最通用方程时，完全可以对 6 个新的任意常数进行选择，使得 p 和 q 的系数为零，也即使方程的形状为 $r=f$. 方程 $r=f$ 表明所求面平行于坐标 p,q 所在平面，也即所求面为平面. 可以使方程为 $r=0$，也即使坐标 p,q 所在平面为所给面.

§ 99

证明了方程 $\alpha x+\beta y+\gamma z=a$ 描述的是平面，下一步应做的是确定它关于坐标 x,y 所在平面的位置. 参见图 142，设 M 是所求面上任一点，三个坐标为 $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$. 先令 $z=0$，得方程 $\alpha x+\beta y=a$，这是所求面与平面 APQ 交线的方程. 在平面 APQ 上引 AP 的垂线 $AB=\frac{a}{\beta}$，截 $AC=\frac{a}{\alpha}$，则 BCR 即为所求面与 APQ 的交线. 从面角 ABC 的正切，正弦，余弦依次为

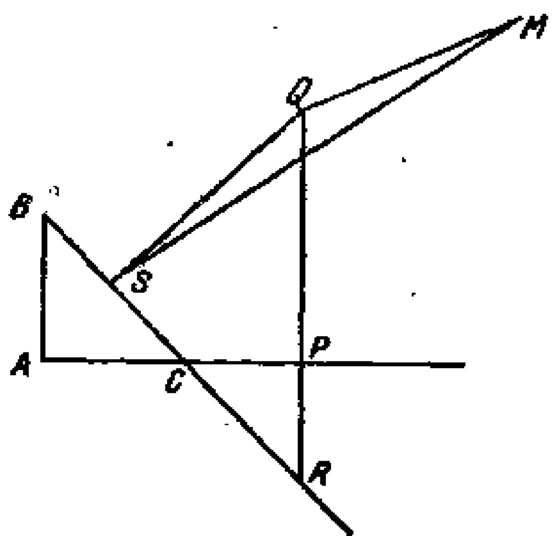


图 142

$$\frac{\alpha}{\beta},\quad \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

延长 QP 交 BC 于 R，则由 $CP=x-\frac{a}{\alpha}$，得

$$CR=\frac{x\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}-\frac{a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha\beta},\ PR=\frac{\alpha x}{\beta}-\frac{a}{\beta}.$$

§ 100

从 Q 向 BC 引垂线 QS，连直线 MS，则角 MSQ 为所求平面对平面 APQ 的倾角. 由 $PR=\frac{\alpha x-a}{\beta}$，得 $QR=\frac{\alpha x+\beta y-a}{\beta}=-\frac{\gamma z}{\beta}$；由角 $RQS=ACB$，得 $QS=-\frac{\gamma z}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. 从而角 QMS 的正切 $=\frac{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\gamma}$，余弦 $=\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$. 也即所求平面对 x,y 所在平面倾角的正切 $=-\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\gamma}$. 类似地，它对 x,z 所在平面倾角的正切 $=-\frac{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}{\beta}$，对 y,z 所在平面倾角的正切 $=-\frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\alpha}$.

第五章

二阶面

§ 101

我们按方程的次数将面分类，方程为几次的，就称面为几阶的．一个面，给出了它的代数方程，我们立刻就可说出它是几阶的．前面证明了一阶面都是平面．本章我们考察二阶面．二阶面比二阶线类型要多，我们尽力把各类型的二阶面讲清．随阶数的增加，面的类型数猛增，以至于无法对它们进行讨论．

§ 102

方程为二次的面是二阶面．我们讨论过的柱面、锥面，直的斜的，以及球面都是二阶面．二阶面的方程全包含在下面这个通用方程之中

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2+\eta z+\theta y+\iota x+\kappa=0.$$

不管三个坐标怎么取，方程的形状都是这样．不同型的二阶面由系数间的不同关系决定．不同二阶面的个数是无穷的，同一个二阶面

可以有无穷多个不同的方程.可见二阶面的可能的方程是何等的多.

§ 103

我们把平面曲线按是否伸向无穷分成了两类.我们也照方把同阶面分成两类,第一类是伸向无穷的,第二类是位于有限空间区域中的.柱面、锥面属第一类,球面属第二类.当然第二类面阶数必定不为奇数.奇阶面的平面截线是奇阶的,奇阶线一律伸向无穷,因而奇阶面必伸向无穷.

§ 104

一个曲面是伸向无穷的,则三个坐标 x,y,z 中必至少有一个是伸向无穷的.三坐标可互换,面伸向无穷时,我们假定 z 伸向无穷.为考察面的伸向无穷部分的性质,假定 $z=\infty$,这时首先应考虑第一项 αz^2,特别是方程含否这一项.如果方程含有这一项,那么跟它相比,项 ηz 和 κ 都可略去,得到面的伸向无穷部分方程的形状为

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2+\theta y+\iota x=0.$$

下一步是略去非无穷大项和与 αz^2 相比为无穷小的项.

§ 105

假定方程具有次数为 2 的可能的各项.事实上,任何一个曲面,其最通用方程都包含最高次各项,因面方程具有次数为 2 的可能的各项,这一假定不会减弱解的一般性.在这个假定之下,方程中有含 xz 和 yz 的项.跟它们比,项 θy 和 ιx 可略去.方程成为

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2=0,$$

由此得

$$z=\frac{-\beta y-\gamma x\pm\sqrt{(\beta^2-4\alpha\delta)y^2+(2\beta\gamma-4\alpha\varepsilon)xy+(\gamma^2-4\alpha\zeta)x^2}}{2\alpha}.$$

曲面的伸向无穷部分，其性质就由该方程描述.

§ 106

二阶面如果有伸向无穷的部分，则这伸向无穷的部必与下面这个方程所表示的面的无穷部分相合

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2=0,$$

这个面是通用方程所表示的面的渐近面. 该渐近面方程各项次数都是 2，表示的是以原点为顶点的锥面. 原点处三变量都为零、这样我们得到，二阶面如果伸向无穷，则必以锥面为渐近面. 换句话说，渐近锥面与伸向无穷的二阶面，它们的无穷部分重合，或距离为有限.

我们用渐近直线区分曲线的伸向无穷部分. 类似地，我们用渐近锥面区分曲面的伸向无穷部分.

§ 107

渐近锥面为实，则曲面伸向无穷，且两个无穷部分重合，渐近锥面为虚，则曲面不伸向无穷，也即位于有限空间区域之中. 这样对二阶面是否位于某个有限区域之中的判定，就成了对渐近面为实为虚的判定. 渐近面只在缩为一点时才为虚，否则，由过锥面顶点和锥面任何另外一点的直线都在锥面上，知锥面只要在顶点之外有一个点，就必有伸向无穷的部分.

§ 108

当方程为

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2=0$$

的渐近锥面缩为一点时，其过顶点的截线当然也缩为一点. 从面令 $z=0$ 时，则方程 $\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2=0$ 应该没有 $x=0,y=0$ 以外的解. 由此得 $4\delta\zeta>\varepsilon^2$. 同理，令 $x=0$，得 $4\alpha\delta>\beta^2$；令 $y=0$，得 $4\alpha\zeta>\gamma^2$. 这样我们得到结论：只要 $4\delta\zeta>\varepsilon^2$，$4\alpha\zeta>\gamma^2$，$4\alpha\delta>\beta^2$，这三个条件中有一个不满足，以

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2+\eta z+\theta y+\iota x+\kappa=0$$

为方程的二阶面就必定有伸向无穷的部分.

§ 109

但这三个条件，对二阶面有界并不充分. 要保证二阶面位于有界区域中，还要加上从渐近方程解出的 z 值为虚. z 值为虚的条件是：对 x,y 的非零值，表达式

$$(\beta^2-4\alpha\delta)y^2+2(\beta\gamma-2\alpha\varepsilon)xy+(\gamma^2-4\alpha\zeta)x^2$$

恒为负，由于 $\beta^2-4\alpha\delta$ 和 $\gamma^2-4\alpha\zeta$ 为负，该条件等价于

$$(\beta\gamma-2\alpha\varepsilon)^2<(\beta^2-4\alpha\delta)(\gamma^2-4\alpha\zeta),$$

也即

$$\alpha\varepsilon^2+\delta\gamma^2+\zeta\beta^2<\beta\gamma\varepsilon+4\alpha\delta\zeta,$$

这里假定 α 为正，因为我们用过它作除数. 由 $\alpha>0$，$4\alpha\zeta>\gamma^2$，$4\alpha\delta>\beta^2$ 和 $4\delta\zeta>\varepsilon^2$ 得 δ,ζ 为正.

§ 110

这样二阶面有界四条件为：其方程满足

$$4\alpha\zeta > \gamma^2, 4\alpha\delta > \beta^2, 4\delta\zeta > \varepsilon^2,$$

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 > \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta^2.$$

我们称有界二阶面为第一类二阶面.有界即不伸向无穷,而是位于某个有界空间区域之内.球面属第一类,它的方程为

$$z^2 + y^2 + x^2 = a^2,$$

这里 $\alpha = 1, \delta = 1, \zeta = 1, \beta = 0, \gamma = 0, \varepsilon = 0$,四条件都满足.更一般地,$\alpha, \delta, \zeta$ 为正时方程

$$\alpha z^2 + \delta y^2 + \zeta x^2 = a^2,$$

表示的曲面有界,只要系数中有一个或两个不为零.

§ 111

对给定的二阶方程,利用有界四条件,可直接判定它所表示的曲面有无伸向无穷的分支.事实上,四条件中只要有一条不满足,曲面就必定伸向无穷.对伸向无穷的曲面应再分类.满足

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 > \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$$

的为第一类无界面.前面讲了,此时曲面伸向无穷,以锥面为渐近面,是跟有界面完全相反的一个子类.

§ 112

还有一种中间子类,它也伸向无穷,但不与有界完全相反,而是在有界与完全相反之间,有如抛物线在椭圆和双曲线之间.方程满足

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta,$$

和

$$\alpha z = -\beta y - \gamma z + y\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\delta} + x\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\zeta}$$

时,曲线就属这种中间情形.此时渐近线方程

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2=0$$

有两个线性因式，或者同实，或者同虚，或者相等．这三种不同的因式给出伸向无穷的三种不同的子类．这样我们总共有了五个子类．下面对它们做更详细的考察．

§ 113

改变坐标与之平行的那三个轴的位置，可以化简通用方程．现在我们用这个方法来化简二阶面的通用方程．该方法不影响方程所含类型．二阶面的通用方程为

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2+\eta z+\theta y+\iota x+\kappa=0,$$

将坐标变成原点与原来相同的 p,q,r，由 § 92 知新旧坐标的关系式为

$$\begin{aligned}x&=p(\cos k\cos m-\sin k\sin m\cos n)+\\&\quad+q(\cos k\sin m+\sin k\cos m\cos n)-r\sin k\sin n,\\y&=-p(\sin k\cos m+\cos k\sin m\cos n)-\\&\quad-q(\sin k\sin m-\cos k\cos m\cos n)-r\cos k\sin n,\\z&=-p\sin m\sin n+q\cos m\sin n+r\cos n.\end{aligned}$$

代入原方程，记所得方程为

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2+Dpq+Epr+Fqr+Gp+Hq+Ir+K=0.$$

§ 114

我们选择任意角 K,m,n 使 D,E,F 为零．虽然进行这种选择的计算并不太繁，但可能有人会问，算得的角一定是实数吗？为消除这疑问，我们分两步使 D,E,F 为零．先使 D,E 为零，这是无疑的．再改变垂直于 P 的平面上平行于坐标 r 的那根轴的位置，使 F 为零．这一步也容易实现．事实上，置

$$q = t\sin i + u\cos i, r = t\cos i - u\sin i,$$

则含 qr 的项产生含 tu 的项. 容易选择角 i 使 tu,因而 qr 的系数为零. 这样二阶面的通用方程就成了

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

§ 115

接下去,我们用增大或减小坐标 p,q,r,也即用移动坐标原点的方法,使系数 G,H,I 为零(参见 § 123). 这样二阶面的通用方程进一步成了

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + K = 0.$$

从该方程我们看到,过原点的三个主平面都分二阶面为相似相等的两部分. 因而凡二阶面都有三个直径面,这三个直径面相交于一点,这个点是二阶面的中 心. 中心可以在无穷远处,这类似于我们把圆锥曲线视为有心曲线,其中双曲线的中心就在离顶点无穷远处.

§ 116

前面我们把包含所有二阶面的那个方程化成了简化形式

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = a^2,$$

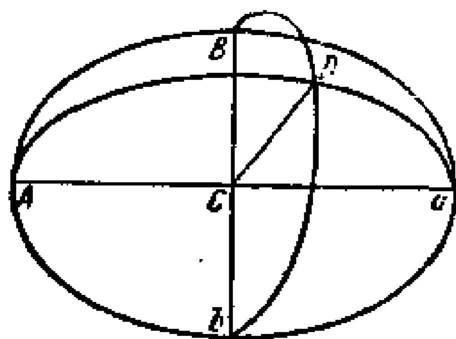


图 143

现在我们考察该方程三系数 A,B,C 都为正数的情形.

此时的二阶面不只有界,有中心,且三个直径面垂直相交于中心. 参见图 143,设 C 为中心,CA, CB, CD 为相垂直的轴,坐标 p,q,r 分别与这三个轴平行,则三个直径面为 $ABab$, ADa, BDb. 这三个面都分所给

面为相等的两部分.

§ 117

令 $r=0$,则方程成为 $Ap^2+Bq^2=a^2$,表示的是主截线 $ABab$. 该截线为椭圆,中心在 C,半轴

$$CA=Ca=\frac{a}{\sqrt{A}}, CB=Cb=\frac{a}{\sqrt{B}}.$$

令 $q=0$,得方程 $Ap^2+Cr^2=a^2$,表示的是主截线 ADa,是以 C 为中心的椭圆,半轴

$$CA=Ca=\frac{a}{\sqrt{A}}, CD=\frac{a}{\sqrt{C}}.$$

令 $p=0$,得第三个主截线方程 $Bq^2+Cr^2=a^2$,它是中心为 C,半轴为

$$CB=Cb=\frac{a}{\sqrt{B}}, CD=\frac{a}{\sqrt{C}}$$

的椭圆.知道了曲面的三个主截线,或者知道了半轴

$$CA=\frac{a}{\sqrt{A}}, CB=\frac{a}{\sqrt{B}}, CD=\frac{a}{\sqrt{C}},$$

就可以确定整个曲面.我们称这第一类二阶面为椭面,它的三个主截线都是椭圆.

§ 118

椭面分为三种.第一种,三个主半轴 CA, CB, CD 相等,此时主截线都为圆,曲面本身为球面,方程为

$$p^2+q^2+r^2=a^2.$$

第二种,两个主半轴相等,设 $CD=CB$,或者系数 $C=B$,则截线 BDb 为圆.由方程

$$Ap^2 + B(q^2 + r^2) = a^2$$

知,平行于 BDb 的平面截得的截线都为圆.称这时的椭面为伸缩球面.AC 大于 BC 时为伸长球面,AC 小于 BC 时为缩短球面.最后,第三种,系数 A, B, C 都不相等,这时的椭面就直接称为椭面.

§ 119

下一类二阶面,其方程

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = a^2$$

的系数 A, B, C 都不为零,但有一个或两个为负.设只有一个系数为负,即方程为

$$Ap^2 + Bq^2 - Cr^2 = a^2,$$

这里 A, B, C 都为正数.这类二阶面的中心和直径面同于系数都为正的情形.参见图 144,显然该曲面的主截线 $ABab$ 是椭圆,这椭圆的半轴为 $AC = \frac{a}{\sqrt{A}}$, $BC = \frac{a}{\sqrt{B}}$.另外两个主截线 Aq, BS 是中心为 C,共轭半轴 $= \frac{a}{\sqrt{C}}$ 的双曲线.

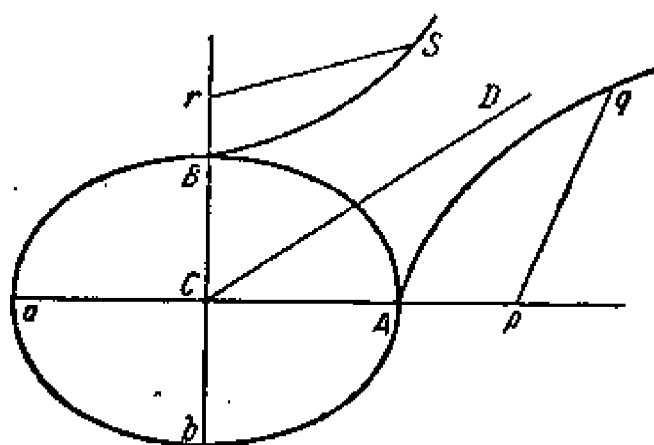


图 144

§ 120

这种面有似一个沿双曲线向上向下伸张的漏斗,这漏斗有渐近锥面,渐近锥面的方程为 $Ap^2 + Bq^2 - Cr^2 = 0$,顶点在中心 C,侧

面由双曲线的渐近线形成.这渐近锥面在曲面的内部,$A=B$ 时为正锥面,A 不等于 B 时为斜锥面.锥面的轴为垂直于平面 ABa 的直线 CD,垂直于 CD 的平面截得的截线都为相似于椭圆 $ABab$ 的椭圆,垂直于平面 $ABab$ 的平面截得的截线都为双曲线.称这种曲面为外切于其渐近锥面的椭圆双曲面.这是第二类二阶面.

§ 121

这第二类二阶面也可分为三种.$a=0$ 时为第一种.此时椭圆 $ABab$ 缩为一点,双曲线成为直线,二阶面跟它的渐近锥面重合.这时的二阶面包含所有的锥面,直的斜的都包含,这是第一种.$A=B$ 时为第二种,这时椭圆 $ABab$ 成圆,二阶面成旋转面,是双曲线绕共轭轴旋转面成.一般情况为第三种.

§ 122

第三类,我们把 p^2,q^2,r^2 的系数中有两个为负,也即方程为

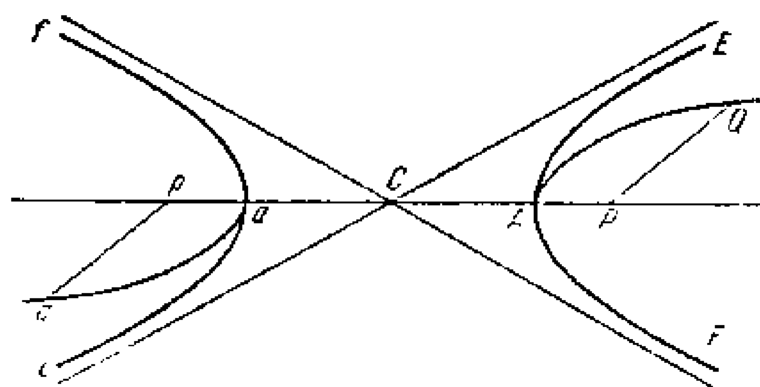


图 145

$$Ap^2-Bq^2-Cr^2=a^2.$$

时的二阶面作第三类. 参见图 145, 令 $r=0$, 得第一主截线

$EAFeaf$，是以 C 为中心的双曲线，横半轴等于$\frac{a}{\sqrt{A}}$，共轭半轴等于$\frac{a}{\sqrt{B}}$．令 $q=0$，得第二主截线 AQ，aq，也是双曲线，横半轴同于第一主截线，共轭半轴等于$\frac{a}{\sqrt{C}}$．第三主截线是虚的．最后，这类二阶面整个位于渐近锥面之内，因而称之为内切于渐近锥面的双曲双曲面．如果 $B=C$，则成旋转面，由双曲线绕横轴生成，这是特殊的一种．$a=0$ 得到前面讨论过的锥面．

§ 123

再一类是系数 A,B,C 中有一个为零．设 $C=0$，则 § 114 求得的通用方程为

$$Ap^2+Bq^2+Gp+Hq+Ir+K=0.$$

用增大或减小坐标 p,q 的方法可消去方程中的 Gp,Hq，但消不去 Ir．进一步利用 Ir 可消去常数项 K，方程成为

$$Ap^2+Bq^2=ar.$$

这里又分为 A,B 同为正数，和 A,B 一正一负两种情形．两种情形下曲面的中心都在轴 CD 上，在无穷远处．

§ 124

先讨论 A,B 同为正数的情形．此时方程为

$$Ap^2+Bq^2=ar.$$

这是第四类．参见图 146．令 $r=0$，得第一主截线缩为一点．令 $q=0$，$p=0$，得第二第三主截线 MAm，NAn 都是抛物线．对这第四类二阶面，垂直于轴 AD 的平面截得的线都是椭圆．过 AD 的平面截得的线都是抛物线．因面我们称这第四类为椭圆抛物

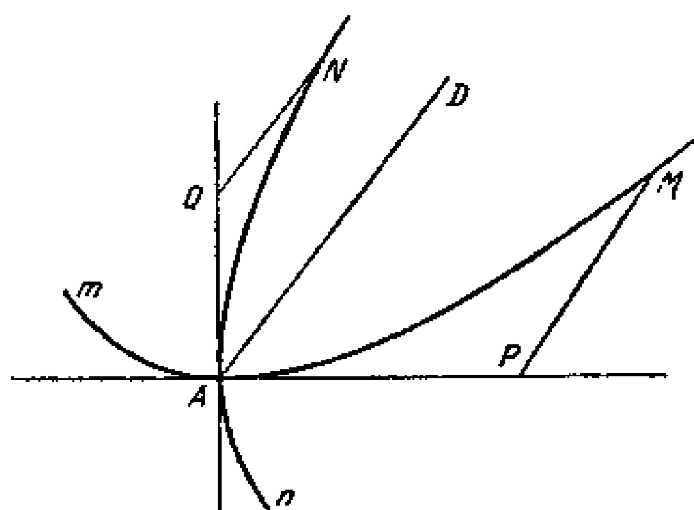


图 146

面. 应该指出, $A=B$ 时得到的是旋转面,叫抛物劈锥面; $a=0$ 时方程为

$$Ap^2+Bq^2=b^2,$$

是柱面,$A=B$ 时为正圆柱,A 不等于 B 时为斜圆柱.

§ 125

再讨论 A,B 一正一负的情形.此时方程为

$$Ap^2-Bq^2=ar.$$

这是第五类.参见图 147,令 $r=0$,得第一主截线为相交于 A 点的两条直线 Ee,Ff.我们称过 Ee,Ff 垂直于平面 ABC 的平面为平面 Ee 和平面 Ff.平行于 ABC 的平面截我们的曲面所得截线都是双曲线.这双曲线位于平面 Ee,Ff 之间,并以平面 Ee,Ff 与截平面的交线为渐近线,且中心在轴 AD 上.可见我们的曲面在无穷远处与平面 Ee,Ff 重合,也即我们的曲面有相交的两张渐近面.另外两张主平面 ACD,ABd 上的截线都为抛物线.因此称我们的曲面为有两张渐近面的抛物双曲面.$a=0$ 时,方程为 $Ap^2-Bq^2=b^2$,曲面为双曲柱面,垂直于轴 AD 的平面截得的截线是双曲线,都相等.此外,$b=0$ 时得到的是两张渐近平面.

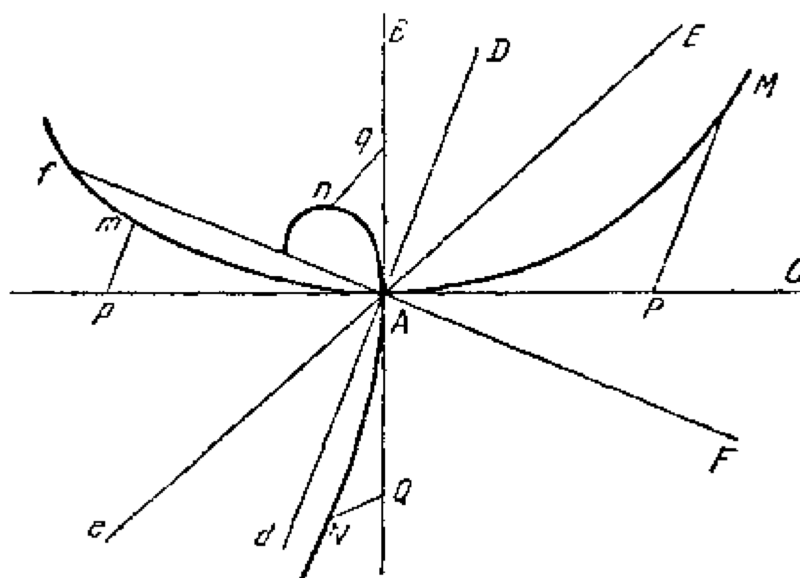


图 147

§ 126

最后,第六类二阶面是抛物柱面,方程为

$$Ap^2 = aq.$$

垂直于 AD 轴的截线是相似相等的抛物线,顶点都在 AD 上,轴都平行.

这样,二阶面就被分成了六类.二阶面全都包含在这六类之中.又,如果令第六类中的 $a=0$,则方程成为 $Ap^2=b^2$,给出相平行的两张平面,也是一种抛物面.这类似于二阶曲线,我们讲过,相交直线是一种双曲线,平行直线是一种抛物线.

§ 127

虽然这六类面是根据二阶面的简化方程划分的,但根据二阶面的任给方程,我们都可以容易地判定它属于哪一类.事实上,记

给定的方程为

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2+\eta z+\theta y+\iota x+\kappa=0,$$

根据它的二次部分

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2$$

即可做出判定.如果 $4\alpha\zeta>\gamma^2$,$4\alpha\delta>\beta^2$,$4\delta\zeta>\varepsilon^2$,且 $\alpha\varepsilon^2+\delta\gamma^2+\zeta\beta^2<\beta\gamma\varepsilon+4\alpha\delta\zeta$,则曲面有界,属于我们称之为椭面的第一类.

§ 128

如果上节前三个条件不都满足,且等式 $\alpha\varepsilon^2+\delta\gamma^2+\zeta\beta^2=\beta\gamma\varepsilon+4\alpha\delta\zeta$ 不成立,则二阶面属第二或第三类,是有渐近锥面的双曲面.属第二类时内切于锥面,属第三类时外切锥面.如果等式

$$\alpha\varepsilon^2+\delta\gamma^2+\zeta\beta^2=\beta\gamma\varepsilon+4\alpha\delta\zeta$$

成立,此时表达式

$$\alpha z^2+\beta yz+\gamma xz+\delta y^2+\varepsilon xy+\zeta x^2$$

可分解成或虚或实的两个因式.为虚时属第四类,为实时属第五类.如果表达式的两个因式相等,也即为完全平方,则属第六类.可见,根据任何一个方程都容易判断二阶面的类别.只有一个难点,在二、三类的区分,它们可能合而为一.

§ 129

可以类似地对三阶和更高阶面进行考察和分类.显然只需考察通用方程的最高次部分.对三阶面是考察次数为 3 的部分

$$\alpha z^3+\beta yz^2+\gamma y^2z+\delta x^2z+\varepsilon xz^2+\zeta xyz+\cdots$$

首先要判明这最高次部分可否分解成线性因式.倘不可,则三阶线有渐近三阶锥面.使最高次部分为零,成为方程,则渐近三阶锥面的性质由这方程表示.从方程可得到多种类型的渐近三阶锥

面，不同类型的锥面对应不同类型的三阶面．二阶锥面有正有斜，属于同一类型，三阶锥面不同，可分为很多类．

§ 130

上节讲了最高次部分不能分解成线性因式的情形．现在考虑可分解为线性因式的情形．因式可实可虚．最高次部分有一个实因式时，三阶面有一张渐近平面．置另外一个因式为零，则所得方程或者有解或者无解．没有非零解时，三阶面只有一张渐近平面；有非零解时，三阶面有两个渐近面，一个平面，一个二阶锥面．如果表达式有三个线性因式，则其中必有一个为实，由另外两个同虚或同实得新的两类三阶面．最后，三个线性因式都为实数时，其中两个相等和三个全相等又给出两类．三阶面都伸向无穷，都无界．

第六章

曲面与曲面的交线

§ 131

曲面与平面的交线，前面讲了其性质的考察方法.由于这种交线整个位于截平面上，因而可以用截平面上的两个坐标来表示它，并用我们掌握的平面曲线知识去分析它.曲面与曲面的交线，情况不同了，交线不在一张平面上，不能用两个坐标表示，须用另外的方法导出表示交线上任意点位置的方程.

§ 132

不在同一张平面上的点的位置，可用至三个相垂直平面的三个距离来表示.这样，描述不在同一张平面上的曲线，要用三个变量，并且要求任给其中一个，即可决定另外两个.一个三坐标方程描述一张面，但要借助一个三坐标方程，做到由三变量中的一个决定另外两个，就不够了.要做到这一点必须有两个三坐标方程.

§ 133

用直角三坐标的两个方程,来描述不在一张平面上的曲线,是方便的.我们记坐标为 x,y,z.从三坐标的两个方程就已做到由一个变量决定另外两个,例如,使 y,z 都是 x 的函数.从两个方程可以消去三个变量中的任何一个,从而得到三个二元方程.一个含 x,y,另一个含 x,z,再一个含 y,z.并且这三个方程中的任何一个都可以从另外两个推出.例如,从含 x,y 和含 x,z 的两个中消去 x,就得到含 y,z 的.

§ 134

设给定一条非平面曲线如图 148 所示,M 是它的任意一点.

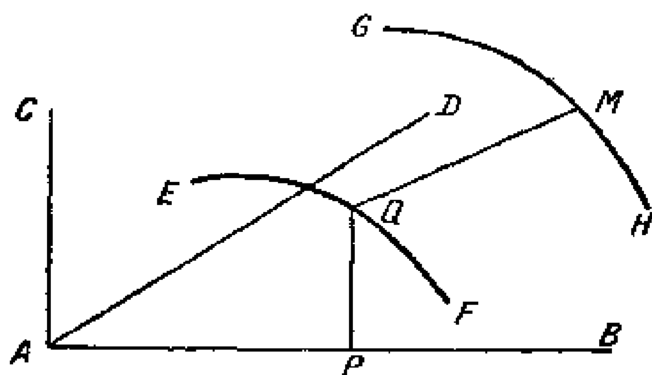


图 148

任取三个相垂直的轴 AB,AC,AD,它们决定三张相垂直的平面 BAC,BAD,CAD.从点 M 向平面 BAC 引垂线 MQ,从 Q 向轴 AB 引垂线 QP,则 AP,PQ,QM 就是确定曲线性质的两个方程的那三个坐标.令 $AP=x$,$PQ=y$,$QM=z$.从给定的两个三坐标方程消去 z,得到只含 x,y 的方程,平面 BAC 上点 Q 的位置就由这个方程决定.所给曲线上的每一点 M 都对应一个点 Q,这些点 Q 构成 BAC 上一条曲线 EQF,EQF 的性质就由所得 x,y 间方程表示.

§ 135

从曲线 GMH 上的每一点 M 向平面 BAC 引垂线 MQ，称这所有的点 Q 构成的曲线 EQF 为 GMH 在平面 BAC 上的射影. 从描述 GMH 的两个三坐标方程中消去 z，所得即射影 EQF 的方程. 类似地，消去 y，x，分别得到平面 BAD 和 CAD 上的投影的方程，但是仅只一条射影 EQF 决定不了曲线 GMH，还要加上从每一个 Q 点引的垂线 $QM=z$. 也即要决定曲线 GMH，在以 x，y 为变元的射影方程之外，还要加上以 z，x 为变元，或者以 z，y 为变元，或者以 z，x，y 为变元的方程，用来对每个 Q 点确定垂线 $QM=z$ 的长.

§ 136

GMH 在平面 BAD 和 CAD 上的投影方程，分别以 z，x 和以 z，y 为变元，而 GMH 所在曲面的方程以 z，y，x 为变元. 可见曲线 GMH 可由它在两个平面上的投影决定，也可以由它所在的一张曲面和它在一张平面上的投影决定. 后一情况下，从射影的每一点所引垂线 QM 与曲线 GMH 所在平面的交线，构成曲线 GMH 本身.

§ 137

有了关于非平面曲线的以上讨论，确定两个曲面的交这件事就不难了. 事实上，两张平面之交为直线，面两张曲面的交，可以是直线，可以是曲线. 这曲线可以是平面曲线，可以是非平面曲线. 不管是哪一种，这交线上的每一点都同属于两张曲面，同时满足两个方程. 如果这两个曲面方程参考的是同一套三垂直主平面，或者参考的是同一套三垂直轴 AB，AC，AD，那么我们就用这两个方程表

示交线.

§ 138

曲面用三坐标方程表示，给定两个相交曲面，就是给定坐标 x,y,z 的两个方程.这里要两个方程的坐标轴相同.从坐标 x,y,z 的两个方程消去一个坐标，得到一个两坐标方程，这个两坐标方程就是交线在剩下的这两个坐标所成平面上的投影.也可以用这个方法考察曲面与平面的交线.平面的通用方程为 $\alpha z+\beta y+\gamma x=f$，将解出的 $z=\frac{f-\beta y-\gamma x}{\alpha}$ 代入曲面方程，得到的就是交线在坐标 x,y 所成平面上的投影方程，并且 $z=\frac{f-\beta y-\gamma x}{\alpha}$ 给出射影点 Q 处垂线 QM 的值，M 为交线上的点.

§ 139

射影方程无实解，表示两张曲面不相交.例如射影方程为 $x^2+y^2+a^2=0$ 时，两张面就不相交.如果射影方程只给出一个点，也即整个射影为一个点，则交线为一个点，即两个面相切.这切点也可以从方程求出.两个面可以有无穷多个切点，这无穷多个切点可以构成一条线，这线可以是直线，可以是曲线.例如，平面与柱面或锥面相切，切点构成直线；正锥面外切于球面，切点构成一个圆.射影方程有两个相等因式时，切点所成的线可由方程求出，此时切点所成的线是两条交线的重合.

§ 140

为进一步说明，我们看看球面与平面相交的情形.取球面中心

为原点，球面方程为

$$z^2+y^2+x^2=a^2,$$

任何位置上的平面，其方程都为

$$\alpha z+\beta y+\gamma x=f.$$

代 $z=\frac{f-\beta y-\gamma x}{\alpha}$ 入球面方程，得到以 x,y 为变元的射影方程

$$0=f^2-\alpha^2a^2-2\beta fy-2\gamma fx+(\alpha^2+\beta^2)y^2+2\beta\gamma xy+(\alpha^2+\gamma^2)x^2.$$

显然，该方程有实解时，它描述的是椭圆；该方程的解为虚数时，球面与平面不相交；如果椭圆缩为一点，则球面与平面相切．为具体考虑这几种情况，我们求出

$$y=\frac{\beta f-\beta\gamma x+\alpha\sqrt{a^2(\alpha^2+\beta^2)-f^2+2\gamma fx-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x^2}}{\alpha^2+\beta^2},$$

如果 f 的值使根号部分不为实数，则球面与平面既不相交也不相切．

§ 141

置 $f=a\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$，则

$$y=\frac{\beta f-\beta\gamma x\pm\alpha x\sqrt{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\mp\alpha\gamma a\sqrt{-1}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

该方程只在

$$x=\frac{\gamma a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},\ y=\frac{\beta a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

时才有实解．因此，如果 $f=a\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$，则方程 $\alpha z+\beta y+\gamma x=f$ 表示的平面与所给球面相切于点

$$x=\frac{\gamma a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$y=\frac{\beta a}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$z=\frac{a\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.$$

这三个值可用初等几何方法验证.

§ 142

由此可以推出一般规则,来判断一个曲面与平面或另一个曲面是否相切.从两个方程消去一个变量,再对所得方程的因式进行考察:如果有两个虚线性因式,则所给面相切于一点.这一点可以用置两个线性因式为零的方法得到;如果有两个实线性因式,且相等,则两个面的切点构成一条直线;如果有两个相等的非线性因式,也即被一个完全平方除得尽,则置平方根等于零,得切点所成线的投影.由此可见,如果我们的方程有四个虚因式,则两个面相切于两点.

§ 143

为解释得更清楚,我们考虑锥面和中心在锥面轴上的球面,看它们的相切.球面和锥面的方程分别为 $z^2+y^2+x^2=a^2$ 和 $(f-z)^2=mx^2+ny^2$,我们视 f 为锥面顶点至球面中心的距离.消去 y,得

$$(f-z)^2=na^2-nz^2+(m-n)x^2,$$

这是交线在坐标 x,y 所定平面上的射影方程.先考虑正锥面,即 $m=n$ 的情形.此时

$$z=\frac{f\pm\sqrt{n(1+n)a^2-nf^2}}{1+n}.$$

如果 $f=a\sqrt{1+n}$,得重根 $z=\frac{a}{\sqrt{1+n}}$,切点构成一条线,是一个圆,它在过轴的平面上的射影为一条垂直于轴的直线.

§ 144

再考虑斜锥面,即 $m \neq n$ 的情形.此时从方程看上去像是恒有交线,但实际上常常并无交线.事实上,只要 $m > n$,我们就得到交线射影实方程.应该指出,射影为实并不意味着交线一定为实.即射影为实对交线为实并不充分,必需再加上从射影至交线的垂线为实.换句话说,曲线实射影必实,反之,则不然,射影实曲线可以不实.这是应该特别给以注意的,不要错误地把射影实作为曲线实的充分条件.

§ 145

但坐标 x, y 所定平面上的射影,情况不同.这个平面上没有不与锥面上的点对应的点,因而曲线在这个平面上的射影为实,则曲线本身必实.将 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 代入锥面方程,得

$$f-\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{mx^2+ny^2},$$

或

$$a^2+f^2-(1+m)x^2-(1+n)y^2=2f\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

继而

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}(a^2-f^2)^2-2(a^2-f^2)\\-2(a^2+f^2)m\end{matrix}\right\}x^2 \quad \left.\begin{matrix}-2(a^2-f^2)\\-2(a^2+f^2)n\end{matrix}\right\}y^2+\\+(1+m)^2x^4+2(1+m)(1+n)x^2y^2+(1+n)^2y^4\end{matrix}\right\}=0.$$

进而

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{a^2-f^2+n(a^2+f^2)-(1+m)(1+n)x^2}{(1+n)^2}\pm\\\pm\dfrac{2f}{(1+n)^2}\sqrt{n(1+n)a^2-nf^2+(m-n)(1+n)x^2}\end{matrix}\right\}=y^2,$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^2-f^2+m(a^2+f^2)-(1+m)(1+n)y^2}{(1+m)^2}\pm\\ \pm\dfrac{2f}{(1+m)^2}\sqrt{m(1+m)a^2-mf^2+(n-m)(1+m)y^2}\end{array}\right\}=x^2.$$

§ 146

要所得方程有因式,则应 $f^2=(1+n)a^2$,或 $f^2=(1+m)a^2$. 前一情况下我们有

$$y^2=\frac{na^2-(1+m)x^2}{1+n}\pm\frac{2fx\sqrt{m-n}}{(1+n)\sqrt{1+n}},$$

从而,如果 $m<n$,则

$$x=0,y=\pm a\sqrt{\frac{n}{1+n}},z=\frac{a}{\sqrt{1+n}}.$$

得到至锥面轴等距的两个切点. 如果 $m>n$,则应取方程

$$x^2=\frac{ma^2-(1+n)y^2}{1+m}\pm\frac{2fy\sqrt{n-m}}{(1+m)\sqrt{1+m}},$$

$y\neq0$ 时, 该方程没有实解, $y=0$ 时

$$x=\pm a\sqrt{\frac{m}{1+m}},z=\frac{a}{\sqrt{1+m}}.$$

得到另外两个切点,都位于锥而的最窄部分. 任何情况下的相切,都可以用类似的方法进行考察.

§ 147

前而讲过曲线切线的求法,从它可以引出曲面切平面的一种更简单的求法. 参见图 149,设要求出其切平面的那张曲面,由坐标 $AP=x,PQ=y,QM=z$ 间的方程给出. 借助这个方程,我们来确定曲面上点 M 处的切平而. 先考虑过点 M 的一张平面,求出它

与所给曲面的交线在点 M 处的切线，这条切线位于我们所要的切平面上．再考虑过点 M 的另一张平面，也求出它与所给曲面的交线在点 M 处的切线，这条切线就也位于我们所要的切平面上．这两条切线所决定的平面就是曲面在点 M 处的切平面．

图 149

§ 148

在平面 APQ 上分别引平行和垂直于轴 AP 的直线 QS 和 QP．点 M 与这两条直线各决定一张平面，这两张平面都垂直于平面 APQ．记这两张平面与我们曲面的交线为 EM 和 FM，记这两条交线在点 M 处的切线为 MS 和 MT，这两条切线分别交直线 QS 和 QT 于 S 和 T．QS 和 QT 分别为次切线，求得了这两条切线，则平面 SMT 就是我们曲面点 M 处的切平面．连成直线 ST，则 ST 为切平面与平面 APQ 的交线．从 Q 向 ST 引垂线 QR，则 QR 比 QM 等于切平面与平面 APQ 所成角 MRQ 的余切．

§ 149

令前节用切线法求得的次切线 $QS = s$, $QT = t$,则

$$PT = t - y, PX = s - \frac{sy}{t},$$

从而

$$AX = x + \frac{sy}{t} - s.$$

即直线 ST 与轴 AP 的交点 X 已知,又由角 $AXS = TSQ$ 知角 AXS 的正切 $= \frac{t}{s}$. 这样切平面与平面 APQ 交线的位置成为已知. 再由 $ST = \sqrt{s^2 + t^2}$,我们有

$$QR = \frac{st}{\sqrt{s^2 + t^2}}.$$

除 QM 以该表达式,得

$$角\ MRQ\ 的正切 = \frac{z\sqrt{s^2 + t^2}}{st}.$$

引 MN 垂直于 MR,则 MN 在点 M 处既垂直于切平面,又垂直于曲面本身. 它的位置由下面的等式决定

$$QN = \frac{z^2\sqrt{s^2 + t^2}}{st}.$$

从 N 向轴 AP 引垂线 NV,则由角 $QNV = QST$,我们有

$$PV = \frac{z^2}{s} = QW, NW = \frac{z^2}{t}.$$

因此,如果用所说的方法确定下平面 APQ 上点 N 的位置,则直线 NM 垂直于所给曲面.

§ 150

我们讲了如何用射影求面与面的交线.现在看看射影的阶与曲面的阶的关系.首先,两个一阶面,即两个平面,交线和交线的射影都是一阶线.其次,我们看到了,一阶面,二阶面,其交线的射影的阶数不会高于2.类似地,一阶面,三阶面,其交线的投影的阶数不会高于3.类推.再次,两个二阶面,其交线射影的阶数不会高于4.一般地,m 阶面,n 阶面,其交线射影的阶数不会高于 mn.

§ 151

两个面都不是平面,其交线,大多不是平面曲线.两个面,如果从它们的方程可以产生方程 $\alpha z+\beta y+\gamma x=f$,则这两个面的交线为平面曲线.例如,从两个方程可将两个变量,比如 z 和 y 用第三个变量 x 表出,即 $z=P, y=Q, P, Q$ 是 x 的函数,这个时候,如果有数 n 使得 $P+nQ$ 只含 x 的一次幂和常数,即 $P+nQ=mx+k$,则交线为平面曲线,所在平面的方程为 $z+ny=mx+k$.

§ 152

一个具体的例子.设给定的两个曲面为柱面和椭圆双曲面,方程分别为

$$z^2=x^2+y^2,$$
$$z^2=x^2+2y^2-2ax-a^2.$$

代前一个入后一个,得

$$x^2+2y^2-2ax-a^2=x^2+y^2,$$

从而

$$y=\sqrt{2ax+a^2}, z=x+a.$$

最后这个方程表明,整个交线在方程 $z=x+a$ 确定的平面上.用这样的方法可以回答关于曲面的很多问题.进一步的阐述留给无穷分析本身去做,我们的这两本书仅仅是个引论.